Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №1. С. 73–84.

РЕЦЕНЗИИ

УДК 517.983.54, 517.984.54
MSC 34L16, 34B24, 65L09

DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-73-84

РЕЦЕНЗИЯ НА МОНОГРАФИЮ: V. V. KRAVCHENKO, DIRECT AND INVERSE STURM – LIOUVILLE PROBLEMS. SPRINGER, 2020, НА АНГЛ. ЯЗЫКЕ. (С КРАТКИМ ОЧЕРКОМ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ)

С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»); Воронежский Государственный Университет,
Белгород, 308015, Россия; Воронеж, 394018, Россия

E-mail: mathsms@yandex.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. Предлагаемая рецензия написана на книгу V. V. Kravchenko «Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems», в которой представлен авторский подход к эффективному решению прямых и обратные задач Штурма – Лиувилля на конечных и бесконечных интервалах. Метод, предложенный в рецензируемой монографии, основан на глубоких математических результатах и, особенно, на понятии операторов преобразования. Кроме того, рецензия содержит краткий очерк развития теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля и подробную библиографию по теме.

Ключевые слова: прямая задача Штурма – Лиувилля, обратная задача Штурма – Лиувилля, оператор преобразования, уравнения Марченко – Гельфанда – Левитана.

Для цитирования: Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2021. Рецензия на монографию: V. V. Kravchenko Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. Springer, 2020, на англ. языке. (С кратким очерком развития теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля). Прикладная математика & Физика. 53(1): 73–84.
DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-73-84.

REVIEW OF THE MONOGRAPH: V. V. KRAVCHENKO DIRECT AND INVERSE STURM – LIOUVILLE PROBLEMS. SPRINGER, 2020, IN ENGLISH. LANGUAGE. (WITH A BRIEF OUTLINE OF THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF INVERSE PROBLEMS FOR THE STURM – LIOUVILLE EQUATION)

S. Sitnik, E. Shishkina

Belgorod State National Research University («BelGU»); Voronezh State University,
Belgorod, 308015, Russia; Voronezh, 394018, Russia
E-mail: mathsms@yandex.ru, ilina_dico@mail.ru
Received March, 01, 2021

Abstract. The proposed review is written on the book by V. V. Kravchenko «Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems», in which the author's approach to the effective solution of direct and inverse Sturm – Liouville problems on finite and infinite intervals is presented. The method proposed in the monograph under review is based on deep mathematical results and especially on the concept of transmutation operators. More, the review contains a short survey of results in inverse problems for Sturm – Liouville equation and extensive reference list.

Key words: direct Sturm – Liouville problem, inverse Sturm – Liouville problem, transmutations, Gelfand – Levitan – Marchenko equation.

For citation: Sergei S. M, Shishkina E. L. 2021. Review of the monograph: V. V. Kravchenko Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. Springer, 2020, in English language.
(With a brief outline of the development of the theory of inverse problems for the Sturm – Liouville equation). Applied Mathematics & Physics. 53(1): 73–84 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-73-84 .

Рецензируемая монография издана на английском языке под названием «Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems», точные библиографические данные издания см. в [67]. Её автором является В. В. Кравченко (Центр исследований и послевузовского обучения Национального политехнического института (Cinvestav), Керетаро, Мексика), известный специалист в таких областях математики, как дифференциальные уравнения, обратные задачи, операторы преобразования, гиперкомплексный анализ, обобщённые аналитические функции, аналитические и численные методы математической физики.

В рецензии мы постарались отразить не только содержание монографии, но также кратко указать на основные этапы развития теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. Так как монография основана на многочисленных работах В. В. Кравченко, его учеников и соавторов, то также даётся по необходимости краткий обзор этих работ с указанием ссылок на них.

Начиная с пионерских работ Д. Бернулли, Ж. Д'Аламбера, Л. Эйлера, Ж. Фурье и затем С. Пуассона, Ж. Штурма и Ж. Лиувилля, теория уравнения Штурма – Лиувилля и различных задач для него стала неотъемлемой частью как подготовки и обучения профессиональных математиков, так и важной активно развивающейся областью теоретических исследований. Теории Штурма – Лиувилля посвящены многие известные монографии и обзорные статьи, в которых рассматриваются как общие вопросы, см., например, [15, 16, 17, 18, 19, 29, 36, 38, 61, 80, 81, 89], так и более специальные задачи, см., например, [20, 27, 39, 66].

После работ В. А. Амбарцумяна [37] и Г. Борга [42] начала быстро развиваться теория обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. Она заняла важное место в общей спектральной теории и получила многочисленные численные приложения в математике, механике, физике, инженерных и других прикладных задачах. Тематике обратных задач для операторов Штурма – Лиувилля посвящены монографии [2, 5, 6, 11, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 33, 34, 41, 49, 57, 82, 83, 87] и целый ряд других. Теория обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля стала изящной частью современного здания математики, важной для не только теоретических, но и практических приложений.

Новый всплеск в развитии теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля в середине прошлого века был связан с их неожиданными применениями в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Эта процедура вошла составной частью в метод обратной задачи для решения основных нелинейных уравнений, первоначально разработанный К. С. Гарднером, Дж. М. Грином, М. Д. Крускалом и Р. М. Миурой. Техника этого метода основана на использовании двух основных идей, а именно, представления Лакса и затем решения обратной задачи для уравнения Штурма – Лиувилля. В том числе с использованием указанного метода были найдены солитоны, то есть решения в виде уединённых волн, для основных классов нелинейных уравнений: Кортевега–Де Фриза, нелинейного уравнения Шрёдингера, уравнения синус–Гордона и других, см. [1, 10].

Теория прямых и обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля в настоящий момент достаточно хорошо развита, тем не менее ощущается недостаток практических методов для решения конкретных задач, что очевидно из содержания стандартных книг по дифференциальным уравнениям и математической физике. Например, хотя основные свойства собственных значений и собственных функций для общего уравнения Штурма – Лиувилля с переменным коэффициентом давно сформулированы и доказаны, практическое численное решение демонстрируется как правило только для постоянных или экспоненциальных коэффициентов. И пока не предложен общепринятый эффективный метод решения подобных задач для общих переменных коэффициентов, кроме чисто вычислительного способа с применением конечных разностей. Отметим, что некоторые специальные аспекты численного решения задач для уравнения Штурма – Лиувилля рассмотрены в [3, 60, 84].

Целью рецензируемой книги как раз и является представить практический метод для решения прямых и обратных задач Штурма – Лиувилля. Как читатель сможет увидеть из книги, центральным понятием, на использовании которого базируется изложение и вводятся новые конструкции, является понятие оператора преобразования. Для линейных дифференциальных уравнений операторы преобразования впервые появились в работах Ж. Дельсарта [52, 53], а затем их теория была развита в значительном числе работ, из которых упомянем [15, 16, 17, 18, 19, 32, 40, 44, 45, 46, 47, 73, 88], в том числе обзор [85] и монографии [12, 24, 86], содержащие подробные библиографические ссылки.

Грубо говоря, операторы преобразования, рассматриваемые в рецензируемой книге, позволяют связывать относительно явными формулами решения уравнений Штурма – Лиувилля с переменными коэффициентами с решениями элементарного уравнения

$$y'' + \lambda y = 0$$

с постоянной величиной λ. Существование соответствующих операторов преобразования ведёт к полному решению уравнения Штурма – Лиувилля. Из работы А. Я. Повзнера [21] известно, что на полуоси нужные операторы преобразования реализуются в виде интегральных операторов Вольтерра второго рода, причём их ядра не зависят от спектрального параметра уравнения Штурма – Лиувилля. Простой факт существования оператора преобразования такого удобного вида уже позволяет математикам разрабатывать методы решения прямых и обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. По-видимому, В.А. Марченко первым систематически применял методы теории операторов преобразования как универсальный важнейший инструмент в теории прямых и обратных спектральных задач, см. [17, 18, 19].

Далее, в фундаментальной работе [7] И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана было открыто ключевое уравнение для решения обратных задач Штурма – Лиувилля, получившее название «уравнение Гельфанда – Левитана» , при этом важнейшую роль играет ядро соответствующего оператора преобразования.

Было показано, что это ядро удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода (это и есть уравнение Гельфанда – Левитана), которое может быть построено по спектральным данным обратной задачи. После того, как ядро оператора преобразования находится из уравнения Гельфанда – Левитана, его производная на диагонали восстанавливает потенциал исходного уравнения Штурма – Лиувилля. Этот факт ещё раз подчёркивает фундаментальную роль операторов преобразования для всего рассматриваемого класса задач. Аналогичное решение получила и обратная задача квантовой теории рассеяния, для основных интегральных уравнений всего этого класса задач сейчас часто используется общее название – уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко. Для несколько более общего дифференциального уравнения с оператором Бесселя обратная задача была решена в работе В. В. Сташевской [28], при этом были установлены глубокие связи операторов преобразования с теоремами Пэли-Винера, этот круг идей разрабатывался далее для ещё более общих дифференциальных операторов, см., например, [25, 26, 88]. Отметим, что класс обратных задач, связанных с операторами Бесселя, в данной монографии не рассматривается.

Но на этом история решения обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля не закончилась. Одной из причин явились многочисленные трудности при численном решении уравнения Гельфанда – Левитана, часть из них описана в [79]. При этом уже достаточно давно делались попытки найти такие методы решения обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля, которые обходят необходимость использования уравнений Гельфанда – Левитана из-за численной неэффективности их решения. В этом направлении отметим работы А. Н. Тихонова в приложении к прикладным задачам электроразведки [30, 31], а также подробное изложение этих работ, их мотивации и приложений в [4].

Так как волшебные возможности операторов преобразования используются в многочисленных задачах, предлагались различные методы для аппроксимации их интегральных ядер. Естественный подход с использованием метода последовательных приближений разрабатывался, например, в [40, 51]. В работе [43] изучалось разложение ядра в ряд Фурье, при этом была получена система уравнений для коэффициентов. Полезные разложения ядер операторов преобразования в различные ряды получены также в работах [50, 56]. В [74, 75] ядра интегральных операторов преобразования аппроксимировались так называемыми преобразованными волновыми полиномами (transmuted wave polynomials), см. также [63, 64]. Более полный и удовлетворительный результат был получен в работе [72], в которой построено явное разложение ядра интегрального оператора преобразования в ряды Фурье – Лежандра вместе с простой рекуррентной процедурой для нахождения коэффициентов этих рядов. Подстановка указанных рядов в уравнение Штурма – Лиувилля приводит к новым представлениям решений в виде рядов Неймана по функциям Бесселя. Более того, так как последние представления получены с использованием операторов преобразования, они подчиняются специальным равномерным оценкам. А именно, остатки указанных рядов допускают оценки, не зависящие от действительной части квадратного корня из спектрального параметра. Точнее, если $\rho := \sqrt{\lambda}$ и λ есть спектральный параметр в уравнении Штурма – Лиувилля, оценка остатка рядов Неймана для решений не зависит от $\operatorname{Re}\rho$. Например, предположим, что решается регулярная прямая задача для уравнения Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \tag{1}$$

Тогда может существовать как конечное число отрицательных собственных значений, так и бесконечная последовательность положительных собственных значений, стремящаяся к бесконечности. Как показано в монографии В. В. Кравченко на примерах, оценки, упомянутые выше, позволяют вычислить большие массивы спектральных данных (собственных значений и собственных функций) с равномерной точностью и за очень малое время.

Это направление по получению явных разложений в форме функциональных рядов для ядер интегральных операторов преобразования было продолжено в работах автора рецензируемой монографии В.В. Кравченко с его учениками и соавторами. Так, в [76] подобные результаты были получены для общего уравнения Штурма – Лиувилля, в [72] для уравнения (1), а в [13, 77] для возмущённого уравнения с оператором Бесселя. В [48, 65, 68] результаты из [72] были применены для решения некоторых интересных задач, при этом было использовано наблюдение, что указанные выше представления в форме рядов Неймана позволяют вычислять образы функций $e^{\pm in\rho x}$, $n = 0, 1, \dots$ при действии на них операторов преобразования. Возможность получать представления в виде других функциональных рядов для ядер интегральных операторов преобразования ведёт к дальнейшим результатам также для решений уравнения (1), см. [78, 69].

В то время как прямые задачи Штурма – Лиувилля могут быть эффективно решены с помощью введённых в монографии разложений типа Неймана, остаётся вопрос, как применять представления решений рядами Фурье – Лежандра для обратных задач. Метод с использованием уравнения Гельфанда – Левитана был предложен в [70]. Подстановка рядов Фурье – Лежандра для ядер операторов преобразования в уравнение Гельфанда – Левитана приводит к бесконечной линейной системе алгебраических уравнений для коэффициентов ряда, и решающее наблюдение заключается в том, что для полного решения обратной задачи оказывается достаточным вычислить лишь первый коэффициент этого ряда! Этого достаточно для восстановления потенциала $q(x)$ в уравнении (1), а также постоянных в граничных условиях задачи Штурма – Лиувилля. В отличие от существующих численных методов для решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на конечном интервале метод, предложенный в [70], не является итерационным. Он сводит задачу напрямую к решению линейной системы алгебраических уравнений, из которой на самом деле необходимо найти только первую компоненту вектора решений. Это означает, что решение урезанной системы с небольшим конечным числом уравнений ведёт к удовлетворительному решению обратной задачи.

Тот же подход, развитый в рецензируемой монографии, успешно работает в применении к обратным задачам Штурма – Лиувилля на полуоси [54] и к обратным задачам рассеяния на полуоси [62]. Эти две задачи могут быть сведены к соответствующим уравнениям Гельфанда – Левитана для ядер интегральных операторов преобразования с граничными условиями в начале координат, но с различными входными данными, содержащими спектральные данные или данные рассеяния. При этом обратная задача рассеяния на всей прямой требует дополнительных идей, потому что для её решения требуется интегральное ядро $A(x, t)$ оператора преобразования с условиями на бесконечности. Подобный подход был разработан в [71], где основная идея также связана с использованием того свойства, что для восстановления потенциала достаточно только первого коэффициента соответствующих функциональных рядов. В этом случае показано, что ядро $A(x, t)$ допускает разложение в некоторые ряды Фурье – Лагерра, и найдена прямолинейная процедура для восстановления потенциала по первому коэффициенту ряда. Таким образом, и в случае обратной задачи рассеяния на всей оси в монографии В. В. Кравченко разработан прямой и простой метод её решения. Добавим, что интересный подход к решению обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля на всей оси разработали А. П. Солдатов и Н. А. Жура в [8, 9, 90]. Результаты В. А. Амбарцумяна по обратной задаче для одномерного уравнения Штурма – Лиувилля были переесены на двумерный и трёхмерный случаи в работе Н. В. Кузнецова [14].

В последующей публикации [55] была найдена процедура последовательного интегрирования для вычисления коэффициентов рядов Фурье – Лагерра для ядра оператора преобразования. Это приводит к новым представлениям в виде рядов для так называемых решений Йоста. Эти представления позволяют, например, свести прямую задачу Штурма – Лиувилля на полуоси к вычислению достаточно простых выражений по существу в форме степенных рядов, определённых на единичной окружности и одном из диаметров соответствующего единичного круга. Известно, что задачи Штурма – Лиувилля на полуоси с короткодействующими потенциалами являются сложными для численного решения. Возникающие сложности описаны, например, в последней главе книги [84] и в статьях [58, 59]. Упомянем работу [35] в которой предложен метод для вычисления функций Йоста. Представление Йоста было получено в [55], оно представлено в главе 10 рецензируемой монографии. Решение этой задачи изложенными методами упрощено до такой степени, что позволяет за секунду вывести график производной спектральной функции с высокой точностью и на произвольно большом интервале по λ. Более того, написание соответствующей компьютерной программы самостоятельно не сложнее домашнего задания для обычного студента-бакалавра.

Итак, в рецензируемой монографии используется основной подход, связанный с применением различных классов операторов преобразования. Это позволяет получать аналитические представления для решений уравнений Штурма – Лиувилля и эффективно решать прямые и обратные задачи для этого уравнения на конечных или бесконечных интервалах.

Кратко опишем структуру книги. В ней четыре части. В первой части даются необходимые определения и приводятся стандартные результаты для различных типов прямых и обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. Во второй части выводятся представления в виде функциональных рядов для ядер интегральных операторов преобразования и на их основе находятся решения уравнений Штурма – Лиувилля. Здесь же собраны необходимые факты об операторах преобразования. Рассматриваются представления ядер через ряды Фурье–Лежандра и Фурье – Лагерра, в том числе для решений Йоста. Третья часть посвящена решению прямых задач для уравнений Штурма – Лиувилля, сначала на конечном, а затем на бесконечных интервалах. В заключительной четвёртой части представлен единый подход к решению обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля: обратная задача на конечном интервале, обратная задача на полуоси, обратная задача квантовой теории рассеяния на полуоси и обратная задача квантовой теории рассеяния на оси. Изложение всего материала сопровождается численными примерами и иллюстрациями.

Считаем, что монография V. V. Kravchenko «Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems» является ценным и своевременным дополнением к существующей литературе по обратным задачам. Монография написана профессионально, изложение простое и понятное, с указанием необходимых сведений для понимания материала читателями. Книга будет полезной как для профессиональных математиков и физиков, работающих по тематике дифференциальных уравнений, математической физики, квантовой теории, наноструктур и нанотехнологий, так и для изучающих эти разделы студентов и аспирантов.

Список литературы

1. Абловиц М., Сигур Х. 1987. Солитоны и метод обратной задачи. М., Мир, 479.
2. Агранович З. С., Марченко В. А. 1960. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, изд. ХГУ, 268.
3. Алгазин С. Д. 2007. Численные алгоритмы классической матфизики. XVIII. Вычисление далёких собственных значений в задаче Штурма – Лиувилля. Препринт. Институт проблем механики РАН, 839, 15.
4. Алимов Ш. А. 1976. О работах А. Н. Тихонова по обратным задачам Штурма–Лиувилля. УМН. 31(6(192)): 84–88.
5. Ватульян А. О. 2007. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М., Физматлит, 223.
6. Ватульян А. О. 2019. Коэффициентные обратные задачи механики. М., Физматлит, 271.
7. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. 1951. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР. Сер. матем., 15(4): 309–360.
8. Жура Н. А., Солдатов А. П. 2015. О представлении решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси. Дифференциальные уравнения. 51(8): 1027–1037.
9. Жура Н. А., Солдатов А. П. 2013. К решению обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси. ДАН России. 453(4): 368–372.
10. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. 1980. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., Наука, 320.
11. Кабанихиин С. И. 2009. Обратные и некорректные задачи, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 512.
12. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 64(2): 211–426.
13. Кравченко В. В., Шишкина Э. Л., Торба С. М. 2018. О представлении в виде ряда интегральных ядер операторов преобразования для возмущенных уравнений Бесселя. Матем. заметки, 104(4): 552–570.
14. Кузнецов Н. В. 1962. Обобщение одной теоремы В. А. Амбарцумяна. Докл. АН СССР, 146(6): 1259–1262.
15. Левитан Б. М. 1984. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. Наука, 240.
16. Левитан Б. М., Саргсян И. С. 1988. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М. Наука, 432.
17. Марченко В. А. 1972. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев, Наукова Думка, 220.
18. Марченко В. А. 1977. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 331.
19. Марченко В. А. 1950. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. М., Докл. АН СССР. 72(3): 457–460.
20. Отелбаев М. О. 1990. Оценки спектра оператора Штурма – Лиувилля. Алма-Ата: Гылым, 191.
21. Повзнер А. Я. 1948. О дифференциальных уравнениях типа Штурма – Лиувилля на полуоси. Матем. сборник. 23(65(1)): 3–52.
22. Рамм А. Г. 1994. Многомерные обратные задачи рассеяния. Пер. с англ. М. В. Зеленцовой; Под ред. В. Г. Романова. М., Мир, 495.
23. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. 2009. Обратные задачи Штурма––Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М., Изд-во Моск. ун-та, 184.
24. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.

25. Сохин А. С. 1971. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностью. Тр. физ.–тех. ин-та низких температурур АН УССР. 2: 182–233.

26. Сохин А. С. 1973. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностями специального вида. Харьков, Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 17: 36–64.

27. Старинец В. В. 2010. Сингулярные операторы Штурма – Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой, части 1-2. М., МГУП, 2010, 504.

28. Сташевская В. В. 1957. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле. Харьков, Уч. зап. Харьковского матем. об-ва. 5: 49–86.

29. Титчмарш Э. Ч. 1960, 1961. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., ИЛ, 278. Т.2. М., ИЛ, 555.

30. Тихонов А. Н. 1949. О единственности решения задачи электроразведки. ДАН, 69(6): 797–800.

31. Тихонов А. Н. 1965. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. ЖВМ и МФ, 5(3): 545–547.

32. Фаге Д. К., Нагнибида Н. И. 1977. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов. Новосибирск, Наука, 280.

33. Шадан К., Сабатье П. 1980. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., Мир, 408.

34. Юрко В. А. 2007. Введение в теорию обратных спектральных задач. М., Наука, 384.

35. Aliev A. R., Gasymova S. G., Gasymova D. G., Ahmadzadeh N. D. 2013. Approximate construction of the Jost function by the collocation method for Sturm – Liouville boundary value problem. Azerbaijan Journal of Mathematics, 3(2): 45–61.

36. Al-Gwaiz M. A. 2008. Sturm – Liouville Theory and its Applications. Springer, 264.

37. Ambartsumyan V. A. 1929. Über eine frage der eigenwerttheorie. Z. Phys., 53: 690–695.

38. Amrein W. O. et al (Editors), 2005. Sturm – Liouville Theory, Past and Present. Birkhäuser Verlag, 336.

39. Atkinson F. V., Mingarelli A. B. 2011. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm – Liouville Theory. CRC, 301.

40. Begehr H., Gilbert R. 1992. Transformations, transmutations and kernel functions. vol. 1–2. Longman Scientific & Technical, Harlow, 416.

41. Behrndt J., de Snoo H., Hassi S. 2020. Boundary value problems, Weyl functions, and differential operators. Birkhäuser, Basel, 772.

42. Borg G. 1946. Eine Umkehrung der Sturm – Liouville Eigenwertaufgabe. *Acta Math.*, 76: 1–96.

43. Boumenir A. 2006. The approximation of the transmutation kernel. J. Math. Phys., 013505.

44. Carroll R. W., Showalter R. E. 1976. Singular and Degenerate Cauchy problems. N.Y., Academic Press, 333.

45. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. Mathematics Studies, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.

46. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. Mathematics Studies, v. 69, North Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 456.

47. Carroll R. W. 1985. Transmutation theory and applications. Mathematics Studies, v. 117, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 101.

48. Castillo-Pérez R., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2019. A method for computation of scattering amplitudes and Green functions of whole axis problems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42(15): 5106–5117.

49. Chadan K., Cotton D., Paivarinta L., Rundell W. 1997. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems. SIAM, 198.

50. Chebli H., Fitouhi A., Hamza M. M., 1994. Expansion in series of Bessel functions and transmutations for perturbed Bessel operators. J. Math. Anal. Appl., 181(3), 789–802.

51. Colton D. L. 1976. Solution of boundary value problems by the method of integral operators. Pitman Publ., London, 148.

52. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. J Math. Pures et Appl., 17: 213–230.

53. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sc., 206: 178–182.

54. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 42(18): 7359–7366.

55. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A representation for Jost solutions and an efficient method for solving the spectral problem on the half line. Mathematical Methods in the Applied Sciences, Published Online https://doi.org/10.1002/mma.5881.

56. Fitouhi A., Hamza M. M. 1990. A uniform expansion for the eigenfunction of a singular second-order differential operator. SIAM J. Math. Anal., 21(6): 1619–1632.

57. Freiling G., Yurko V. 2001. Inverse Sturm – Liouville problems and their applications. Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY, 305.

58. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2005. Computing the spectral function for singular Sturm – Liouville problem. Journal of Computational and Applied Mathematics, 176: 131–162.

59. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2008. Efficient calculation of spectral density functions for specific classes of singular Sturm – Liouville problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 212: 150–178.

60. Guenther R. B., Lee J. W. 2019. Sturm – Liouville Problems. Theory and Numerical Implementation. CRC Press, 420.

61. Johnson R. S. 2012. Second-order ordinary differential equations, Special functions, Sturm – Liouville theory and transforms. Ventus Publishing, 181.

62. Karapetyants A. N., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. Journal of Physics: Conference Series. 1540(1): 012007 1–8.

63. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2016. Modulated electromagnetic fields in inhomogeneous media, hyperbolic pseudoanalytic functions and transmutations. Journal of Mathematical Physics, 57: 051503.

64. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Tremblay S. 2013. Wave polynomials, transmutations and Cauchy's problem for the Klein-Gordon equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 399: 191–212.

65. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2020. Time-dependent one-dimensional electromagnetic wave propagation in inhomogeneous media: exact solution in terms of transmutations and Neumann series of Bessel functions. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41(5): 785–796.

66. Kozlov V., Maźya V. 1997. Theory of a higher order Sturm – Liouville equation. Springer, (Lecture notes in mathematics; 1659), 140.

67. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. A Method of Solution. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.

68. Kravchenko I. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Dias J. C. 2018. Generalized exponential basis for efficient solving of homogeneous diffusion free boundary problems: Russian option pricing. arXiv:1808.08290.

69. Kravchenko V. V. 2018. Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions. Applied Mathematics and Computation, 328: 75–81.

70. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 27: 401–407.

71. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. Math Meth Appl Sci., 42: 1321–1327.

72. Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M. 2017. Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. Applied Mathematics and Computation, 314(1): 173–192.

73. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (eds.) 2020. Transmutation operators and applications. Trends in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 686

74. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions. Complex Anal. Oper. Theory, 9: 389–429.

75. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems. J. Comput. Appl. Math. 275: 1–26.

76. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm – Liouville equations. Calcolo, 55: 11.

77. Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Pérez R. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations. Applicable Analysis, 97(5): 677–704.

78. Kravchenko V. V., Torba S. M., Khmelnytskaya K. V. 2017. Transmutation operators: construction and applications. *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE-2017*, Cadiz, Andalucia, España, Julio 4-8 1198–1206.

79. Lowe B. D., Pilant M., Rundell W. 1992. The recovery of potentials from finite spectral data. SIAM J. Math. Anal., 23(2): 482–504.

80. Lützen J. 1984. Sturm and Liouville's work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm – Liouville theory. Archive for History of Exact Sciences, 29(4): 309–376.

81. Masjed-Jamei M. 2020. Special Functions and Generalized Sturm – Liouville Problems. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham, 313.

82. Pike S., Sabatier P. 2002. Scattering. Scattering and inverse scattering in pure and applied science. Vol. 1-2. Academic Press, San Diego, 1831.

83. Poschel J., Trubowitz E. 1987. Inverse spectral theory. Academic Press, London, 192.

84. Pryce J. D. 1993. Numerical solution of Sturm – Liouville problems, Clarendon Press, Oxford, 322.

85. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, http://arxiv.org/abs/1012.3741, 141.

86. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020 Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.

87. Teschl G. 2009. Mathematical methods in quantum mechanics with applications to Schrödinger operators. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Providence, 99, 356.

88. Trimeche K. 1988. Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators. Harwood Academic Publishers, London, 282.

89. Zettl A. 2005. Sturm – Liouville theory. American Mathematical Society, Providence, 328.

90. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2013. To inverse scattering problem of Gelfand, Levitan, Marchenko. AIP Conf. Proc. 1570, 298.

References

1. Ablovits M., Sigur X. 1984. Solitons: Inverse Problem Method. New York, Plenum, 479.

2. Agranovich Z. S., Marchenko V. A. 1960. Inverse problem of scattering theory. Kharkov, ed. KSU, 268.

3. Algazin S. D. 2007. Numerical algorithms of classical matphysics. XVIII. Calculation of distant eigenvalues in the Sturm – Liouville problem. Preprint. Institute for Problems in Mechanics RAS, 839, 15.

4. Alimov Sh. A. 1976. On the works of A.N. Tikhonov on inverse Sturm — Liouville problems. UMN. 31(6(192)): 84–88.

5. Vatulyan A. O. 2007. Inverse problems in the mechanics of a deformable solid. M., Fizmatlit, 223.

6. Vatulyan A. O. 2019. Coefficient inverse problems of mechanics. M., Fizmatlit, 271.
7. Gel'fand I. M., Levitan B. M. 1951. On the determination of a differential equation by its spectral function. Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. mat., 15(4): 309–360.
8. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2015. On the representation of the solution of the inverse Sturm – Liouville problem on the entire axis. Differential Equations. 51(8): 1027–1037.
9. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2013. On the solution of the inverse Sturm – Liouville problem on the entire axis. DAN of Russia. 453(4): 368–372.
10. Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevsky L. P. 1980. Theory of solitons: method of the inverse problem. M., Science, 320.
11. Kabanikhin S. I. 2009. Inverse and Ill-Posed Problems, Siberian Scientific Publishing House, Novosibirsk, 512.
12. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. Method of transformation operators and boundary value problems for singular elliptic equations. Contemporary mathematics. Fundamental directions, 64(2): 211–426.
13. Kravchenko V. V., Shishkina E. L., Torba S. M. 2018. On a Series Representation for Integral Kernels of Transmutation Operators for Perturbed Bessel Equations. Math. Notes, 104(4): 530–544.
14. Kuznetsov N. V. 1962. A generalization of a theorem stated by V. A. Ambartsumyan. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 146(6): 1259–1262.
15. Levitan B. M. 1984. Inverse Sturm – Liouville problems. M. Science, 240.
16. Levitan B. M., Sargsyan I. S. 1988. Sturm operators – Liouville and Dirac. M. Science, 432.
17. Marchenko V. A. 1972. Spectral theory of Sturm – Liouville operators. Kiev, Naukova Dumka, 220.
18. Marchenko V. A. 1977. Sturm – Liouville operators and their applications. Kiev, Naukova Dumka, 331.
19. Marchenko V. A. 1950. Some questions of the theory of the second order differential operator. M., Dokl. Academy of Sciences of the USSR. 72(3): 457–460.
20. Otelbaev M. O. 1990. Estimates of the spectrum of the Sturm – Liouville operator. Alma-Ata: Gylym, 191.
21. Povzner A. Ya. 1948. Differential equations of Sturm – Liouville type on the semiaxis. Mat. collection. 23(65(1)): 3–52.
22. Ramm A. G. 1992 Multidimensional inverse scattering problems. Longman, New York, 495.
23. Sadovnichy V. A., Sultanaev Ya. T., Akhtyamov A. M. 2009. Inverse Sturm – Liouville problems with non-decaying boundary conditions. M., Publishing house of Moscow. un-ta, 184.
24. Sitnik, S. M., Shishkina, E. L., 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow.. Fizmathlit, 224.
25. Sokhin A. S. 1971. Inverse scattering problems for equations with a singularity. Tr. physical inst. of low temperature of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. 2: 182–233.
26. Sokhin A. S. 1973. Inverse scattering problems for equations with singularities of a special form. Kharkov, Theory of functions, functional analysis and their applications. 17: 36–64.
27. Starinets V. V. 2010. Singular Sturm – Liouville operators in spaces with indefinite metric, parts 1-2. M., MGUP, 2010, 504.
28. Stashevskaya V. V. 1957. On the inverse problem of spectral analysis for a differential operator with a singularity at zero. Kharkov, Uch. app. Kharkiv Mat. soc. 5: 49–86.
29. Titchmarsh E. Ch. 1960, 1961. Expansions in eigenfunctions associated with second-order differential equations. V. 1. M., IL, 278. V.2. M., IL, 555.
30. Tikhonov A. N, 1949. On the uniqueness of the solution to the electrical prospecting problem. DAN, 69(6): 797–800.
31. Tikhonov A. N. 1965. On the Mathematical Substantiation of the Theory of Electromagnetic Soundings. ZhVM and MF, 5(3): 545–547.

32. Fage D. K., Nagnibida N. I. 1977. The problem of equivalence of ordinary differential operators. Novosibirsk, Science, 280.

33. Shadan K., Sabatier P. 1980. Inverse problems in quantum scattering theory. M., Mir, 408.

34. Yurko V. A. 2007. Introduction to the theory of inverse spectral problems. M., Science, 384.

35. Aliev A. R., Gasymova S. G., Gasymova D. G., Ahmadzadeh N. D. 2013. Approximate construction of the Jost function by the collocation method for Sturm – Liouville boundary value problem. Azerbaijan Journal of Mathematics, 3(2): 45–61.

36. Al-Gwaiz M.A. 2008. Sturm – Liouville Theory and its Applications. Springer, 264.

37. Ambartsumyan V. A. 1929. Über eine frage der eigenwerttheorie. Z. Phys., 53: 690–695.

38. Amrein W. O. et al (Editors), 2005. Sturm – Liouville Theory, Past and Present. Birkhäuser Verlag, 336.

39. Atkinson F. V., Mingarelli A. B. 2011. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm – Liouville Theory. CRC, 301.

40. Begehr H., Gilbert R. 1992. Transformations, transmutations and kernel functions. vol. 1–2. Longman Scientific & Technical, Harlow, 416.

41. Behrndt J., de Snoo H., Hassi S. 2020. Boundary value problems, Weyl functions, and differential operators. Birkhäuser, Basel, 772.

42. Borg G. 1946. Eine Umkehrung der Sturm – Liouville Eigenwertaufgabe. *Acta Math.*, 76: 1–96.

43. Boumenir A. 2006. The approximation of the transmutation kernel. J. Math. Phys., 013505.

44. Carroll R. W., Showalter R. E. 1976. Singular and Degenerate Cauchy problems. N.Y., Academic Press, 333.

45. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. Mathematics Studies, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.

46. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. Mathematics Studies, v. 69, North Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 456.

47. Carroll R. W. 1985. Transmutation theory and applications. Mathematics Studies, v. 117, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 101.

48. Castillo-Pérez R., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2019. A method for computation of scattering amplitudes and Green functions of whole axis problems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42(15): 5106–5117.

49. Chadan K., Cotton D., Paivarinta L., Rundell W. 1997. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems. SIAM, 198.

50. Chebli H., Fitouhi A., Hamza M. M., 1994. Expansion in series of Bessel functions and transmutations for perturbed Bessel operators. J. Math. Anal. Appl., 181(3), 789–802.

51. Colton D. L. 1976. Solution of boundary value problems by the method of integral operators. Pitman Publ., London, 148.

52. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. J Math. Pures et Appl., 17: 213–230.

53. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sc., 206: 178–182.

54. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 42(18): 7359–7366.

55. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A representation for Jost solutions and an efficient method for solving the spectral problem on the half line. Mathematical Methods in the Applied Sciences, Published Online https://doi.org/10.1002/mma.5881.

56. Fitouhi A., Hamza M. M. 1990. A uniform expansion for the eigenfunction of a singular second-order differential operator. SIAM J. Math. Anal., 21(6): 1619–1632.

57. Freiling G., Yurko V. 2001. Inverse Sturm – Liouville problems and their applications. Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY, 305.

58. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2005. Computing the spectral function for singular Sturm – Liouville problem. Journal of Computational and Applied Mathematics, 176: 131–162.

59. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2008. Efficient calculation of spectral density functions for specific classes of singular Sturm – Liouville problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 212: 150–178.

60. Guenther R. B., Lee J. W. 2019. Sturm – Liouville Problems. Theory and Numerical Implementation. CRC Press, 420.

61. Johnson R. S. 2012. Second-order ordinary differential equations, Special functions, Sturm – Liouville theory and transforms. Ventus Publishing, 181.

62. Karapetyants A.N., Khmelnytskaya K.V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. Journal of Physics: Conference Series. 1540(1): 012007 1–8.

63. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2016. Modulated electromagnetic fields in inhomogeneous media, hyperbolic pseudoanalytic functions and transmutations. Journal of Mathematical Physics, 57: 051503.

64. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Tremblay S. 2013. Wave polynomials, transmutations and Cauchy's problem for the Klein-Gordon equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 399: 191–212.

65. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2020. Time-dependent one-dimensional electromagnetic wave propagation in inhomogeneous media: exact solution in terms of transmutations and Neumann series of Bessel functions. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41(5): 785–796.

66. Kozlov V., Maźya V. 1997. Theory of a higher order Sturm – Liouville equation. Springer, (Lecture notes in mathematics; 1659), 140.

67. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. A Method of Solution. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.

68. Kravchenko I. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Dias J. C. 2018. Generalized exponential basis for efficient solving of homogeneous diffusion free boundary problems: Russian option pricing. arXiv:1808.08290.

69. Kravchenko V. V. 2018. Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions. Applied Mathematics and Computation, 328: 75–81.

70. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 27: 401–407.

71. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. Math Meth Appl Sci., 42: 1321–1327.

72. Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M. 2017. Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. Applied Mathematics and Computation, 314(1): 173–192.

73. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (eds.) 2020. Transmutation operators and applications. Trends in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 686

74. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions. Complex Anal. Oper. Theory, 9: 389–429.

75. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems. J. Comput. Appl. Math. 275: 1–26.

76. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm – Liouville equations. Calcolo, 55: 11.

77. Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Pérez R. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations. Applicable Analysis, 97(5): 677–704.

78. Kravchenko V. V., Torba S. M., Khmelnytskaya K. V. 2017. Transmutation operators: construction and applications. *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE-2017*, Cadiz, Andalucia, España, Julio 4-8 1198–1206.

79. Lowe B. D., Pilant M., Rundell W. 1992. The recovery of potentials from finite spectral data. SIAM J. Math. Anal., 23(2): 482–504.

80. Lützen J. 1984. Sturm and Liouville's work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm – Liouville theory. Archive for History of Exact Sciences, 29(4): 309–376.

81. Masjed–Jamei M. 2020. Special Functions and Generalized Sturm – Liouville Problems. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham, 313.

82. Pike S., Sabatier P. 2002. Scattering. Scattering and inverse scattering in pure and applied science. Vol. 1-2. Academic Press, San Diego, 1831.

83. Poschel J., Trubowitz E. 1987. Inverse spectral theory. Academic Press, London, 192.

84. Pryce J. D. 1993. Numerical solution of Sturm – Liouville problems, Clarendon Press, Oxford, 322.

85. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, http://arxiv.org/abs/1012.3741, 141.

86. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020 Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.

87. Teschl G. 2009. Mathematical methods in quantum mechanics with applications to Schrödinger operators. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Providence, 99, 356 .

88. Trimeche K. 1988. Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators. Harwood Academic Publishers, London, 282.

89. Zettl A. 2005. Sturm – Liouville theory. American Mathematical Society, Providence, 328.

90. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2013. To inverse scattering problem of Gelfand, Levitan, Marchenko. AIP Conf. Proc. 1570, 298.

Получена 01.03.2021

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»)

http://orcid.org/0000-0001-9661-4338
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия
E-mail: mathsms@yandex.ru

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского Государственного Университета

http://orcid.org/0000-0003-4083-1207
Университетская пл., д.1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: ilina_dico@mail.ru