

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА – КАПУТО

О. Х. Масаева

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком)

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик, 360000, Россия

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Аннотация. Исследована задача Дирихле для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с дробной производной по временной переменной в прямоугольной области. В случае если порядок дробного дифференцирования равен двум, рассматриваемое уравнение обращается в уравнение Лаврентьева – Бицадзе. Рассмотрены вопросы доказательства существования и единственности регулярного решения.

Ключевые слова: функция типа Mittag – Леффлера, дробная производная Герасимова – Капуто, уравнение Лаврентьева – Бицадзе, критерий единственности решения.

Для цитирования: Масаева О. Х., 2020. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева – Бицадзе с дробной производной Герасимова – Капуто. Прикладная математика & Физика. 52(4): 246–254.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-246-254.

DIRICHLET PROBLEM FOR THE GENERALIZED LAVRENT'EV-BITSADZE EQUATION
WITH THE GERASIMOV-CAPUTO DERIVATIVE

O. Kh. Masaeva

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak)

Institute for Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of RAS,
Nalchik, 360000, Russia

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru,

Received November 23, 2020

Abstract. Dirichlet problem for a second-order linear differential equation with a fractional derivative in a rectangular domain is investigated. If the order of fractional differentiation is equal to two, the considered equation turns into the Lavrent'ev-Bitsadze equation. The questions of a proof of an existence and uniqueness of a regular solution are considered.

Key words: Mittag-Leffler type function, Gerasimov-Caputo fractional derivative, Lavrent'ev-Bitsadze equation, solution uniqueness criterion

For citation: O. Kh. Masaeva. 2020. Dirichlet Problem for the Generalized Lavrent'ev-Bitsadze Equation with the Gerasimov-Caputo Derivative. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 246–254 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-246-254.

1. Введение. Рассмотрим в области $D = \{(x, y) : 0 < x < r, a < y < b\}$, $a < 0$, $b > 0$, уравнение

$$Lu(x, y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \text{sign } y \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \right) u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $1 < \alpha < 2$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \partial_{0y}^\alpha$ означает операцию дифференцирования (в смысле Герасимова – Капуто) порядка α по переменной y ; $\partial_{0s}^\alpha g(s) = D_{0s}^{\alpha-2} \frac{d^2}{ds^2} g(s)$, D_{0s}^δ – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка δ с началом в точке 0 [5, с. 9].

Как вытекает из определения операторов дробного дифференцирования в случае если $\alpha = 2$, уравнение (1) совпадает с уравнением Лаврентьева – Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sign } y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка лежат в основе математического моделирования различных физических процессов и явлений окружающей среды, имеющих фрактальную природу [5], [1].

Уравнения в частных производных дробного порядка, не превосходящего двух, исследовались в работах [15], [9], [14], [12] и др. В указанных работах в основном изучались диффузионно-волновые уравнения. Более подробную библиографию можно найти в работах [9] и [14].

В работах [16] и [17] исследовалось уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{\partial^\gamma}{\partial y^\gamma} u_y = 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

соответствующее в случае, когда $\gamma = 1$ уравнению смешанного типа в рассматриваемой области.

Задача Дирихле для модельного уравнения смешанного типа и более общего уравнения в ограниченных прямоугольных областях была исследована в работах [13] и [10].

Данная работа посвящена исследованию вопросов доказательств существования и единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области D .

2. Постановка задачи. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $u \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, $u_{xx}, \partial_{0y}^\alpha u \in C(D^- \cup D^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, y) \in D^- \cup D^+$;

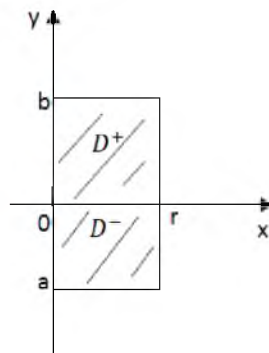


Рис. 1. $D^- = D \cap \{y < 0\}$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$

Fig. 1. $D^- = D \cap \{y < 0\}$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$

Задача. Найти в области D регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad a < y < b, \tag{2}$$

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad u(x, b) = \psi(x), \quad 0 < x < r, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции на отрезке $[0, r]$, $\varphi(0) = \varphi(r) = 0$, $\psi(0) = \psi(r) = 0$.

3. Функция типа Миттаг – Леффлера. Рассмотрим функцию типа Миттаг – Леффлера [2, с. 117]:

$$E_{\beta, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + \mu)}, \quad \beta > 0, \mu \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Напомним [2, с. 142], что функция (4) на вещественной оси, если

$$0 < \beta < 2,$$

может иметь только конечное число нулей;

В частности, если

$$1 < \beta < 2, \quad \mu \geq \frac{3}{2}\beta,$$

функция (4) не имеет вещественных нулей [9]. В случае, когда

$$\frac{5}{3} \leq \beta < 2, \quad \mu = 2,$$

она имеет не менее двух нулей [7].

4. Функция $N_{\xi, \eta}(\lambda)$. Обозначим через

$$N_{\xi, \eta}(\lambda) = \xi E_{\alpha, 2}(-\lambda \xi^\alpha) E_{\alpha, 1}(\lambda \eta^\alpha) - \eta E_{\alpha, 2}(\lambda \eta^\alpha) E_{\alpha, 1}(-\lambda \xi^\alpha),$$

где $\xi, \eta, \lambda > 0$.

Лемма. Пусть

$$h = \max\{t : E_{\alpha,2}(-t)E_{\alpha,1}(-t) = 0, t > 0\}. \quad (5)$$

Если

$$\xi^\alpha \geq \frac{h}{\lambda}, \quad (6)$$

то

$$N_{\xi,\eta}(\lambda) > 0.$$

Доказательство. Поскольку

$$E_{\alpha,1}(\lambda\eta^\alpha) > 0, \quad \eta E_{\alpha,2}(\lambda\eta^\alpha) > 0, \quad (7)$$

для всех $\lambda, \xi, \eta > 0$, то рассмотрим поведение функций $E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha)$ и $\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha)$ для λ и ξ , удовлетворяющих условию (6). Воспользуемся асимптотическим разложением функции (4) для больших значений $|z|$: при $|\arg z| \leq \rho\pi$

$$E_{\beta,\mu}(z) = 1/\beta z^{(1-\mu)/\beta} e^{z^{1/\beta}} - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \beta k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad (8)$$

и при $\pi \geq |\arg z| \geq \rho\pi$

$$E_{\beta,\mu}(z) = -\sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \beta k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad (9)$$

где $\beta \in (0, 2)$, $\rho \in (\beta/2, \min\{1, \beta\})$ [2, с. 134]. По формуле (9) при больших значениях $\lambda\xi^\alpha$:

$$\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) = \frac{\lambda^{-1}\xi^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + O(\lambda^{-2}).$$

Отсюда имеем $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) = 0+$. Значит, для всех $\lambda\xi^\alpha > \max\{t : E_{\alpha,2}(-t) = 0\}$, имеем $\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) > 0$. Аналогично, из (9) заключаем

$$E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) = \frac{\lambda^{-1}\xi^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + O(\lambda^{-2}),$$

и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) = 0-$. Тогда $E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) < 0$ для всех $\lambda\xi^\alpha > \max\{t : E_{\alpha,1}(-t) = 0\}$. Таким образом, имеем

$$\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) \geq 0, \quad E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) \leq 0, \quad (10)$$

для λ и ξ , удовлетворяющих условию (6). Причем функции (10) одновременно в ноль не обращаются. Следовательно, из формул (7) и (10) имеем, $N_{\xi,\eta}(\lambda) > 0$, что и требовалось доказать.

5. Существование решения. Для сформулирования теоремы существования поставленной выше задачи, нам понадобится класс функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям Дирихле в промежутке (c, d) , т. е. функций, которые имеют конечное число разрывов первого рода в этом промежутке; и для которых, кроме того, промежутки (c, d) можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых $f(x)$ изменяется монотонно [11, с. 440].

Теорема 1. Если функции $\varphi(x) \in C^2[0, r]$, $\psi(x) \in C[0, r]$ имеют производные $\varphi'''(x)$ и $\psi'(x)$ соответственно, удовлетворяющие условиям Дирихле в промежутке $(0, r)$, выполняются условия согласования $\varphi''(0) = \varphi''(r) = 0$, и

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) \neq 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{r}\right)^2, \quad (11)$$

то существует регулярное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. Предположим, что мы знаем след решения $u(x, y)$ на линии $y = 0$ и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < r. \quad (12)$$

$\tau(x)$ – некоторая непрерывная на отрезке $[0, r]$ функция. Тогда в области D^+ искомая функция удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(x, y) + \partial_0^\alpha u(x, y) = 0, \quad (13)$$

и краевым условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u(x, b) = \psi(x), \quad 0 < x < r. \quad (15)$$

Напомним [3], что решение этой задачи имеет вид:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n \frac{y E_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} + \tau_n \frac{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha) E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha) - y E_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha) E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x \quad (16)$$

где $\tau_n = \frac{2}{r} \int_0^r \tau(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \, dx$, $\psi_n = \frac{2}{r} \int_0^r \psi(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \, dx$.

В области D^- функция $u(x, y)$ будет удовлетворять уравнению

$$u_{xx}(x, y) - \partial_0^\alpha u(x, y) = 0, \quad (17)$$

и условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad a < y < 0, \quad (18)$$

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < r. \quad (19)$$

Функция

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} + \tau_n \left(\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (20)$$

есть искомое решение задачи (17)–(19) [4], φ_n – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0, r]$:

$$\sin_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\gamma k + 1}}{\Gamma(\gamma k + 2)}, \quad \cos_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k + 1)}$$

это обобщенные тригонометрические функции по терминологии Нахушева А. М. [5, с. 238].

Примем во внимание, что по условию исследуемой задачи у нас должно быть

$$u_y(x, 0+) = u_y(x, 0-). \quad (21)$$

Из формулы (16), дифференцируя почленно по y , найдем

$$u_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n \frac{E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} + \tau_n \frac{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha) \lambda_n y^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n y^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha) E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (22)$$

Отсюда при $y = 0$ имеем

$$u_y(x, 0+) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} - \tau_n \frac{E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (23)$$

Аналогично дифференцированием по y из (20) получим

$$u_y(x, 0-) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_n}{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)} - \tau_n \frac{E_{\alpha,1}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (24)$$

Из равенств (23) и (24) с учетом соотношения (21) и условия (11) получим

$$\tau_n = \psi_n \frac{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} - \varphi_n \frac{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (16) и (20), получим искомое решение соответственно в области D^+ и D^-

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^\pm(x, y), \quad (26)$$

$$u_n^\pm(x, y) = \psi_n \left(S_n(y) + \frac{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} C_n(y) \right) +$$

$$+ \varphi_n \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} C_n(y) \Big] \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (27)$$

$$S_n(y) = \frac{yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}, \quad C_n(y) = E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha) - \frac{yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha),$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-(x, y), \quad (28)$$

$$u_n^-(x, y) = \left[\varphi_n \left(\frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} - \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} \left(\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right) \right) \right] + \\ + \psi_n \frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} \left(\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right) \Big] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (29)$$

Далее покажем сходимость рядов (54) и (28). Напомним, что справедливы оценки

$$0 \leq S_n(y) \leq 1, \quad 0 \leq C_n(y) \leq 1. \quad (30)$$

Доказательство можно найти в работе [3]. Из асимптотических представлений (8), (9) функции типа Миттаг – Леффлера имеем

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) = O(\lambda_n^{-1} e^{\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} b}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

$$\frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} = O(e^{-\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} b}), \quad \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} = O(\lambda_n^{1-\frac{1}{\alpha}}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (32)$$

$$\lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) = \lambda_n |y| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |y|^\alpha) = |y|^{1-\alpha} / \Gamma(2-\alpha) + O(\lambda_n^{-1} |y|^{1-2\alpha}), \quad \lambda_n |y|^\alpha \rightarrow \infty, \quad (33)$$

$$|\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)| \leq M_1 / (1 + \lambda_n |y|^\alpha), \quad |\lambda_n^{-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)| \leq |y| M_2 / (1 + \lambda_n |y|^\alpha). \quad (34)$$

Из соотношения (33) при $y = a$ получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) = |a|^{1-\alpha} / \Gamma(2-\alpha) > 0$. Следовательно, в силу условия (11) выполняется неравенство

$$|a|^{-1} \lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) > C,$$

в котором C – положительная постоянная. Таким образом, с учетом (34) имеем

$$\left| \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \right| \leq \frac{|y| M \lambda_n}{1 + \lambda_n |y|^\alpha}, \quad \left| \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right| \leq C, \quad \lambda_n |y|^\alpha \geq 0. \quad (35)$$

Для коэффициентов Фурье φ_n, ψ_n имеем оценки [11, с. 460]

$$\varphi_n = O(n^{-4}), \quad \psi_n = O(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (36)$$

С помощью формул (30)–(32), (35), (36) заключаем, что ряды (27), (28) сходятся абсолютно и равномерно в области \bar{D} , а также, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^+(x, y)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^-(x, y)$, полученные из них дифференцированием по x и y порядков 2 и α соответственно, – в областях D^+ и D^- .

6. Критерий единственности решения. Имеет место

Теорема 2. *Задача Дирихле (1)–(3) может иметь не более одного регулярного решения в классе функций $C^1(\bar{D})$ тогда и только тогда, когда*

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) \neq 0, \quad (37)$$

$n = 1, 2, \dots$ **Доказательство.** Покажем, что исследуемая задача при однородных краевых условиях и выполнении условия (37) имеет только тривиальное решение. Пусть $v(x, y) = \varphi_n(x) \omega_n(y)$, где

$$\varphi_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x,$$

$$\omega_n(y) = \begin{cases} (b-y)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(b-y)^\alpha], & 0 < y \leq b, \\ (y-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(y-a)^\alpha], & a < y < 0. \end{cases}$$

Заметим, что функция $v(x, y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ представляет собой решение уравнения

$$L^*v \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{by}^\alpha v(x, y) = 0, & (x, y) \in D^+, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - D_{ay}^\alpha v(x, y) = 0, & (x, y) \in D^-, \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0, y) = v(r, y) = 0. \tag{38}$$

В области D^+ у нас есть

$$\begin{aligned} & \int_{D^+} (vLu - uL^*v) dx dy = \\ & = \int_0^b \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=r} dy + \int_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx. \end{aligned} \tag{39}$$

Для области D^- аналогичная формула будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_{D^-} (vLu - uL^*v) dx dy = \\ & = \int_a^0 \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=r} dy + \int_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=a}^{y=0} dx. \end{aligned} \tag{40}$$

Поскольку $u(0, x) = u(r, y) = 0, v(0, y) = v(r, y) = 0$, из соотношений (39), (40) имеем

$$\int_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx = 0, \tag{41}$$

$$\int_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=a}^{y=0} dx = 0. \tag{42}$$

Далее упростим подынтегральные выражения с помощью формулы дифференцирования

$$\begin{aligned} & D_{at}^\gamma |t - a|^{\mu-1} E_{1/\rho}(\lambda|t - a|^\rho; \mu) = \\ & = |t - a|^{\mu-\gamma-1} E_{1/\rho}(\lambda|t - a|^\rho; \mu - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{43}$$

$\mu > 0$, если $\gamma \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $\mu \in \mathbb{R}$, если $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ [9]. Получим

$$D_{by}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) D_{by}^{\alpha-2} \omega_n(y) = \varphi_n(x) (b - y) E_{\alpha,2}[\lambda(b - y)^\alpha].$$

Отсюда следует

$$\lim_{y \rightarrow b} D_{by}^{\alpha-2} v = 0, \quad y > 0, \tag{44}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{by}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) b E_{\alpha,2}(\lambda b^\alpha), \quad y > 0. \tag{45}$$

По определению

$$-\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v = D_{by}^{\alpha-1} v.$$

Поэтому вместо $-\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v$ вычислим

$$D_{by}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) D_{by}^{\alpha-1} \omega_n(y) = \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[\lambda(b - y)^\alpha].$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{by}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[\lambda b^\alpha], \quad y > 0. \tag{46}$$

Аналогично, с помощью формулы (43) вычислим

$$\begin{aligned} D_{ay}^{\alpha-2} v &= \varphi_n(x) D_{ay}^{\alpha-2} (y - a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(y - a)^\alpha) = \\ &= \varphi_n(x) (y - a) E_{\alpha,2}[-\lambda(y - a)^\alpha]. \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow a} D_{ay}^{\alpha-2} v = 0, \quad y < 0. \quad (47)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{ay}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x)(-a)E_{\alpha,2}(-\lambda(-a)^\alpha), \quad y < 0. \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v &= D_{ay}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) D_{ay}^{\alpha-1} (y-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(y-a)^\alpha) = \\ &= \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[-\lambda(y-a)^\alpha]. \\ \lim_{y \rightarrow 0} D_{ay}^{\alpha-1} v &= \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[-\lambda(-a)^\alpha], \quad y < 0. \end{aligned} \quad (49)$$

С учетом (44)–(49) система (41), (42) примет вид

$$\begin{aligned} bE_{\alpha,2}(\lambda b^\alpha) \int_0^r u_y(x,0) \varphi_n(x) dx + E_{\alpha,1}(\lambda b^\alpha) \int_0^r u(x,0) \varphi_n(x) dx &= 0, \\ aE_{\alpha,2}(-\lambda|a|^\alpha) \int_0^r u_y(x,0) \varphi_n(x) x dx + E_{\alpha,1}(-\lambda|a|^\alpha) \int_0^r u(x,0) \varphi_n(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (37) следует, что

$$\int_0^r u_y(x,0) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0, \quad \int_0^r u(x,0) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0. \quad (50)$$

Отметим, что всякую функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(0, r)$ можно разложить в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье $\sum_{n=0}^\infty \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$. Тогда из равенств (50) мы имеем

$$\int_0^r u_y(x,0) \sum_{n=0}^\infty \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0, \quad \int_0^r u(x,0) \sum_{n=0}^\infty \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0.$$

Тогда на основании леммы Лагранжа [6, с. 24] заключаем, что

$$u_y(x,0) = 0, \quad u(x,0) = 0 \quad \forall x \in (0, r). \quad (51)$$

С учетом формул (51) и обобщенной формулы Ньютона – Лейбница [5, с. 80] можно записать

$$\partial_{0y}^\alpha u = D_{0y}^{\alpha-2} u_{yy} = D_{0y}^\alpha u - \frac{|y|^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} u_y(x,0) - \frac{|y|^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(x,0) = D_{0y}^\alpha u.$$

Тогда уравнение (1) при $y < 0$ перепишем в виде

$$\mathbf{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{0y}^\alpha u = 0, \quad a < y < 0. \quad (52)$$

Так как $u(x,0) = 0$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u = \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-2} u_y.$$

Далее заметим

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u &= \Gamma(1-\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{2-\alpha} u_y(x,y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-2} u &= \Gamma(1-\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{2-\alpha} u(x,y) = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом, u является решением уравнения (52), удовлетворяющим краевым условиям (53). Задача (2), (53) для уравнения (52) имеет только нулевое решение в области D^- [9, с. 123].

В силу (51) в области D^+ функция $u(x,y)$ является решением однородной задачи Дирихле $u|_{\partial D^+} = 0$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \partial_{0y}^\alpha u = 0.$$

Как показано в работе [3], эта задача имеет только решение $u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in D^+$. Таким образом, $u(x,y) = 0$ во всей области D .

Пусть нарушено условие (37), тогда функция $u(x, y) = u_D$, где

$$u_D = (|a|E_{\alpha,2}(-\lambda|a|^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda y^\alpha) - yE_{\alpha,2}(\lambda y^\alpha)E_{\alpha,1}(-\lambda|a|^\alpha)) \sin \sqrt{\lambda_n}x, \quad (x, y) \in D^+,$$

$$u_D = (|y|E_{\alpha,2}(-\lambda|y|^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda b^\alpha) - bE_{\alpha,2}(\lambda b^\alpha)E_{\alpha,1}(-\lambda|y|^\alpha)) \sin \sqrt{\lambda_n}x, \quad (x, y) \in D^-,$$

является нетривиальным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (2), (3) с $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 и приведенной выше леммы имеем

Замечание. Пусть функции $\varphi(x) \in C^2[0, r]$, $\psi(x) \in C[0, r]$ имеют производные $\varphi'''(x)$ и $\psi'(x)$ соответственно, удовлетворяющие условиям Дирихле в промежутке $(0, r)$, выполняются условия согласования $\varphi''(0) = \varphi''(r) = 0$, и $\frac{|a|^\alpha}{r^2} \geq \frac{h}{\pi^2}$, где h определяется соотношением (5), тогда существует единственное регулярное решение задачи (1)–(3) и имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y), \quad (54)$$

где функции $u_n(x, y) = u_n^+(x, y)$, $(x, y) \in D^+$, $u_n(x, y) = u_n^-(x, y)$, $(x, y) \in D^-$, определяются с помощью формул (27), (29).

Список литературы

1. Боголюбов А. Н., Кобликов А. А., Смирнова Д. Д., Шанкина Н. Е. 2013. Математическое моделирование сред с временной дисперсией при помощи дробного дифференцирования. Матем. моделирование, 25: 12, 50–64.
2. Джрбашян М. М. 1966. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 672.
3. Масаева О. Х. 2012. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто. Дифференц. уравнения. 48 (3): 442–446.
4. Масаева О. Х. 2013. Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения. Дифференц. уравнения. 49 (12): 1554–1559.
5. Нахушев А. М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит, 272.
6. Нахушев А. М. 1995. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 301.
7. Попов А. Ю. 2006. О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной. Фундамент. и прикл. мат.-ка. 12 (6): 137–155.
8. Псху А. В. 2005. О вещественных нулях функции типа Миттаг – Леффлера. Матем. заметки, 77 (4): 592–599.
9. Псху А. В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука. 199.
10. Сабитов К. Б. 2007. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Док. акад. наук. 413 (1): 23–26.
11. Смирнов В. И. 1961. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Физматлит. 630.
12. Agrawal O. P. 2002. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. Nonlinear Dynam, 29-1(4): 145–155.
13. Cannon J. R. 1963. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient. Ann. de Math. pura ed Appl. 61: 371–377.
14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of Fractional Differential Equations.– Amsterdam: Elsevier, 523.
15. Mainardi F. 1996. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. Appl. Math. Lett. 9 (6), 23–28.
16. Maseeva O. Kh. 2017. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, Electron. J. Differential Eq., 2017 (74): 1–8.

17. Masaeva O. Kh. 2020. Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with a fractional derivative, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*. 6 (3): 239–244.

References

1. Bogolyubov A. N., Koblikov A. A., Smirnova D. D., Shapkina N. E. 2013. A mathematical model of media with time dispersion using fractional differentiation. *Mat. Model.* 25 (12): 50–64 (in Russian).
2. Dzhrbashyan M. M. 1966. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti [Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain]. Moscow. 672.
3. Masaeva O. Kh. 2012. Dirichlet Problem for the Generalized Laplace Equation with the Caputo Derivative. *Differential Equations*, 48 (3): 449–454 (in Russian).
4. Masaeva O. Kh. 2013. Dirichlet problem for a nonlocal wave equation. *Differential Equations*, 49 (12): 1518–1523 (in Russian).
5. Nakhushev A. M. 2003. *Drobnoe ischislenie i ego primeneniye* [Fractional Calculus and Its Applications], Moscow. 272.
6. Nakhushev A. M. 1995. *Uravneniya matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology], Moscow. 301.
7. Popov A. Yu. 2008. On the number of real eigenvalues of a certain boundary-value problem for a second-order equation with fractional derivative. *J. Math. Sci.* 151 (1): 2726–2740 (in Russian).
8. Pskhu A. V. 2005. On the real zeros of a function of Mittag-Leffler type, *Math. Notes*, 77 (4): 546–552.
9. Pskhu A. V. 2005. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order] Moscow, Nauka, 199.
10. Sabitov K. B. 2007. Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain. *Doklady Mathematics Pleiades Publishing, Ltd.* 75 (2): 193–196.
11. Smirnov V. I. 1961. *Kurs vysshei matematiki* [Course of Higher Mathematics], Moscow: Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., 630.
12. Agrawal O. P. 2002. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. *Nonlinear Dynam.* 29-1 (4): 145–155.
13. Cannon J. R. 1963. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient. *Ann. de Math. pura ed Appl.* 61: 371–377.
14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. *Theory and applications of Fractional Differential Equations.* – Amsterdam: Elsevier, 523.
15. Mainardi F. 1996. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. *Appl. Math. Lett.* 9 (6), 23–28.
16. Masaeva O. Kh. 2017. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, *Electron. J. Differential Eq.*, 2017 (74): 1–8.
17. Masaeva O. Kh. 2020. Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with a fractional derivative, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*. 6 (3): 239–244.

Получена 23.11.2020

Масаева Олеся Хажисмеловна – научный сотрудник отдела Дробного исчисления

 <http://orcid.org/0000-0002-0200-3702>

ул. Шортанова, 89А, Нальчик, 360000, Россия

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru