Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №2. С. 144–158.

УДК УДК [519.87:615.099]:33
MSC 62P20

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-144-158

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ УРОВНЯ ПЕРВИЧНОЙ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ АЛКОГОЛИЗМОМ, НАРКОМАНИЕЙ И ТОКСИКОМАНИЕЙ ОТ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

С. Н. Тростянский, А. С. Тростянский

(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. В. Меньших*)

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
Воронеж, 394064, Россия;
Воронежский государственный университет,
Воронеж, 394018, Россия

E-mail: trostyansky2012@yandex.ru, trostalx@gmail.ru

Аннотация. Разработана математическая модель, определяющая зависимость первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от статистически регистрируемых показателей уровня жизни населения и цены соответствующих психоактивных веществ. Результаты предложенной математической модели корректно согласуются с расчетами на основе модели авторегрессии с панельными данными по регионам России с 2006 по 2018 годы.

Ключевые слова: математическое моделирование, уровень заболеваемости, алкоголизм, статистический анализ панельных данных.

Для цитирования: Тростянский С. Н., Тростянский А. С. 2021. Математическое моделирование зависимости уровня первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от социально-экономических показателей. Прикладная математика & Физика, 53(2): 144–158.
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-144-158.

MATHEMATICAL MODELING OF DEPENDENCE OF THE PRIMARY MORBIDITY LEVEL-ALCOHOLISM, DRUG ADDICTION, TOXICOMANIA – ON SOCIAL AND ECONOMIC INDICES

Sergey Trostyansky, Alexander Trostyansky

(*Article submitted by a member of the editorial board V. V. Menshikh*)

Military educational-scientific center of air forces (VUNC VVS) «Air-force academy named after Prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin»,
Voronezh, 394064, Russia;
Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia
E-mail: trostyansky2012@yandex.ru, trostalx@gmail.ru

Received May, 15, 2021

Abstract. Mathematical model determining dependence of the primary morbidity to the alcohol addiction, drug addiction and toxicomania on statistically registered indices concerned to the living standards of population and the price of corresponding psychoactive substances is developed in the work. Results of the proposed mathematical model are in a reasonable agreement with the calculations basing on autoregressive model for the panel data over the regions of Russia from 2006 to 2018 years.

Key words: mathematical modeling, morbidity level, alcoholism, statistical analysis of the panel data.

For citation: Trostyansky S., Trostyansky A. 2021. Mathematical modeling of dependence of the primary morbidity level-alcoholism, drug addiction, toxicomania – on social and economic indices. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 144–158. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-144-158.

1. Введение. Алкоголизм, наркомания и токсикомания являются социально значимыми заболеваниями населения, обуславливающими значительный ущерб как конкретным людям и их семьям, так и всему обществу и государству. В связи с этим возникает необходимость государственного вмешательства в процессы, влияющие на уровень алкоголизма, наркомании и токсикомании среди населения страны, с целью прогнозирования их динамики и возможности управляющих воздействий для минимизации этих негативных явлений. Соответственно, актуально построение теоретической модели, описывающей зависимость уровня этих социально значимых заболеваний, определяемых поведением людей по отношению к рискам приобретения этих заболеваний, в зависимости от статистически регистрируемых социально-экономических показателей.

2. Теоретическая модель. В настоящее время в качестве моделей потребления алкоголя и других психоактивных веществ известны экономические модели рационального привыкания (аддиктивности) [10, 11, 12], описывающие зависимость спроса индивида на аддиктивный продукт от дохода индивида в различные периоды времени и от цены аддиктивного продукта. Однако проблема моделирования зависимости уровня заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от социально-экономических факторов остается открытой и требует решения. Согласно данным официальной статистики Министерства здравоохранения Российской Федерации (РФ) за период с 2006 по 2018 годы по регионам РФ, зарегистрированный уровень общей заболеваемости от общего числа населения для алкоголизма в среднем составлял 1,5 % и не превышал 2%, для наркомании в среднем составлял 0,2 % и не превышал 0,7 %, для токсикомании в среднем составлял 0,008 % и не превышал 0,035%. Поэтому для этих типов социально значимых заболеваний уровень первичной заболеваемости в регионе за год можно с достаточной точностью оценивать количеством впервые заболевших на 10^5 человек от всего населения. Уровень Z_i первичной заболеваемости i типа за год, определяемой количеством впервые заболевших на 10^5 человек, связан с вероятностью p_i приобретения заболевания соотношением:

$$Z_i = p_i \cdot 10^5, \tag{1}$$

где индекс i соответствует следующим типам заболеваемости: 1 – алкоголизм, 2 – наркомания, 3 – токсикомания.

При этом уровень Z_i первичной заболеваемости i типа, обусловленной социальным поведением людей, должен находиться в пропорциональной зависимости от доли D_i населения, нарушающей нормы социального поведения (НСП), с риском приобретения соответствующего заболевания типа i:

$$Z_i = k_i \cdot D_i, \tag{2}$$

где k_i – коэффициент пропорциональности. Следовательно, имеет место соотношение:

$$p_i = k_i \cdot 10^5 \cdot D_i. \tag{3}$$

Для анализа вероятности нарушений индивидом норм социального поведения можно использовать модель рационального правонарушителя [9]. Из этой модели следует, что нарушения НСП, приводящие к заболеванию i типа, происходят только тогда, когда предполагаемая дополнительная полезность v от нарушений НСП превышает предполагаемые убытки u, в случае приобретения индивидом заболевания i типа. При этом должно выполняться неравенство:

$$(1 - p_i) \cdot v > p_i \cdot u, \tag{4}$$

где p_i – вероятность заболевания i типа для индивида при нарушении НСП. Рассмотрим применение модели рационального нарушителя НСП к социально значимым заболеваниям на примере алкоголизма. Соответственно, индекс $i = 1$ при переменных, фигурирующих в предлагаемой математической модели, будем опускать. При оценке вероятности p заболевания алкоголизмом, на основе гипотезы рационального нарушителя НСП, учитывается, что индивид может рассматривать как дополнительную полезность v, разность между стоимостью покупки за год объема C этанола по потребительской цене S_p за единицу объема (литр), которую индивид готов заплатить за этанол, и фактической стоимостью приобретенного объема C этанола по фактической цене S за единицу объема, то есть:

$$v = (S_p - S) \cdot C = \triangle S \cdot C, \tag{5}$$

где будем считать, что:

$$\triangle S = S_p - S \approx \text{const}, \tag{6}$$

а возможный для приобретения годовой объем C этанола ограничивается стоимостью располагаемого годового дохода I_r индивида:

$$I_r = r \cdot I = r \cdot 12 \cdot M, \tag{7}$$

где I – средний годовой доход индивида; r – средний коэффициент остающегося (располагаемого) дохода индивида после обязательных платежей и взносов; M – средний доход индивида за месяц.

Для оценки вида функции распределения покупаемого населением в t году объема C_t этанола, запишем модель спроса на аддиктивный продукт, полученную из модели рациональной аддиктивности [12]:

$$C_t = a_0 + a_1 \cdot C_{t-1} + a_2 \cdot I_t + a_3 \cdot S_t + \varepsilon_t, \tag{8}$$

где C_t – объем потребления этанола индивидом в t году; C_{t-1} – объем потребления этанола индивидом в $t-1$ году; I_t – доходы индивида в t году; S_t – цена литра этанола в t году; a_j – коэффициенты при объясняющих переменных, a_0 – константа, ε_t – ошибка модели. При этом из модели [12] следует, что коэффициенты:

$$a_2 > 0,\ a_3 < 0. \tag{9}$$

Вид функции распределения для C_t в году t не изменится, если при некоторых предшествующих экономических условиях в $t-1$ году имело место $C_{t-1} = 0$. В этом случае из модели [12] следует зависимость:

$$C_t = a_0 + a_2 \cdot I_t + a_3 \cdot S_t + \varepsilon_t. \tag{10}$$

Представим зависимость (10) в виде:

$$C_t = q \cdot r \cdot I_t - w \cdot S_t - c + \varepsilon_t, \tag{11}$$

где: $q \cdot r = a_2$, $w = -a_3$, $c = -a_0$, тогда соответственно из (9) коэффициенты: $q > 0$, $w > 0$. При этом дополнительную полезность можно оценить соотношением:

$$v = \triangle S \cdot C = \triangle S \cdot [q \cdot I_r - w \cdot S - c] = \triangle S \cdot [12 \cdot q \cdot r \cdot M - w \cdot S - c]. \tag{12}$$

Запишем выражение (12) для дополнительной полезности в следующем виде:

$$v = b - f, \tag{13}$$

где:

$$b = \triangle S \cdot q \cdot r \cdot I = \triangle S \cdot 12 \cdot q \cdot r \cdot M, \tag{14}$$

$$f = \triangle S \cdot [w \cdot S + c]. \tag{15}$$

Для оценки вида функции распределения величины годовых убытков u индивидов от заболевания алкоголизмом среди населения, можно определить зависимость величины u от годового I или месячного M дохода индивида, соотношением:

$$u = g \cdot I_r = g \cdot r \cdot I = 12 \cdot g \cdot r \cdot M, \tag{16}$$

где u – убытки от потери индивидом доли g своего прежнего располагаемого дохода I_r за год, обусловленные потерей работоспособности или места работы при заболевании алкоголизмом. С учетом (13), условие (4) для рациональности нарушения индивидом НСП принимает вид:

$$(1-p)(b-f) > p \cdot u. \tag{17}$$

Из результатов работ [4], [5] следует, что логарифм величины доходов населения M имеет нормальную плотность распределения. Тогда из соотношения (16) следует, что и функция распределения натурального логарифма величины u годовых убытков населения от заболевания алкоголизмом также описывается функцией плотности нормального распределения:

$$\rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}(\ln(u)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln(u)}u}\exp\left(-\frac{[\ln(u)-\ln(\mu)]^2}{2\sigma^2_{\ln(u)}}\right), \tag{18}$$

где $\rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}(\ln(u))$ – функция плотности нормального распределения натурального логарифма величины годовых убытков u населения от заболевания алкоголизмом, μ – медианное значение для распределения величины годовых убытков населения от заболевания алкоголизмом, $\sigma^2_{\ln(u)}$ – дисперсия нормального распределения натурального логарифма величины годовых убытков населения от заболевания алкоголизмом. На основании работы [4], [5] и соотношения (14) следует, что распределение натурального логарифма величины b, связанной с дополнительной годовой полезностью от приобретения этанола, описывается функцией плотности нормального распределения $\rho_{N(\ln(\eta),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(b))$: плотности распределения:

$$\rho_{N(\ln(\eta),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(b)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln(b)}b}\exp\left(-\frac{[\ln(b)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma^2_{\ln(b)}}\right), \tag{19}$$

где η – медианное значение для распределения величины b, $\sigma^2_{\ln(b)}$ – дисперсия нормального распределения натурального логарифма величины b.

С учетом (17), (18), (19) при стационарности социально-экономических факторов, долю населения D, готовую ради прибыли $v = b - f$ рисковать заболеть алкоголизмом, можно определить выражением:

$$D = \int_{\ln(f)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\eta),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(b)) \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}(\ln(u)) d\ln(u) d\ln(b) \tag{20}$$

где f – определяется соотношением (15) и является параметром, связанным с влиянием фактической цены S одного литра этанола на среднее годовое потребление этанола жителями региона.

Для определения динамики изменения доли D нарушителей НСП, при изменении социально-экономических показателей: $\ln(\mu)$, $\sigma_{\ln(u)}$, f, найдем знаки производных: $\dfrac{dD}{d\ln(\mu)}$, $\dfrac{dD}{d\sigma_{\ln(u)}}$, $\dfrac{dD}{df}$.

При вычислении производной $\dfrac{dD}{d\ln(\mu)}$, воспользуемся соотношением:

$$\frac{d\rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2\ln(u))}}{d\ln(\mu)} = -\frac{2(\ln(u) - \ln(\mu))}{2\sigma^2_{\ln(u)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln(u)}} \exp\left(-\frac{(\ln(u) - \ln(\mu))^2}{2\sigma^2_{\ln(u)}}\right) =$$

$$= -\frac{d\rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2\ln(u))}}{d\ln(u)}. \tag{21}$$

На основании (21) запишем:

$$\frac{d}{d\ln(\mu)} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\eta),\sigma^2_{\ln(b)})}(u) d\ln(u) = -\frac{d}{d\ln(u)} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\eta),\sigma^2_{\ln(b)})}(u) d\ln(u) =$$

$$= -\rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)\right). \tag{22}$$

Из формул (20) и (22) следует:

$$\frac{dD}{d\ln(\mu)} = -\int_{\ln(f)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}\left(\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)\right)\rho_{N(\ln(\eta),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(b)) d\ln(b) =$$

$$= -\int_{\ln(f)}^{\infty} \frac{(b-f)}{b} \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(b)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma^2_{\ln(b)}}\right)}{\exp\left(-\frac{[\ln(b-f)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma^2_{\ln(b)}}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{(b-f)} \rho_{N(\ln(\mu)),\sigma_{\ln^2(u)}}\left(\ln\left(\frac{(1-p)}{p}\right)(b-f)\right)\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(b-f)) db. \tag{23}$$

Произведя замену переменной: $t = b - f$ и учитывая: $b = t + f$, получим выражение:

$$\frac{dD}{d\ln(\mu)} = -\int_{0}^{\infty} \frac{t}{(t+f)} \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(t+f)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma^2_{\ln(b)}}\right)}{\exp\left(-\frac{[\ln(t)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma^2_{\ln(b)}}\right)} \frac{1}{t} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}\left(\ln\frac{(1-p)}{p}t\right)\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(t)) dt. \tag{24}$$

Выражение под интегралом в (24) можно представить произведением функции

$$\varphi(t) = \frac{t}{(t+f)} \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(t+f)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma^2_{\ln(b)}}\right)}{\exp\left(-\frac{[\ln(t)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma^2_{\ln(b)}}\right)},$$

которая монотонно растет при увеличении t, и функции

$$g(t) = \frac{1}{t}\rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}\left(\ln\frac{(1-p)}{p}t\right)\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(t)),$$

являющейся интегрируемой на интервале $[0, \infty]$, поэтому к интегралу (24) применима вторая теорема о среднем [6]:

$$\frac{dD}{d\ln(\mu)} = -\int_{0}^{\infty} \varphi(t)g(t)dt = -\varphi(\infty)\int_{\varepsilon}^{\infty} g(t)dt =$$

$$= -\int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma^2_{\ln(u)})}\left(\ln\frac{1-p}{p}t\right)\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(t) d\ln(t)) =$$

$$-\int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\frac{\mu p}{1-p}),\sigma^2_{\ln(u)})}(\ln t)\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(t)d\ln(t)), \tag{25}$$

где $0 \le \varepsilon \le \infty$.

Используем лемму из работы [1]:

$$\rho_{N(m_2,\sigma_2^2)}(s\cdot y + l\cdot x)\rho_{N(m_1,\sigma_1^2)}(y) = \rho_{N(m_2-s\cdot m_1,\sigma_2^2+s^2\sigma_1^2)}(0)\rho_{N(M,\sigma^2)}(y), \tag{26}$$

где:

$$M = \frac{m_1\sigma_2^2 - s(l\cdot x - m_2)\sigma_1^2}{\sigma_2^2 + s^2\sigma_1^2}; \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + s^2\sigma_1^2}.$$

В выражении (25) произведение:

$$\rho_{N(\ln(\frac{\mu p}{1-p}),\sigma^2_{\ln(u)})}(\ln t)\cdot\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma^2_{\ln(b)})}(\ln(t))d\ln(t)$$

аналогично (26) при подстановке:

$$y = \ln(t); \quad s = 1; \quad l = 0; \quad m_1 = \ln(\eta - f); \quad m_2 = \ln\frac{\mu p}{1-p}; \quad \sigma_1 = \sigma_b; \quad \sigma_2 = \sigma_u. \tag{27}$$

Тогда, на основании формул (25)–(27) следует соотношение:

$$\frac{dD}{d\ln(\mu)} = -\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)},\sigma_u^2+\sigma_b^2)}(0)\times$$

$$\times\int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} p_{N\left(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2+\ln\frac{\mu p}{1-p}\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2},\frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2}\right)}(\ln(t)d\ln(t)) =$$

$$= -\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)},\sigma_u^2+\sigma_b^2)}(0)\left[\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2 + \ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right] \le 0, \tag{28}$$

т. к. модуль функции Лапласа $\left|\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}dy\right)\right| \le \frac{1}{2}$ [2].

Отсюда получаем соотношение:

$$\frac{dD}{d\mu} = \frac{dD}{d\ln(\mu)}\cdot\frac{d\ln(\mu)}{d\mu} = -k\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)},\sigma_u^2+\sigma_b^2)}(0)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2 + \ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]\cdot\frac{1}{\mu} \le 0. \tag{29}$$

Из формул (29) и (3) следует:

$$\frac{dp}{d\mu} = -k\cdot 10^{-5}\cdot\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)},\sigma_u^2+\sigma_b^2)}(0)\cdot\left[\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2 + \ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]\cdot\frac{1}{\mu} \le 0. \tag{30}$$

Из соотношений (29) и (30) следует снижение среди населения региона доли D – нарушителей НСП и уменьшение вероятности p первичных заболеваний алкоголизмом, при увеличении μ – медианного значения в распределении величины годовых убытков u от потерь доходов населения при заболевании алкоголизмом.

Связь среднего u_{cp} и медианного μ значений убытков от заболеваний алкоголизмом определяется формулой [4]: $u_{cp} = \exp\left(\ln(\mu) + \frac{\sigma^2_{\ln(u)}}{2}\right)$ и следовательно: $\ln(\mu) = \ln(u_{cp}) - \frac{\sigma^2_{\ln(u)}}{2}$; тогда: $\frac{dZ}{d\ln(u_{cp})} = \frac{dZ}{\ln(\mu)}\cdot\frac{d\ln(\mu)}{d\ln(u_{cp})} = \frac{dZ}{d\ln(\mu)}$; и с учетом соотношений (2) и (28):

$$\frac{dZ}{du_{cp}} = \frac{dZ}{d\ln(u_{cp})}\cdot\frac{d\ln(u_{cp})}{du_{cp}} = \frac{1}{u_{cp}}\cdot\frac{dZ}{d\ln(\mu)} = \frac{1}{u_{cp}}\cdot k\cdot\frac{dD}{d\ln(\mu)} \le 0. \tag{31}$$

Из формулы (16), для средних годовых убытков индивидов от заболеваний алкоголизмом, следует соотношение:

$$u_{cp} = g\cdot I_{cpr} = 12\cdot g\cdot r\cdot M_{cp}, \tag{32}$$

где: u_{cp} – средние по региону годовые убытки от заболеваний алкоголизмом; M_{cp} – средние месячные доходы населения региона. Следовательно, с учетом (31):

$$\frac{dZ}{dM_{cp}} = \frac{dZ}{du_{cp}} \cdot \frac{du_{cp}}{dM_{cp}} = \frac{dZ}{du_{cp}} \cdot 12 \cdot g \cdot r \leq 0. \tag{33}$$

Таким образом, из соотношения (33) следует, что при увеличении средних легальных (среднедушевых) доходов M_{cp} населения региона уровень Z первичной заболеваемости алкоголизмом среди населения региона должен понижаться. Для исследования зависимости доли D нарушителей НСП от среднеквадратического отклонения σ_u убытков, найдем производную $\dfrac{dD}{d\sigma_u}$:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = \frac{d}{d\sigma_u}\int_{\ln(f)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\eta),\sigma_\eta^2)}(\ln(b)) \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u)d\ln(b). \tag{34}$$

Начнем с вычисления выражения:

$$\frac{d}{d\sigma_u}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u) = \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \frac{d\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))}{d\sigma_u}d\ln(u). \tag{35}$$

Продифференцируем функцию плотности нормального распределения по среднеквадратическому отклонению:

$$\begin{gathered}\frac{d\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)(\ln(u))}}{d\sigma_u} = \frac{d}{d\sigma_u}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_u}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}(\ln(u)-\ln(\mu))^2\right)\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(-\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{(\ln(u)-\ln(\mu))^2}{\sigma_u^3}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}(\ln(u)-\ln(\mu))^2\right) = \\ \frac{1}{\sigma_u}\cdot\left[1-\frac{(\ln(u)-\ln(\mu))^2}{\sigma_u^2}\right]\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u)).\end{gathered} \tag{36}$$

При подстановке выражения (36) в (35) запишем:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\sigma_u}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u) = \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \frac{d\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))}{d\sigma_u}d\ln(u) = \\ = -\frac{1}{\sigma_u}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)}\left[1-\frac{(\ln(u)-\ln(\mu))^2}{\sigma_u^2}\right]\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u) = \\ = -\frac{1}{\sigma_u}\left[\int_{-\infty}^{ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u) - \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)}\left[\frac{(\ln(u)-\ln(\mu))^2}{\sigma_u^2}\right]\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u)\right]\end{gathered} \tag{37}$$

Для входящего в формулу (37) интеграла получим:

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)}\left[\frac{(\ln(u)-\ln(\mu))^2}{\sigma_u^2}\right]\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u) = \\ = \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)}(\ln(u)-\ln(\mu))\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u) = \\ = -\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right) + \\ + \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)}\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u).\end{gathered} \tag{38}$$

При подстановке (38) в (37) имеем выражение:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\sigma_u}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)}\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u))d\ln(u) = \\ = -\frac{1}{\sigma_u}\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right).\end{gathered} \tag{39}$$

При подстановке выражения (39) в (34) получаем:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = -\frac{1}{\sigma_u}\int_{\ln(f)}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)-\ln(\mu)\right)\times$$

$$\times\rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)\rho_{N(\ln(\eta),\sigma_\eta^2)}(\ln(b)d\ln(b)) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_u}\int_{\ln(f)}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{1-p},\sigma_u^2)}(\ln(b-f))\rho_{N(\ln(\eta),\sigma_\eta^2)}(\ln(b))d\ln(b) =$$

$$= -\int_{f}^{\infty}\frac{\left[\ln\left[\frac{1-p}{p}(b-f)\right]-\ln(\mu)\right]}{\sigma_u b}\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{1-p},\sigma_u^2)}(\ln(b-f))\rho_{N(\ln(\eta),\sigma_b^2)}(\ln(b))db. \tag{40}$$

Произведя замену переменных: $t = b - f$ и учитывая: $b = t + f$, получим выражение:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = -\frac{1}{\sigma_u}\int_{0}^{\infty}\frac{t}{(t+f)}\frac{\exp\left[-\frac{[\ln(t+f)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma_b^2}\right]}{\exp\left[-\frac{[\ln(t)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma_b^2}\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{t}\left(\ln\frac{1-p}{p}t-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{1-p},\sigma_u^2)}(\ln(t))\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma_u^2)}(\ln(t))dt. \tag{41}$$

Выражение под интегралом в (41) можно представить произведением функции

$$\varphi(t) = \frac{t}{t+f}\frac{\exp\left[-\frac{[\ln(t+f)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma_b^2}\right]}{\exp\left[-\frac{[\ln(t)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma_b^2}\right]},$$

которая монотонно растет при увеличении t, и функции

$$q(t) = \frac{1}{t}\left(\ln\frac{1-p}{p}t-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{1-p},\sigma_u^2)}(\ln(t))\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma_b^2)}\ln(t),$$

являющейся интегрируемой на интервале $[0,\infty]$, поэтому к интегралу (41) применима вторая теорема о среднем [6]:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = -\int_{0}^{\infty}\varphi(t)q(t)dt = -\varphi(\infty)\int_{\varepsilon}^{\infty}q(t)dt =$$

$$-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{t}\left(\ln\frac{1-p}{p}t-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{1-p},\sigma_u^2)}\ln(t)\rho_{N(\ln(\eta-f),_b^2)}(\ln(t))dt =$$

$$= -\int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty}\left(\ln\frac{1-p}{p}t-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{1-p},\sigma_u^2)}(\ln(t))\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma_b^2)}(\ln(t))d\ln(t), \tag{42}$$

где $0 \le \varepsilon \le \infty$.

Применим к произведению функций $\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{1-p},\sigma_u^2)}(\ln(t))\rho_{N(\ln(\eta-f),\sigma_b^2)}(\ln(t))$, которое входит в выражение (42) лемму из работы [1]. Тогда при подстановке в (42) соотношений (26) с учетом (27) получим выражение:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = -\frac{1}{\sigma_u}\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)},\sigma_u^2+\sigma_b^2)}(0)\times$$

$$\times\int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty}\left(\ln\frac{1-p}{p}t-\ln(\mu)\right)\rho_{N(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2+\ln\frac{\mu p}{1-p}\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2},\frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2})}(\ln(t))d\ln(t) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_u}\rho_{N(\ln\frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)},\sigma_u^2+\sigma_b^2)}(0)\left[\frac{\sigma_u^2}{(\sigma_u^2+_b^2)}\ln\left[\frac{(1-p)(\eta-f)}{p\mu}\right]\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}-\Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2+\ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]+\frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{(\sigma_u^2+\sigma_b^2)}\rho_{N(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2+\ln\frac{\mu p}{1-p}\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2},\frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2})}(\ln\varepsilon). \tag{43}$$

Рассмотрим условие, когда $\frac{dD}{d\sigma_u} = 0$. В этом случае

$$\frac{\sigma_u^2}{(\sigma_u^2+\sigma_b^2)} \ln\left[\frac{(1-p)(\eta-f)}{p\mu}\right] \cdot \left[\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2 + \ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right] =$$

$$= -\frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{(\sigma_u^2+\sigma_b^2)}\rho_{N\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2+\ln\frac{\mu p}{1-p}\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}(\ln\varepsilon);$$

$$\ln\left[\frac{p\mu}{(1-p)(\eta-f)}\right] = \frac{\sigma_b^2\cdot\rho_{N(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2+\ln\frac{\mu p}{1-p}\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2})}(\ln\varepsilon)}{\left[\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2+\ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{p\mu}{(1-p)(\eta-f)} = \exp\left[\frac{\sigma_b^2\cdot\rho_{N(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2+\ln\frac{\mu p}{1-p}\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2})}(\ln\varepsilon)}{\left[\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2+\ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]}\right]. \tag{44}$$

Множитель:

$$\exp\left[\frac{\sigma_b^2\cdot\rho_{N(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2+\ln\frac{\mu p}{1-p}\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2})}(\ln\varepsilon)}{\left[\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\eta-f}\sigma_u^2+\ln\frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p}\sigma_b^2}{\sigma_b\sigma_u\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]}\right] = d > 1. \tag{45}$$

Следовательно:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = 0, \quad \text{при условии} \quad p\cdot\mu = (1-p)(\eta-f)\cdot d, \tag{46}$$

$$\frac{dD}{d\sigma_u} > 0, \quad \text{при условии} \quad p\cdot\mu > (1-p)(\eta-f)\cdot d, \tag{47}$$

$$\frac{dD}{d\sigma_u} < 0, \quad \text{при условии} \quad p\cdot\mu < (1-p)(\eta-f)\cdot d. \tag{48}$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что:

$$\frac{dZ}{d\sigma_u} = k\cdot\frac{dD}{d_u}; \tag{49}$$

$$\frac{dp}{d\sigma_u} = 10^{-5}\cdot k\cdot\frac{dD}{d_u}. \tag{50}$$

Из выражения для коэфициента Джини [3]:

$$J_u = \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{\ln(u)}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{\frac{\sigma_{\ln(u)}}{2}} \exp(-t^2)dt, \tag{51}$$

при использовании соотношения:

$$\frac{dZ}{d\sigma_{\ln(u)}} = \frac{dZ}{dJ_u}\cdot\frac{dJ_u}{d\sigma_{\ln(u)}} \tag{52}$$

получим:

$$\frac{dZ}{dJ_u} = \frac{dZ}{d_{\ln(u)}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\exp\left(\frac{\sigma_{\ln(u)}^2}{4}\right). \tag{53}$$

Таким образом, $\frac{dZ}{dJ_u}$ имеет тот же знак, что и $\frac{dZ}{d\sigma_{\ln(u)}}$.

Из (46)–(50) и (53) следует, что:

$$\frac{dD}{d\sigma_{\ln(u)}} < 0, \quad \frac{dp}{d\sigma_{\ln(u)}} < 0, \frac{dZ}{dJ_u} < 0, \quad \text{если} \quad p\cdot\mu < (1-p)\cdot(\eta-f)\cdot d; \tag{54}$$

$$\frac{dD}{d\sigma_{\ln(u)}} > 0, \quad \frac{dp}{d\sigma_{\ln(u)}} > 0, \frac{dZ}{dJ_u} > 0, \quad \text{если} \quad p\cdot\mu > (1-p)\cdot(\eta-f)\cdot d; \tag{55}$$

$$\frac{dD}{d\sigma_{\ln(u)}} = 0, \quad \frac{dp}{d\sigma_{\ln(u)}} = 0, \frac{dZ}{dJ_u} = 0, \quad \text{если} \quad p \cdot \mu = (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d; \tag{56}$$

где μ – медианное значение годовых убытков от первичных заболеваний алкоголизмом; η – медианное значение в логнормальном распределении b из (14); f – определяется соотношением (15) и является параметром, связанным с влиянием фактической цены S одного литра этанола на среднее годовое потребление этанола.

Согласно [5], логарифм величины доходов населения M имеет нормальную плотность распределения. Тогда на основании (16) запишем соотношение для наиболее распространенных (модальных) убытков u_{mod} от первичных заболеваний алкоголизмом в регионе и модальных месячных доходов M_{mod} населения региона:

$$u_{mod} = 12 \cdot g \cdot r \cdot M_{mod}. \tag{57}$$

Тогда, из (32) и (57), с учетом [4], следует:

$$\sigma_{\ln(u)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\ln(u_{cp}) - \ln(u_{mod}))} = \sqrt{\frac{2}{3}(\ln(M_{cp}) - \ln(M_{mod}))} = \sigma_{\ln(M)}. \tag{58}$$

Из выражения для коэффициента Джини [3]:

$$J_D = \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{\ln(M)}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{\ln(M)}{2}} \exp(-t^2)dt. \tag{59}$$

При использовании соотношения:

$$\frac{dZ}{d\sigma_{\ln(M)}} = \frac{dZ}{dJ_M} \cdot \frac{dJ_M}{d\sigma_{\ln(M)}} \tag{60}$$

получим:

$$\frac{dZ}{dJ_M} = \frac{dZ}{d\sigma_{\ln(M)}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \exp\frac{\sigma^2_{\ln(M)}}{4}. \tag{61}$$

Учитывая из (58), что: $\sigma_{\ln(u)} = \sigma_{\ln(M)}$, получим соотношение:

$$\frac{dZ}{dJ_M} = \frac{dZ}{d\sigma_{\ln(u)}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \exp\frac{\sigma^2_{\ln(M)}}{4} = \frac{dZ}{dJ_u}, \tag{62}$$

тогда производная $\frac{dZ}{dJ_M}$ имеет тот же знак, что и $\frac{dZ}{dJ_u}$.

Из (54)–(56), (58) и (62) следует, что:

$$\frac{dZ}{dJ_M} < 0, \quad \text{если} \quad p \cdot \mu < (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d; \tag{63}$$

$$\frac{dZ}{dJ_M} > 0, \quad \text{если} \quad p \cdot \mu > (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d; \tag{64}$$

$$\frac{dZ}{dJ_M} = 0, \quad \text{если} \quad p \cdot \mu = (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d. \tag{65}$$

При возникновении у индивида заболевания алкоголизмом, связанные с этим убытки от потери индивидуумом работоспособности или места работы, существенно превосходят выгоды от покупки этанола. Это соответствует выполнению условия (64) для зависимости уровня Z первичной заболеваемости алкоголизмом от коэффициента Джини для распределения месячных доходов населения. То есть с увеличением коэффициента Джини J_M уровень Z первичной заболеваемости алкоголизмом в регионе также должен увеличиваться. Проведем расчет производной $\frac{dD}{df}$. Для этого представим выражение для D в виде:

$$D = \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u)) \int_{\left(\ln\frac{p}{1-p}u+f\right)}^\infty \rho_{N(\ln(\eta),\sigma_b^2)}(\ln(b))d\ln(b)d\ln(u). \tag{66}$$

Тогда:

$$\frac{dD}{df} = \frac{d}{df}\int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u)) \int_{\left(\ln\frac{p}{1-p}u+f\right)}^\infty \rho_{N(\ln(\eta),\sigma_b^2)}(\ln(b))d\ln(b)d\ln(u) =$$

$$= \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{d}{df} \int_{\left(\ln \frac{p}{1-p}u+f\right)}^\infty \rho_{N(\ln(\eta),\sigma_b^2)}(\ln(b)) d\ln(b) d\ln(u) =$$

$$= \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{d}{df} \left[1 - \int_{-\infty}^{\left(\ln \frac{p}{1-p}u+f\right)} \rho_{N(\ln(\eta),\sigma_b^2)}(\ln(b)) d\ln(b) \right] d\ln(u) =$$

$$= -\int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\left(\ln \frac{p}{1-p}u+f\right)} \rho_{N(\ln(\eta),\sigma_b^2)}(\ln(b)) d\ln(b) d\ln(u) =$$

$$= -\int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu),\sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{1}{\frac{p}{1-p}u+f} \rho_{N(\ln(\eta),\sigma_b^2)}\left(\ln\left(\frac{p}{1-p}u+f\right)\right) d\ln(u) =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u u} \exp\left[-\frac{[\ln(u)-\ln(\mu)]^2}{2\sigma_u^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b \frac{p}{1-p}\left[u + \frac{1-p}{p}f\right]} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\left[\ln\left[\frac{p}{1-p}\left[u+\frac{1-p}{p}f\right]\right] - \ln(\eta)\right]^2}{2\sigma_b^2} \right] du. \tag{67}$$

Введем замену переменной $t = u + \frac{1-p}{p}f$. Тогда выражение (67) запишем в виде:

$$\frac{dD}{df} = -\int_{\frac{1-p}{p}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u \left[t - \frac{1-p}{p}f\right]} \exp\left[-\frac{\left[\ln\left[t-\frac{1-p}{p}f\right] - \ln(\mu)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b \frac{p}{1-p}t} \exp\left[-\frac{\ln\left[\frac{p}{1-p}t - \ln(\eta)\right]^2}{2\sigma_b^2} \right] dt$$

$$= -\int_{\frac{1-p}{p}f}^\infty \frac{1}{\left[t-\frac{1-p}{p}f\right]} \frac{\exp\left[-\frac{\left[\ln\left[t-\frac{1-p}{p}f\right]-\ln(\mu)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right]}{\exp\left[-\frac{\left[\ln[t]-\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t]-\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t]-\ln\frac{1-p}{p}\eta\right]^2}{2\sigma_b^2} \right] dt. \tag{68}$$

Выражение под интегралом в (68) можно представить произведением функций

$$\beta(t) = \frac{1}{\left[t-\frac{1-p}{p}f\right]} \frac{\exp\left[-\frac{\left[\ln\left[t-\frac{1-p}{p}f\right]-\ln(\mu)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right]}{\exp\left[-\frac{\left[\ln[t]-\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right]},$$

которая монотонно растет при увеличении t, и функции

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t]-\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t]-\ln\left(\frac{1-p}{p}\eta\right)\right]^2}{2\sigma_b^2} \right],$$

которая является интегрируемой на интервале $\dfrac{1-p}{p}f, \infty$, поэтому к интегралу (68) применима вторая теорема о среднем [6]:

$$\frac{dD}{df} = -\int_{\frac{1-p}{p}f}^\infty \beta(t)\psi(t)dt = -\beta\left(\frac{1-p}{p}f\right) \int_{\frac{1-p}{p}f}^{\frac{1-p}{p}f+\varepsilon} \psi(t)dt = -\exp\left[\frac{\left[\ln\left[\frac{1-p}{p}f\right] - \ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \times$$

$$\times\int_{\ln\frac{1-p}{p}f}^{\ln\frac{1-p}{p}f+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u}\exp\left[-\frac{\left[\ln[t]-\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}\right)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b}\exp\left[-\frac{\left[\ln[t]\ln\left(\frac{1-p}{p}\eta\right)\right]^2}{2\sigma_b^2}\right]d\ln(t)=$$

$$=-\exp\left[\frac{\left[\ln\left[\frac{1-p}{p}f-\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)\right]\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]\int_{\left[\ln\frac{1-p}{p}f\right]}^{\left[\ln\frac{1-p}{p}f+\varepsilon\right]}\rho_{\left[\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right),\sigma_u^2\right]}(\ln(t))\rho_{\left[\ln\frac{1-p}{p}\eta,\sigma_b^2\right]}(\ln(t))d\ln(t), \quad (69)$$

где $0\le\varepsilon\le\infty$.

Применим к произведению функций $\rho_{\left[\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right),\sigma_u^2\right]}(\ln(t))\rho_{\left[\ln\frac{1-p}{p}\eta,\sigma_b^2\right]}(\ln(t))$ в формуле (69) лемму [1]. При этом произведем подстановку в выражение (69) соотношения (26), где

$$y=\ln(t);s=1;l=0;m_1=\ln\frac{1-p}{p}\eta;m_2=\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right);\sigma_1=\sigma_b;\sigma_2=\sigma_u. \quad (70)$$

В результате получим следующее соотношение для производной $\dfrac{dD}{df}$:

$$\frac{dD}{df}=-\exp\left[-\frac{\ln\left[1+\frac{\mu}{\frac{1-p}{p}f}\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]\rho_{\left[\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)-\ln\left(\frac{1-p}{p}\eta\right),\sigma_u^2+\sigma_b^2\right]}(0)\times$$

$$\times\int_{\ln\frac{1-p}{p}f}^{\ln\left[\frac{1-p}{p}f+\varepsilon\right]}\rho_{\left[\frac{\ln\left[\mu+\frac{1-p}{p}f\right]\sigma_b^2+\ln\left[\frac{1-p}{p}\eta\right]\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2},\frac{\sigma_u^2\sigma_b^2}{\sigma_u^2+\sigma_b^2}\right]}(\ln(t))d\ln(t)=$$

$$=-\exp\left[-\frac{\ln\left[1+\frac{\mu}{\frac{1-p}{p}f}\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]\rho_{\left[\ln\left(\mu+\frac{1-p}{p}f\right)-\ln\frac{1-p}{p}\eta,\sigma_u^2+\sigma_b^2\right]}(0)\times$$

$$\times\left[\Phi\left[\frac{\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f+\varepsilon}{\mu+\frac{1-p}{p}f}\right]\sigma_b^2+\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f+\varepsilon}{\frac{1-p}{p}\eta}\right]\sigma_u^2}{\sigma_u\sigma_b\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]-\Phi\left[\frac{\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f}{\mu+\frac{1-p}{p}f}\right]\sigma_b^2+\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f}{\frac{1-p}{p}\eta}\right]\sigma_u^2}{\sigma_u\sigma_b\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]. \quad (71)$$

Из (71) и (3) следует:

$$\frac{dp}{df}=-k\cdot10^{-5}\cdot\exp\left[-\frac{\ln\left[1+\frac{\mu}{\frac{1-p}{p}f}\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]\rho_{\left[\ln(\mu+\frac{1-p}{p}f)-\ln(\frac{1-p}{p}\eta),\sigma_u^2+\sigma_b^2\right]}(0)\times$$

$$\times\left[\Phi\left[\frac{\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f+\varepsilon}{\mu+\frac{1-p}{p}f}\right]\sigma_b^2+\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f+\varepsilon}{\frac{1-p}{p}\eta}\right]\sigma_u^2}{\sigma_u\sigma_b\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]-\Phi\left[\frac{\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f}{\mu+\frac{1-p}{p}f}\right]\sigma_b^2+\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f}{\frac{1-p}{p}\eta}\right]\sigma_u^2}{\sigma_u\sigma_b\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]\le0. \quad (72)$$

Также из (71) и (2) следует:

$$\frac{dZ}{df}=-k\cdot\exp\left[-\frac{\ln\left[1+\frac{\mu}{\frac{1-p}{p}f}\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]\rho_{\left[\ln(\mu+\frac{1-p}{p}f)-\ln(\frac{1-p}{p}\eta),\sigma_u^2+\sigma_b^2\right]}(0)\times$$

$$\times\left[\Phi\left[\frac{\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f+\varepsilon}{\mu+\frac{1-p}{p}f}\right]\sigma_b^2+\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f+\varepsilon}{\frac{1-p}{p}\eta}\right]\sigma_u^2}{\sigma_u\sigma_b\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]-\Phi\left[\frac{\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f}{\mu+\frac{1-p}{p}f}\right]\sigma_b^2+\ln\left[\frac{\frac{1-p}{p}f}{\frac{1-p}{p}\eta}\right]\sigma_u^2}{\sigma_u\sigma_b\sqrt{\sigma_u^2+\sigma_b^2}}\right]\right]\le0. \quad (73)$$

Тогда на основании соотношения (15), где: $f=\triangle S\cdot[w\cdot S+c]$, где $w>0$ и $\triangle S>0$, следует соотношение:

$$\frac{dZ}{dS}=\frac{dZ}{df}\cdot\frac{df}{dS}=\frac{dZ}{df}\cdot\triangle S\cdot w\le0. \quad (74)$$

Таким образом, из выражения (73) следует, что при увеличении средней стоимости S одного литра этанола, уровень Z первичной заболеваемости алкоголизмом в регионе должен понижаться.

3. Результаты на основе статистического анализа панельных данных. Для анализа статистики заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией в зависимости от социально-экономических факторов применялись панельные данные с 2006 года до 2018 года по 82 регионам Российской Федерации (кроме республики Чечня и республики Крым, вследствие отсутствия соответствующих статистических данных по этим регионам за ряд лет). При этом использовались данные официальной статистики Министерства здравоохранения Российской Федерации с 2006 по 2018 годы из сборников «Социально значимые заболевания населения России». Эти данные включали: 1) число больных с впервые в жизни установленным диагнозом зависимости от алкоголя (алкоголизм), включая алкогольные психозы на 100 тысяч населения; 2) число больных с впервые в жизни установленным диагнозом зависимости от наркотиков (наркомания) на 100 тысяч населения; 3) число больных с впервые в жизни установленным диагнозом зависимости от ненаркотических ПАВ (токсикомания) на 100 тысяч населения. Статистические данные с 2006 по 2018 годы для регионов РФ по среднедушевым доходам населения, коэффициентам Джини и показателям инфляции составлены на основе публикаций Росстата и из статистических сборников «Регионы России. Социально-экономические показатели». Из этих же статистических сборников получены данные по доле потребительских расходов населения на покупку алкогольных напитков и по количеству литров приобретенных алкогольных напитков, отличающихся содержанием этанола, приходящихся за год на одного жителя региона. На основе этих данных и данных о среднедушевых доходах населения региона, с учетом инфляции, рассчитывалась средняя цена продажи одного литра этанола в составе употребляемых населением спиртных напитков.

Рассмотрим далее модели, определяющие статистические связи уровней первичной заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией в регионах РФ с социально-экономическими показателями. Для этого воспользуемся моделью авторегрессии с панельными данными [8]. Оценка параметров таких моделей выполняется обобщенным методом моментов, на основе подхода из работ [8, 7], с использованием программы DPD 98 [7].

Запишем соответствующие этим моделям уравнения для уровней заболеваемости i−типа. Для уровня первичной заболеваемости алкоголизмом ($i = 1$) уравнения имеют вид:

$$Z_{1jt} = a_{11}Z_{1j(t-1)} + a_{21}I_{jt} + a_{31}J_{jt} + a_{41}S_{jt} + C_1. \tag{75}$$

Для уровня первичной заболеваемости наркоманией ($i = 2$) уравнения имеют вид:

$$Z_{2jt} = a_{12}Z_{2j(t-1)} + a_{22}I_{jt} + a_{32}J_{jt} + C_2. \tag{76}$$

Для уровня первичной заболеваемости токсикоманией ($i = 3$) уравнения имеют вид:

$$Z_{3jt} = a_{13}Z_{3j(t-1)} + a_{23}I_{jt} + a_{33}J_{jt} + C_3. \tag{77}$$

В приведенных выше уравнениях вида (75)–(77) индексы j и t обозначают регион и год соответственно. Объясняемые переменные в уравнениях (74): Z_{ijt}− уровень первичной заболеваемость i−м заболеванием за 1 год на 100 тысяч человек.

Объясняющие переменные в уравнениях вида (75)–(77): I_{jt} − среднедушевые годовые доходы населения региона в тысячах рублей, с учетом инфляции относительно 2006 года; J_{jt} − коэффициент Джини в регионе; S_{jt} − цена продажи 1 литра этанола в тысячах рублей, с учетом инфляции относительно 2006 года. Константы C_i в уравнениях вида (75)–(77) соответствуют неучтенным факторам в соответствующих уравнениях. На основе результатов регрессионного анализа уравнений вида (75)–(77) были получены коэффициенты при объясняющих переменных I_{jt}, J_{jt}, S_{jt} и константы C_i (таблица 1).

В таблице 1 значения p характеризуют статистическую значимость и соответственно, значения уровней ошибок полученных коэффициентов и констант. Качество моделей характеризуется значениями теста Ваальда χ_i.

Результаты регрессионного анализа, представленные в таблице 1 для количественной зависимости от социально-экономических показателей, корректно согласуются с представленной выше моделью рационального нарушителя норм социального поведения. Действительно, согласно этой модели, из соотношения (33): $\dfrac{dZ}{dM_{cp}} \leq 0$, следует, что при увеличении среднедушевых доходов M_{cp} населения, уровень Z_i первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией среди населения региона должен понижаться. Это согласуется с тем, что согласно таблице 1, коэффициенты при объясняющей переменной, связанной со среднедушевым месячным доходом $I_{jt} = 12 \cdot M_{cp_{jt}}$:

$$a_{21} < 0, a_{22} < 0, a_{23} < 0. \tag{78}$$

Таблица 1. Результаты статистического анализа панельных данных по зависимости уровня первичной заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией в регионах РФ от показателей уровня жизни населения и цены продажи этанола, с учетом инфляции

Table 1. Results of statistical analysis of panel data on the dependence of the level of primary morbidity of the population with alcoholism, drug addiction and substance abuse in the regions of the Russian Federation on the indicators of the living standards of the population and the price of ethanol sales, taking into account inflation

Факторы	Модель для уровня: алкоголизма	Модель для уровня: наркомании	Модель для уровня: токсикомании
	уравнение (75) для Z_{1jt} при i=1 [больных/10^5 человек•год]	уравнение (76) для Z_{2jt} при i=2 [больных/10^5 человек•год]	уравнение (77) для Z_{3jt} при i=3 [больных/10^5 человек•год]
$Z_{ij(t-1)}$, количество больных/10^5 человек•год	0.6993391 (p=0,000)	0,6335375 (p=0,000)	0,1403149 (p=0,000)
I_{jt}, тыс. руб	- 0,528367 (p=0,000)	-0,0951753 (p=0,000)	- 0,0191628 (p=0,000)
J_{jt},	396,4947 (p=0,000)	63,98057 (p=0,001)	20,3435 (p=0,000)
S_{jt}, тыс. руб	-29,70998 (p=0,002)		
C_i, количество больных/10^5 человек•год	-43,9411 (p=0,207)	-6,879305 (p=0,256)	- 4,67383 (p=0,000)
Тест Ваальда, χ_i	2746,20	889,45	288,65

Далее, из соотношения (64): $\dfrac{dZ}{dJ_m} > 0$, если $p \cdot \mu > (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d$, следует, что при увеличении коэффициента Джини J_M, уровень Z_i первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией среди населения региона должен повышаться.

Это согласуется с тем, что согласно таблице 1, коэффициенты при переменной, связанной с коэффициентом Джини J_{jt}:

$$a_{31} > 0, a_{32} > 0, a_{33} > 0. \tag{79}$$

Соответственно, из соотношения (74): $\dfrac{dZ}{dS} \leq 0$ следует, что при увеличении средней стоимости S одного литра этанола, с учетом инфляции, уровень Z_1 первичной заболеваемости алкоголизмом среди населения региона должен понижаться. Это согласуется с тем, что согласно таблице 1, коэффициент при переменной S_{jt}:

$$a_{41} < 0. \tag{80}$$

Корректность полученных соотношений (77), (79), (80) подтверждается высокой статистической значимостью ($p \leq 0,002$) для этих коэффициентов и приемлемым качеством теста Ваальда ($\chi_i \geq 288,65$) для используемых моделей.

4. Заключение. Результаты расчетов на основе математической модели, определяющей зависимости уровня первичной заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от показателей уровня жизни населения и цены продажи психоактивных веществ, вызывающих эти заболевания, корректно согласуются с результатами, определяющими соответствующие зависимости, полученными на основе регрессионного анализа региональных панельных данных.

Список литературы

1. Андриенко Ю. В. 2003. Экономика преступления: Теоретическое и эмпирическое исследование определяющих факторов преступности (криминометрический подход): дис. ... канд. экон. наук, 133.

2. Гмурман В. Е. 2004. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Издание десятое, стереотипное. М., Высшая школа, 480.

3. Золотухина Л. А. 2015. Исследование зависимостей между показателями дифференциации населения по доходам. Финансы и бизнес, 3: 55–64.
4. Колмаков И. Б. 2006. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения. Проблемы прогнозирования, 1: 136–162.
5. Суворов А. В. 2001. Проблемы анализа дифференциации доходов населения и построения дифференцированного баланса денежных доходов и расходов населения. Проблемы прогнозирования, 1: 58–74.
6. Фихтенгольц Г. М. 1970. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., ФМЛ, 800.
7. Arellano M., Bond S. 1998. Dynamic Panel Data Estimation Using DPD98 for Gauss: a Guide for Users, mimeo, Institute for Fiscal Studies, London, Dec, 46.
8. Arellano M., Bond S. 1991. Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. Review of Economic Studies, 58: 277–297.
9. Becker G. 1968. Crime and Punishment: An Economic Approach. Journal of Political Economy. 76: 169–217.
10. Becker G. S., Grossman M. and Murphy K. M. 1994. An empirical analysis of cigarette addiction, American Economic Review, 84(3): 396–418.
11. Becker G. S. and Murphy K. M. 1988. A theory of rational addiction. Journal of Political Economy, 96(4): 675–700.
12. Cook P. J. and Moore M. J. 1995. Habit and heterogeneity in the youthful demand for alcohol, NBER WP No. 5152.

References

1. Andrienko Yu. V. 2003. Ekonomika prestupleniya: Teoreticheskoe i empiricheskoe issledovanie opredelyayushchikh faktorov prestupnosti (kriminometricheskiy podkhod)[Economics of Crime: A Theoretical and Empirical Study of the Determinants of Crime (Criminometric Approach)]: dis. . . . kand. ekon. nauk, 133.
2. Gmurman V. Ye. 2004. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika [Theory of Probability and Mathematical Statistics]. Uchebnoe posobie. Izdanie desyatoe, stereotipnoe. M., Vysshaya shkola, 480.
3. Zolotukhina L. A. 2015. The study of dependences between the factors of population's incomes differentiation. Finances and business, 3: 55–64.
4. Kolmakov I. B. 2006. Prediction of the factors for the differentiation of the money population's incomes. Prognostics problems, 1: 136–162.
5. Suvorov A. V. 2001. Problems of analysis in the differentiation of the population's incomes and building of the differential balance of money incomes and expenses of the population. Problems of prediction, 1: 58–74.
6. Fikhtengolts G. M. 1970. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [Differential and Integral Calculus Course]. T.2. M., FML, 800.
7. Arellano M., Bond S. Dynamic Panel Data Estimation Using DPD98 for Gauss: a Guide for Users, mimeo, Institute for Fiscal Studies, London, Dec. 1998. 46 p.
8. Arellano M., Bond S. 1991. Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. Review of Economic Studies, 58: 277–297.
9. Becker G. 1968. Crime and Punishment: An Economic Approach. Journal of Political Economy, 76: 169–217.
10. Becker G. S., Grossman M. and Murphy K. M. 1994 An empirical analysis of cigarette addiction. American Economic Review, 84(3): 396–418.
11. Becker G. S. and Murphy K. M. 1988. A theory of rational addiction. Journal of Political Economy, 96(4): 675–700.
12. Cook P. J. and Moore M. J. 1995. Habit and heterogeneity in the youthful demand for alcohol, NBER WP No. 5152.

Получена 04.06.2021

Тростянский Сергей Николаевич – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры физики и химии Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

http://orcid.org/0000-0002-2737-1771
ул. Старых большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия
E-mail: trostyansky2012@yandex.ru

Тростянский Александр Сергеевич – магистрант второго года обучения кафедры математического анализа Воронежского государственного университета

http://orcid.org/0000-0002-7368-9959
Университетская пл.1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: trostalx@gmail.com