Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №3. С. 204–213.

УДК 517.92 DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-204-213
MSC 37C15

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ГРУБЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

В. Ш. Ройтенберг

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

Ярославский государственный технический университет,
Ярославль, 150023, Россия

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Для грубых однородных полиномиальных векторных полей на плоскости вводится характеристика – тип векторного поля. Он представляет собой циклическую числовую последовательность. Два таких векторных поля топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны. Описываются связные компоненты множества грубых однородных полиномиальных векторных полей фиксированной степени n. Два векторных поля принадлежат одной связной компоненте, если и только если они имеют один тип.

Ключевые слова: однородное полиномиальное векторное поле на плоскости, грубость, компонента связности, топологическая классификация.

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. 2020. О структуре множества грубых однородных полиномиальных векторных полей на плоскости. Прикладная математика & Физика. 52(3): 204–213. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-204-213

ON THE STRUCTURE OF THE SET OF HOMOGENEOUS POLYNOMIAL VECTOR FIELDS ON THE PLANE

V. Sh. Roitenberg

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

Yaroslavl State Tecnical University,
Yaroslavl, 150023, Russia
E-mail: vroitenberg@mail.ru
Received August 12, 2020

Abstract. The paper introduced a characteristic of structurally stable homogeneous polynomial vector fields on the plane – the type of the vector field. It is a cyclic integer sequence. Two such vector fields are topological equivalent if and only if their types coinsided or are mutually invevse. The connected components of the set of structurally stable homogeneous polynomial vector fields of fixed degree n are described. Two vector fields belong to one connected component, if and only if they are of the same type.

Key words: planar homogeneous polynomial vector field, structural stability, connected component, topological classification.

For citation: Roitenberg V. Sh. 2020. On the structure of the set of homogeneous polynomial vector fields on the plane. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 204–213. (in Russian) DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-204-213

1. Введение. Понятие грубой динамической системы – системы, для которой топологическая структура фазового портрета не меняется при ее малых возмущениях, было введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [1] в 1937 году для динамических систем, заданных векторными полями (автономными дифференциальными уравнениями) на плоскости. В дальнейшем оно было обобщено на непрерывные и дискретные динамические системы на многообразиях любой размерности (под названием структурной устойчивости) и стало предметом многочисленных исследований. К настоящему времени получены необходимые и достаточные условия грубости в пространствах как непрерывных, так и дискретных динамических систем с C^1 - топологией на любом замкнутом многообразии [12, 13, 15, 14].

Топологическая классификация грубых векторных полей получена на двумерных многообразиях [14, 4]. Различные топологические инварианты грубых диффеоморфизмов на двумерных и трехмерных многообразиях вводились и исследовались в большом числе работ (см. [3]). Полная топологическая классификация получена, в частности, для диффеоморфизмов Морса – Смейла на таких многообразиях.

Естественно изучать грубость динамических систем относительно более узких классов таких систем. Фазовые портреты двумерных полиномиальных векторных полей, начиная с работ Пуанкаре, принято рассматривать на проективной плоскости [2]. Для пространства P_n полиномиальных векторных полей степени $\le n$ на плоскости имеются достаточные условия грубости. В [6] показано, что они выделяют в P_n открытое всюду плотное множество Σ^0. Однако необходимость этих условий не доказана. Топологической классификации векторных полей из Σ^0 нет даже при $n = 2$. Неизвестно даже возможное число предельных циклов. Оценка их числа – часть знаменитой 16-й проблемы Гильберта.

Для пространства HP_n однородных полиномиальных векторных полей степени n на плоскости ситуация проще. Однородные полиномиальные векторные поля – естественный класс полиномиальных векторных полей, инвариантных относительно однопараметрической группы растяжений плоскости. В работе [7] были получены необходимые и достаточные условия грубости в пространстве HP_n; доказано, что множество $\Sigma^0 HP_n$ грубых векторных полей открыто и всюду плотно в HP_n. В [8] изучались бифуркации векторных полей из HP_n.

В настоящей работе будет дана полная топологическая классификация векторных полей из $\Sigma^0 HP_n$.

Важной задачей является нахождение условий, при которых две грубые системы можно соединить дугой, не содержащей бифуркационных точек. Иными словами, требуется описать связные компоненты множества грубых динамических систем. Для грубых систем на двумерных многообразиях эта задача рассматривалась в работах [11, 5]. Связные компоненты множества грубых дифференциальных уравнений на окружности с правыми частями – однородными тригонометрическими многочленами фиксированной степени изучались в статье [9].

В настоящей работе полностью описаны связные компоненты множества $\Sigma^0 HP_n$ грубых однородных полиномиальных векторных полей степени n.

2. Однородные векторные поля и их траектории в круге Пуанкаре и на проективной плоскости. Приведем некоторые определения, обозначения и результаты из [7, 8]. Мы рассматриваем на плоскости $\mathbb{R}^2$ однородные полиномиальные векторные поля степени $n \ge 1$

$$X(x, y) = P(x, y)\partial/\partial x + Q(x, y)\partial/\partial y,$$

где

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i y^{n-i}, \quad Q(x, y) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i y^{n-i}$$

есть однородные многочлены степени n. Для удобства не исключается случай равенства нулю всех коэффициентов p_i и q_i . Множество таких векторных полей обозначим HP_n. Поле $X \in HP_n$ отождествим с вектором $(p_0, p_1, ..., p_n, q_0, q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$, а HP_n с пространством $\mathbb{R}^{2n+2}$. Фазовые портреты векторных полей из HP_n естественно рассматривать на круге Пуанкаре $\mathbb{K}$ и на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ полусферу $\mathbb{K} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \ge 0\}$. Она отождествляется с кругом Пуанкаре $\mathbb{K} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 + Y^2 = 1, Z \ge 1\}$. Отождествим $\mathbb{K} \setminus \partial\mathbb{K}$ с $\mathbb{R}^2$ с помощью биекции $(X, Y, Z) \mapsto (x, y) = (X/Z, Y/Z)$.

Пусть $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $O = (0, 0)$. Диффеоморфизм

$$\zeta : [0, \infty) \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{K} \setminus \{O\}, \quad \zeta(r, \varphi) := (X, Y) = \left(\cos\varphi/\sqrt{1 + r^2},\ \sin\varphi/\sqrt{1 + r^2}\right)$$

задает в $\mathbb{K} \setminus \{O\}$ цилиндрические координаты (r, φ). Выражение координат (x, y) точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ через координаты (r, φ) имеет вид $x = \cos\varphi/r$, $y = \sin\varphi/r$. Поэтому

$$X = R_*(r, \varphi)\partial/\partial r + \Phi_*(r, \varphi)\partial/\partial\varphi,$$

где

$$R_*(r, \varphi) = -r^{2-n}[P(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi],$$
$$\Phi_*(r, \varphi) = r^{1-n}[Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - P(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi].$$

Векторное поле $\bar{X} = -rR(\varphi)\partial/\partial r + \Phi(\varphi)\partial/\partial\varphi$, где

$$R(\varphi) = R_X(\varphi) = P(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi, \tag{1}$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi_X(\varphi) = Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - P(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi, \tag{2}$$

определено в $\mathbb{K} \setminus \{O\}$ и имеет в $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = \mathbb{K} \setminus \partial\mathbb{K} \setminus \{O\}$ те же ориентированные траектории, что поле X. В точках $\partial\mathbb{K}$ $(r = 0)$ поле $\bar{X}$ касается $\partial\mathbb{K}$. Поэтому $\partial\mathbb{K}$ состоит из траекторий поля $\bar{X}$. *Траекториями векторного поля X в $\mathbb{K}$* называются траектории векторного поля $\bar{X}$ и точка O . Траектории, принадлежащие $\partial\mathbb{K}$, называются *бесконечно удаленными*.

Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ получается из круга Пуанкаре отождествлением диаметрально противоположных точек $\partial\mathbb{K}$. Образы траекторий векторного поля X в $\mathbb{K}$ при этом отождествлении называются *траекториями векторного поля X в $\mathbb{RP}^2$*. Так как

$$\Phi(\varphi + \pi) = (-1)^{n+1}\Phi(\varphi), \quad R(\varphi + \pi) = (-1)^{n+1}R(\varphi), \tag{3}$$

то траектории поля X в $\mathbb{K}$ образуют разбиение $\mathbb{K}$. Из (3) также следует, что при нечетном n на траекториях в $\mathbb{RP}^2$ можно задать согласованную ориентацию, а при четном n это сделать нельзя.

Векторные поля $X, Y \in \mathrm{HP}_n$ называются *топологически эквивалентными* в $\mathbb{K}$ (в $\mathbb{RP}^2$), если существует гомеоморфизм $h : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ($h : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$, $h(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$), переводящий траектории поля X в $\mathbb{K}$ (в $\mathbb{RP}^2$) в траектории поля Y в $\mathbb{K}$ (в $\mathbb{RP}^2$) с сохранением ориентации на траекториях (на траекториях, лежащих в $\mathbb{R}^2$).

Векторное поле $X_0 \in \mathrm{HP}_n$ называется *грубым* в $\mathbb{K}$ (в $\mathbb{RP}^2$), если существует такая его окрестность U, что X_0 и любое векторное поле $X \in U$ топологически эквивалентны в $\mathbb{K}$ (в $\mathbb{RP}^2$).

Согласно [7] векторное поле из HP_n является грубым в $\mathbb{K}$ (в $\mathbb{RP}^2$), тогда и только тогда, когда либо оно имеет бесконечно удаленные особые точки, при этом все они являются гиперболическими, либо $\partial\mathbb{K}$ – гиперболическая замкнутая траектория (при нечетном n). Множество $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ грубых векторных полей открыто и всюду плотно в пространстве HP_n.

3. Формулировки результатов. Пусть T_n – множество всех последовательностей

$$\tau = (\tau_1, ..., \tau_m, \tau_{m+1}, ..., \tau_{2m}),$$

таких, что $1 \le m \le n+1$, $m = n+1 (\mathrm{mod}\, 2)$, то есть m и $n+1$ имеют одинаковую четность, $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2)$, $i \in \{1, 2, ..., 2m\}$, где $\tau_i^1, \tau_i^2 \in \{-1, 1\}$ и выполняются условия

$$\forall i \in \{1, 2, ..., 2m\} \quad \tau_{i+1}^1 = -\tau_i^1 \quad (\text{здесь } \tau_{2m+1}^1 = -\tau_1^1), \tag{4}$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., m\} \quad \tau_{i+m} = \tau_i, \text{если } n \text{ нечетно}, \tau_{i+m} = -\tau_i, \text{если } n \text{ четно}. \tag{5}$$

Если последовательность $\tau = (\tau_1, ..., \tau_m, \tau_{m+1}, ..., \tau_{2m}) \in \mathrm{T}_n$, то любая последовательность

$$\tau' = (\tau_1', ..., \tau_m', \tau_{m+1}', ..., \tau_{2m}')$$

полученная из нее циклической перестановкой: $\forall i \in \{1, 2, ..., 2m\}$ $\tau'_{1+(i+p-1) \bmod (2m)} = \tau_i$, где $p \in \mathbb{Z}$, также принадлежит T_n. На T_n определим отношение эквивалентности: $\tau' \sim \tau$, если последовательность τ' получается из последовательности τ циклической перестановкой. Пусть $\bar{\mathrm{T}}_n = \mathrm{T}_n/\sim$ – фактормножество T_n по этому отношению. Класс эквивалентности, содержащий последовательность τ, будем обозначать $\bar\tau$. Класс эквивалентности, содержащий последовательность $-\tau$, будем обозначать $-\bar\tau$. Класс $\bar\tau^{-1} \in \bar{\mathrm{T}}_n$, содержащий послеловательность $(\tau_{2m}, ..., \tau_{m+1}, \tau_m, ..., \tau_1)$, назовем *обратным* к $\bar\tau$. Классы $\bar\tau$ и $\bar\tau^{-1}$ *взаимно обратны*, то есть $\bar\tau = (\bar\tau^{-1})^{-1}$. Для некоторых $\bar\tau \in \bar{\mathrm{T}}_n$ $\bar\tau^{-1} = \bar\tau$. Обозначим $\bar\tau_{not}$ класс последовательностей $\tau = (\tau_1, ..., \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, ..., \tau_{2n+2}) \in \mathrm{T}_n$, для которых $\tau_k^1\tau_k^2 = -1$ при любом $k \in \{1, 2, ..., 2n+2\}$.

Пусть $S_0 = (0, \varphi_0 \bmod 2\pi)$ – бесконечно удаленная особая точка поля $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$. Ее *типом* назовем упорядоченную пару чисел $\tau_0 = (\tau_0^1, \tau_0^2)$, где $\tau_0^1 = \mathrm{sgn}\Phi'(\varphi_0)$, $\tau_0^2 := -\mathrm{sgn}R(\varphi_0)$ – знаки характеристических чисел особой точки. Ввиду (3) $S_1 = (0, (\varphi_0 + \pi) \bmod 2\pi)$ также особая точка того же типа τ_0, что и S_0, если n нечетно, и противоположного типа $-\tau_0 = (-\tau_0^1, -\tau_0^2)$, если n четно.

Пусть $S_1 = (0, \varphi_1 \bmod 2\pi), \ldots, S_m = (0, \varphi_m \bmod 2\pi)$, $S_{m+1} = (0, (\varphi_1 + \pi) \bmod 2\pi), \ldots, S_{2m} = (0, (\varphi_m + \pi) \bmod 2\pi)$ – все бесконечно удаленные особые точки поля $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, пронумерованные в циклическом порядке, то есть $\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_m < \varphi_1 + \pi$. Пусть $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2)$ – тип точки S_i. Последовательность $\tau = (\tau_1, ..., \tau_m, \tau_{m+1}, ..., \tau_{2m})$ удовлетворяет условиям (4), (5) и потому принадлежит T_n. При другой нумерации бесконечно удаленных особых точек в циклическом порядке последовательность их типов $\tau' = (\tau_1', ..., \tau_m', \tau_{m+1}', ..., \tau_{2m}')$ будет эквивалентна последовательности τ. Класс $\bar\tau \in \bar{\mathrm{T}}_n$ назовем *типом векторного поля* X и обозначим $\bar\tau(X)$.

Теорема 1. *А) Для любой последовательности $\tau \in \mathrm{T}_n$, не принадлежащей классу $\bar\tau_{not}$, существует векторное поле $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющее тип $\bar\tau$.*

Б) Для любого векторного поля $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ его тип отличен от $\bar\tau_{not}$.

Теорема 1 доказана в разделе 4.

Теорема 2. *1) Два векторных поля из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющие бесконечно удаленные особые точки, принадлежат одной связной компоненте $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, тогда и только тогда они имеют один тип.*

2) Два векторных поля из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющие бесконечно удаленные особые точки, топологически эквивалентны в $\mathbb{K}$ (в $\mathbb{RP}^2$) тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны.

Доказательство теоремы 2 приведено в разделе 5.

Пусть теперь n нечетно и векторное поле $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ не имеет бесконечно удаленных точек. Тогда $\forall\varphi \in [0, 2\pi]$ $\Phi(\varphi) \ne 0$ и $\partial\mathbb{K}$ является гиперболической замкнутой траекторией поля X в $\mathbb{K}$, устойчивой (неустойчивой) при отрицательном (положительном) значении величины

$$h(X) = -\int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\, d\varphi.$$

Типом векторного поля X назовем упорядоченную пару чисел $\mathrm{T}(X) = (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$, где $\mathrm{T}_1 = \mathrm{sgn}\Phi(\varphi)$, $\mathrm{T}_2 = \mathrm{sgn}h(X)$. Таким образом, существует только 4 возможных типа грубых векторных полей без бесконечно удаленных точек: $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ и $(-1,-1)$. Типы $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ и $(\mathrm{T}_1', \mathrm{T}_2')$ будем считать *взаимно обратными*, если $\mathrm{T}_1' = -\mathrm{T}_1$, а $\mathrm{T}_2' = \mathrm{T}_2$.

Теорема 3. *Для любой пары* $\mathrm{T} = (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$, *где* $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \{-1, 1\}$, *существует векторное поле* $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, *не имеющее бесконечно удаленных точек и имеющее тип* T.

Теорема 4. *1) Два векторных поля из* $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ *, не имеющие бесконечно удаленных особых точек, принадлежат одной связной компоненте множества* $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ *тогда и только тогда, когда их типы совпадают.*

2) Два векторных поля из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$*, не имеющие бесконечно удаленных особых точек, топологически эквивалентны в* $\mathbb{K}$ *(в* $\mathbb{RP}^2$ *) тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны.*

Доказательства теорем 3 и 4 приведены в разделе 6.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\tau = (\tau_1, ..., \tau_m, \tau_{m+1}, ..., \tau_{2m}) \in \mathrm{T}_n$, $\bar\tau \neq \bar\tau_{not}$. Покажем, что существует векторное поле из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющее тип $\bar\tau$. Возможны два случая: (i) $\tau_k^2 = \tau_k^1$ при некотором $k \in \{1, ..., 2m\}$ и (ii) $\tau_k^2 = -\tau_k^1$ при всех $k \in \{1, ..., 2m\}$.

Рассмотрим случай (i). Из (1), (2) и определения типа векторного поля следует, что $\forall X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ $\bar\tau(-X) = -\bar\tau(X)$. Поэтому без ограничения общности можно считать $\tau_1^2 = \tau_1^1 = -1$. Выберем числа $\varphi_k \in (-\pi/2, \pi/2)$, $k = 1, ..., m$, так, чтобы $\varphi_k < \varphi_{k+1}$ при $k = 1, ..., m-1$. Пусть также $\varphi_{m+1} = \varphi_1 + \pi$. Так как $m \le n+1, m = n+1(\mathrm{mod}2)$, то определен однородный многочлен степени $n+1$

$$A(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{n-m+1}{2}} \prod_{k=1}^{m} (x\sin\varphi_k - y\cos\varphi_k) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n y + \cdots + a_1 x y^n + a_0 y^{n+1}.$$

Пусть N – число перемен знака в последовательности $\tau_1^2 = -1, \tau_2^2, ..., \tau_m^2$. Возьмем $s = N$, если $N = n(\mathrm{mod}\,2)$, и $s = N+1$, если $N = n-1(\mathrm{mod}\,2)$. Выберем числа $\varphi_k' \in (-\pi/2, \pi/2)$, $i = 1, ..., s$, так, что $\varphi_1 < \varphi_1' < \varphi_2' \cdots < \varphi_s'$, а интервал $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$, $k = 1, ..., m-1$, содержит единственное такое число, если $\tau_{k+1}^2 = -\tau_k^1$, и не содержит таких чисел, если $\tau_{k+1}^2 = \tau_k^1$. Так как $s \le m \le n+1$ и $s = n(\mathrm{mod}\,2)$, то число $n - s \ge 0$ и четно. Поэтому определен многочлен

$$B(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{n-s}{2}} \prod_{i=1}^{s} (x\sin\varphi_i' - y\cos\varphi_i') = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + b_1 x y^{n-1} + b_0 y^n. \tag{6}$$

Поскольку $a_0 = (-1)^m \cos\varphi_1 \cdots \cos\varphi_m$, $b_0 = (-1)^s \cos\varphi_1' \cdots \cos\varphi_s'$, $\varphi_k, \varphi_i' \in (-\pi/2, \pi/2)$, а $m - s$ нечетно, то $b_0 \neq 0$, а $-a_0/b_0 > 0$. Рассмотрим векторное поле $X^0 = P_0\partial/\partial x + Q_0\partial/\partial y$, где

$$P_0(x,y) = (-a_0/b_0)B(x,y) = -(a_0b_n/b_0)x^n - (a_0b_{n-1}/b_0)x^{n-1} - \cdots - (a_0b_1/b_0)xy^{n-1} - a_0y^n, \tag{7}$$

$$Q_0(x,y) = a_{n+1}x^n + (a_n - a_0b_n/b_0)x^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0b_1/b_0)y^n.$$

Для него имеем равенство

$$\Phi_{X^0}(\varphi) = A(\cos\varphi, \sin\varphi) = \prod_{k=1}^{m} (\sin(\varphi_k - \varphi). \tag{8}$$

Так как $\Phi_{X^0}(\varphi_k) = 0$, $\cos\varphi_k \neq 0$, то из (1), (2) получаем равенство $R_{X^0}(\varphi_k) = P_{X^0}(\cos\varphi_k, \sin\varphi_k)\cos\varphi_k$. Отсюда и из (6), (7) имеем

$$\mathrm{sgn}R_{X^0}(\varphi_k) = \mathrm{sgn} \prod_{i=1}^{s} (\sin(\varphi_i' - \varphi_k), \quad k = 1, ..., m. \tag{9}$$

Из (8) следует, что особыми точками векторного поля X^0 на $\partial\mathbb{K}$ являются точки $S_k = (0, \varphi_k \bmod 2\pi)$, $S_{k+m} = (0, (\varphi_k + \pi) \bmod 2\pi)$, $k = 1, ..., m$. Из (8) и (9) получаем, что типом точки S_k, $k = 1, ..., m$, является пара $((-1)^k, \hat\tau_k^2)$, где

$$\hat\tau_k^2 = -\mathrm{sgn} \prod_{i=1}^{s} (\sin(\varphi_i' - \varphi_k). \tag{10}$$

Так как $\varphi_i' - \varphi_1 \in (0, \pi)$ при всех $i = 1, ..., s$, то $\hat\tau_1^2 = \tau_1^2$. Вследствие выбора чисел φ_i' из (10) по индукции получаем $\hat\tau_k^2 = \tau_k^2$ при всех $k = 1, ..., m$. Таким образом, поле X^0 имеет тип $\bar\tau$.

Рассмотрим случай (ii). Без ограничения общности можем считать $\tau_1^1 = -1, \tau_1^2 = 1$. Тогда $\tau_k^1 = (-1)^k, \tau_k^2 = (-1^{k+1}, k = 1, ..., m$. Выберем числа $\varphi_k \in (-\pi/2, \pi/2)$, $k = 1, ..., m$ так же, как в случае (i). Пусть теперь $s = m+1$. Тогда $s = n \bmod 2$. Так как $\bar\tau \neq \bar\tau_{not}$, то $s \le n$. Числа φ_i', $i = 1, ..., s$, выберем так, что

$$\varphi_1' \in (-\pi/2, \varphi_1),\ \varphi_k' \in (\varphi_{k-1}, \varphi_k),\ k = 2, ..., m,\ \varphi_{m+1}' \in (\varphi_m, \pi/2). \tag{11}$$

Векторное поле X^0 определим так же, как в случае (i). Тогда тип особой точки S_k, $k = 1, ..., m$, равен $((-1)^k, \hat{\tau}_k^2)$, где $\hat{\tau}_k^2$ находится по формуле (10). Вследствие (11) $\hat{\tau}_k^2 = (-1)^{k+1} = \tau_k^2$. Таким образом, X^0 имеет заданный тип $\bar{\tau}$.

Утверждение А) теоремы 1 доказано.

Предположим временно, что существует векторное поле $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющее тип $\bar{\tau}_{not}$. Пусть $\varphi_1 < \varphi_2 < ... < \varphi_{n+1}$ – все нули функции $\Phi = \Phi_X$ на промежутке $[\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$. Сделав замену цилиндрических координат $(r, \varphi) \mapsto (r, \varphi - \varphi_1 - \pi/2 + \alpha)$, где $0 < \alpha < \varphi_1 + \pi - \varphi_{n+1}$, и сохранив прежние обозначения, мы можем считать, что векторное поле имеет особые точки $S_k = (0, \varphi_k \bmod 2\pi)$, $S_{k+n+1} = (0, (\varphi_k + \pi) \bmod 2\pi)$, $k = 1, ..., n+1$, где $-\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < ... < \varphi_{n+1} < \pi/2$. Так как $\tau_1^1\tau_1^2 = -1$, то $\Phi'(\varphi_1)P(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) > 0$ и потому найдется такое $\varphi_* \in (-\pi/2, \varphi_1)$, что $\Phi(\varphi_*)P(\cos\varphi_*, \sin\varphi_*) < 0$. Кроме того $\Phi(-\pi/2) = P(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2))$. Поскольку $\mathrm{sgn}\Phi(-\pi/2) = \mathrm{sgn}\Phi(\varphi_*)$, то

$$P(\cos\varphi_*, \sin\varphi_*)P(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2)) < 0,$$

и потому на интервале $(-\pi/2, \varphi_*)$ есть нуль функции $P(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Так как $\tau_k^1\tau_{k+1}^2 = -1$ при $k = 1, ..., n$, то $P(\cos\varphi_k, \sin\varphi_k)P(\cos\varphi_{k+1}, \sin\varphi_{k+1}) < 0$. Следовательно, на каждом интервале $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$, $k = 1, ..., n$, есть нуль функции $P(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Таким образом, эта функция имеет на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ не менее $(n+1)$-го нуля. Но это противоречит тому, что тригонометрический полином степени n имеет на $(-\pi/2, \pi/2)$ не более n нулей. Из этого противоречия следует, что сделанное предположение неверно и потому справедливо утверждение Б) теоремы 1. На этом доказательство теоремы 1 завершено.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $(0, \varphi_k \bmod 2\pi), (0, (\varphi_k + \pi) \bmod 2\pi)$, $k = 1, ..., m$, где $\varphi_1 < \varphi_2 < ... < \varphi_m < \varphi_1 + \pi$, – все особые точки поля $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, на $\partial\mathbb{K}$, а C – связная компонента $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, содержащая X. Поскольку $\Phi_Y(\varphi)$ и $(\Phi_Y)'(\varphi)$ непрерывные функции от (φ, Y), а производная $(\Phi_Y)'(\varphi_k) \neq 0$, $k = 1, ..., m$, то существует такая окрестность $\mathcal{U}(X)$ поля X в C, что все особые точки векторного поля $Y \in \mathcal{U}(X)$ на $\partial\mathbb{K}$ имеют вид $(0, \tilde{\varphi}_k(Y) \bmod 2\pi), (0, (\tilde{\varphi}_k(Y) + \pi) \bmod 2\pi)$, $k = 1, ..., m$, где $\tilde{\varphi}_k$ – непрерывные функции, $\tilde{\varphi}_k(X) = \varphi_k$. Так как $(\Phi_Y)'(\tilde{\varphi}_k(Y))$ и $R_Y(\tilde{\varphi}_k(Y))$ непрерывные функции от $Y \in \mathcal{U}(X)$, то окрестность $\mathcal{U}(X)$ можно считать выбранной так, что для всех $Y \in \mathcal{U}(X)$ $\mathrm{sgn}(\Phi_Y)'(\tilde{\varphi}_k(Y)) = \mathrm{sgn}(\Phi_Y)'(\varphi_k)$, $\mathrm{sgn}P_Y(\tilde{\varphi}_k(Y)) = \mathrm{sgn}P_Y(\varphi_k)$, и потому $\bar{\tau}(Y) = \bar{\tau}(X)$. Следовательно, все векторные поля из C имеют один тип.

Пусть $\tau = (\tau_1, ..., \tau_m, \tau_{m+1}, ..., \tau_{2m}) \in \mathrm{T}_n$. Покажем, что любые два векторных поля $X_l = P_l\partial/\partial x + Q_l\partial/\partial y \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, $l \in \{0, 1\}$, имеющих тип $\bar{\tau}$, принадлежат одной компоненте связности множества $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau_1^1 = -1$. Везде далее $I = [0, 1]$.

Лемма 1. *Для каждого $l \in \{0, 1\}$ существует путь $u_l \colon I \to \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, $u_l(0) = X_l$ такой, что для векторного поля $\tilde{X}_l = u_l(1) = \tilde{P}_l\partial/\partial x + \tilde{Q}_l\partial/\partial y$ нули $\tilde{\varphi}_{l,k}$, $k = 1, ..., m$, функции $\Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi)$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ можно пронумеровать так, что*

$$-\pi/2 < \tilde{\varphi}_{l,1} < \tilde{\varphi}_{l,2} < ... < \tilde{\varphi}_{l,m} < \pi/2 < \tilde{\varphi}_{l,m+1} = \tilde{\varphi}_{l,1} + \pi, \tag{12}$$

а особая точка $\tilde{S}_{l,k} = (0, \tilde{\varphi}_{l,k} \bmod 2\pi)$ имеет тип τ_k.

Доказательство. Пусть $S_{l,k} = (0, \varphi_{l,k} \bmod 2\pi)$, $k = 1, ..., 2m$, где

$$\varphi_{l,1} < \varphi_{l,2} < ... < \varphi_{l,m} < \varphi_{l,m+1} = \varphi_{l,1} + \pi < \cdots < \varphi_{l,2m} = \varphi_{l,m} + \pi,$$

– все бесконечно удаленные особые точки поля X_l, $l \in \{0, 1\}$, пронумерованные так, чтобы тип точки $S_{l,k}$ равнялся τ_k. Обозначим $T^\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T^\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ – вращение на угол θ. Для $\alpha \in I$ рассмотрим векторные поля $Y_l^\alpha = T^{-\theta_l(\alpha)}X_lT^{\theta_l(\alpha)} \in \mathrm{HP}_n$, где $\theta_l(\alpha) = \alpha(\pi/2 - \varphi_{l,1} - \mu)$, $0 < \mu < \pi - (\varphi_{l,m} - \varphi_{l,1})$. Тогда $\Phi_{Y_l^\alpha}(\varphi) = \Phi_{X_l}(\varphi + \theta_l(\alpha))$ и потому $Y_l^\alpha \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$. Отображение $I \ni \alpha \mapsto Y_l^\alpha$ – путь, соединяющий в $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ векторное поле $X_l = Y_l^0$ с векторным полем $\tilde{X}_l = Y_l^1$, особые точки которого $\tilde{S}_{l,k} = (0, \tilde{\varphi}_{l,k} \bmod 2\pi)$, $k = 1, ..., 2m$, где $\tilde{\varphi}_{l,k} = \varphi_{l,k} - \varphi_{l,1} - \pi/2 + \mu$, имеют тип τ_k. При $k = 1, ..., m$ $\tilde{\varphi}_{l,k} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тем самым, лемма 1 доказана.

Так как $\Phi_{\tilde{X}_l}(-\pi/2) = \tilde{P}_l(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2))$, а вследствие (12) при всех $\varphi \in (-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$ имеем $\mathrm{sgn}\Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi) = -\tau_1^1 = 1$, то

$$\forall l \in \{0, 1\} \ \tilde{P}_l(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2)) > 0. \tag{13}$$

Лемма 2. *Для каждого $l \in \{0, 1\}$ существует путь $v_l \colon I \to \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ такой, что $v(0) = \tilde{X}_l$, а векторное поле $\hat{X}_l = v_l(1) = \hat{P}_l\partial/\partial x + \hat{Q}_l\partial/\partial y$ имеет те же бесконечно удаленные особые точки и того же типа, что и векторное поле $\tilde{X}_l$,*

$$\hat{P}_l(\cos\varphi, \sin\varphi) = \hat{c}_l(\varphi)\prod_{j=1}^{n_l}\sin(\hat{\varphi}'_{l,j} - \varphi), \tag{14}$$

где $\hat{c}_l(\varphi)$ – однородный тригонометрический многочлен четной степени $n - n_l \geq 0$ такой, что $\forall\varphi$ $\hat{c}_l(\varphi) > 0$, $-\pi/2 < \hat{\varphi}'_{l,1} < \hat{\varphi}'_{l,2} < ... < \hat{\varphi}'_{l,n_l} < \pi/2$, а каждый из интервалов $(-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$, $(\tilde{\varphi}_{l,k}, \tilde{\varphi}_{l,k+1})$, $k = 1, ..., m-1$, и $(\tilde{\varphi}_{l,m}, \pi/2)$ содержит не более одного нуля $\hat{\varphi}'_{l,j}$ функции $\hat{P}_l(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{P}_l(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{p}_{l,i} x^i y^{n-i}$. Функция $\Phi_{\tilde{X}_l}$ – однородный тригонометрический многочлен степени $n+1$:

$$\Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n+1} a_{l,i} x^i y^{n+1-i}, \ \ a_{l,0} = -\tilde{p}_{l,0}. \tag{15}$$

Из леммы 1 статьи [9] и неравенства (13) получаем, что

$$\tilde{P}_l(\cos\varphi, \sin\varphi) = c_l(\varphi) \prod_{j=1}^{r_l} \sin(\varphi'_{l,j} - \varphi),$$

где $c_l(\varphi)$ – однородный тригонометрический многочлен степени $n - r_l \geq 0$, $c_l(\varphi) > 0$ при всех φ, $-\pi/2 < \varphi'_{l,j} \leq \varphi'_{l,j+1} < \pi/2$ для $j = 1, ..., r_l - 1$. Так как $\tilde{P}_l(\cos\tilde{\varphi}_{l,k}, \sin\tilde{\varphi}_{l,k}) = R_{\tilde{X}_l}(\tilde{\varphi}_{l,k})\cos\tilde{\varphi}_{l,k} \neq 0$, то $\varphi'_{l,j} \neq \tilde{\varphi}_{l,k}$, $j = 1, ..., r_l$, $k = 1, ..., m$.

Пусть $\varphi'_{l,n_{l,k}}, \varphi'_{l,n_{l,k}+1}, ..., \varphi'_{l,n_{l,k}+s_{l,k}}$ – нули функции $\tilde{P}_l(\cos\varphi, \sin\varphi)$, принадлежащие интервалу $(-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$ при $k = 0$, интервалу $(\tilde{\varphi}_{l,k}, \tilde{\varphi}_{l,k+1})$ при $k = 1, ..., m-1$ и интервалу $(\tilde{\varphi}_{l,m}, \pi/2)$ при $k = m$. Введем функции

$$G_l^\theta(\varphi) = c_l(\varphi) \prod_{k=0}^{m} g_{l,k}^\theta(\varphi), \ \ \theta \in I, \tag{16}$$

где $g_{l,k}^\theta(\varphi) \equiv 1$, если $\tilde{P}_l(\cos\varphi, \sin\varphi)$ не имеет нулей на k-м интервале,

$$g_{l,k}^\theta(\varphi) = (1-\theta) \prod_{j=0}^{s_{l,k}} \sin(\varphi'_{l,n_{l,k}+j} - \varphi) + \theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^{s_{l,k}/2} \prod_{j=0}^{s_{l,k}} \cos\varphi'_{l,n_{l,k}+j},$$

если $s_{l,k}$ нечетное,

$$g_{l,k}^\theta(\varphi) = \sin(\varphi'_{l,n_{l,k}} - \varphi)[(1-\theta) \prod_{j=1}^{s_{l,k}} \sin(\varphi'_{l,n_{l,k}+j} - \varphi) + \theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^{s_{l,k}/2} \prod_{j=1}^{s_{l,k}} \cos\varphi'_{l,n_{l,k}+j}],$$

если $s_{l,k}$ четное. Их можно представить в виде $G_l^\theta(\varphi) = P_l^\theta(\cos\varphi, \sin\varphi)$, где $P_l^\theta(x,y) = \sum_{i=0}^{n} p_{l,i,\theta} x^i y^{n-i}$. При $\theta = 0$ получаем $P_l^0 = \tilde{P}_l$. Кроме того, при всех $\theta \in I$ коэффициент $p_{l,0,\theta} = \tilde{p}_{l,0} = -a_{l,0}$.

Зададим путь $v_l\colon I \to \mathrm{HP}_n$, положив $v_l(\theta) = X_l^\theta = P_l^\theta \partial/\partial x + Q_l^\theta \partial/\partial y$, где $Q_l^\theta(x,y) = a_{l,n+1}x^n + (a_{l,n} + p_{l,n,\theta})x^{n-1}y + \cdots + (a_{l,1} + p_{l,1,\theta})y^n$. При любом $\theta \in I$

$$\Phi_{X_l^\theta}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n+1} a_{l,k} \cos^k\varphi \sin^{n+1-k}\varphi - p_{l,0,\theta}\sin^{n+1}\varphi = \sum_{k=0}^{n+1} a_{l,k}\cos^k\varphi \sin^{n+1-k}\varphi = \Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi).$$

Поэтому у всех векторных полей X_l^θ особые точки одни и те же. Так как $P_l^0 = \tilde{P}_l$, $\Phi_{X_l^\theta} = \Phi_{\tilde{X}_l}$, то $Q_l^0 = \tilde{Q}_l$, а потому и $v_l(0) = X_l^0 = \tilde{X}_l$. При всех $\theta \in I$ величины $\mathrm{sgn} g_{l,k}^\theta(\tilde{\varphi}_{l,j})$, $j = 1, ..., m$, $k = 0, 1, ..., m$, отличны от нуля и постоянны. Поэтому и величины $\mathrm{sgn} R_{X_l^\theta}(\tilde{\varphi}_{l,k}) = \mathrm{sgn} P_l^\theta(\cos\tilde{\varphi}_{l,k}, \sin\tilde{\varphi}_{l,k})$, $j = 1, ..., m$, отличны от нуля и постоянны для всех $\theta \in I$. Таким образом, $\forall\theta \in I$ поле $X_l^\theta \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, а каждая его бесконечно удаленная особая точка имеет один и тот же тип.

Обозначим $\hat{X}_l = \hat{P}_l \partial/\partial x + \hat{Q}_l \partial/\partial y = X_l^1$. Пронумеруем числа $\varphi'_{l,n_{l,k}}$, для тех $k = 0, 1, ..., m$, для которых $s_{l,k}$ четно, в порядке их возрастания номерами $1, ..., n_l$, и обозначим $\hat{\varphi}'_{l,j}$ число с номером j. Тогда из равенств $P_l^1(\cos\varphi, \sin\varphi) = G_l^1(\varphi)$ и (16) получаем равенство (14). Числа $\hat{\varphi}'_{l,j}$, $j = 1, ..., n_l$, удовлетворяют условиям, сформулированным в лемме 2. Следовательно, лемма 2 доказана.

Лемма 2. *Существует путь* $w\colon I \to \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ *такой, что при* $l \in \{0, 1\}$ $w(l) = \hat{X}_l$.

Доказательство. Из (14), свойств чисел $\hat{\varphi}'_{l,j}$ и равенства $\hat{P}_l(\cos\tilde{\varphi}_{l,k}, \sin\tilde{\varphi}_{l,k}) = R_{\hat{X}_l}(\tilde{\varphi}_{l,k})\cos\tilde{\varphi}_{l,k}$ получаем, что числа n_0 и n_1 равны числу перемен знака в последовательности $\tau_1^2, ..., \tau_m^2, -\tau_{m+1}^2$ и потому совпадают: $n_1 = n_0$. Обозначим $I_{l,1} = (-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$, $I_{l,k} = (\tilde{\varphi}_{l,k-1}, \tilde{\varphi}_{l,k}), k = 2, .., m$, $I_{l,m+1} = (\tilde{\varphi}_{l,m}, \pi/2)$. Пусть $\hat{\varphi}'_{l,p} \in I_{l,k_{l,p}}$ при $p = 1, ..., n_0$. Покажем по индукции, что для любого $i = 1, ..., n_0$

$$I_{0,k_{0,i}} = I_{1,k_{1,i}}. \tag{17}$$

Включение $\hat{\varphi}'_{l,1} \in I_{l,k_{l,1}}$ при $k_{l,1} = 1$ равносильно тому, что $\tau_1^2 = 1$, а при $k_{l,1} = 2, ..., m-1$ тому, что $\tau_k^2 = 1$ для $k = 1, ..., k_{l,1} - 1$, а $\tau_{k_{l,1}-1}^2 \tau_{k_{l,1}}^2 = -1$. Поэтому $k_{0,1} = k_{1,1}$ и равенство (17) верно при $i = 1$. Пусть (17) верно для $i = 1, ..., p-1$. Тогда $k_{l,p} > k_{0,p-1} = k_{1,p-1}$ при $l \in \{0, 1\}$. Включение $\hat{\varphi}'_{l,p} \in I_{l,k_{l,p}}$ при $2 \leq k_{l,p} \leq m$ равносильно тому, что $\tau_k^2 \tau_{k+1}^2 = 1$ для $k = k_{l,p-1}, ..., k_{l,p} - 1$, $\tau_{k_{l,p}-1}^2 \tau_{k_{l,p}}^2 = -1$, а при $k_{l,p} = m+1$ равносильно тому, что $p = n_0$, $\tau_m^2 = (-1)^n$. Следовательно, $k_{0,p} = k_{1,p}$ и (17) верно для $i = p$. По индукции получаем, что (17) верно при всех $i = 1, ..., n_0$.

Для $\theta \in I$ обозначим $\tilde{\varphi}_{\theta,k} = (1-\theta)\tilde{\varphi}_{0,k} + \theta\tilde{\varphi}_{1,k}$, $k = 1, ..., m$; $\hat{\varphi}'_{\theta,j} = (1-\theta)\hat{\varphi}'_{0,j} + \theta\hat{\varphi}'_{1,k}$, $j = 1, ..., n_0$. Так как $-\pi/2 < \tilde{\varphi}_{\theta,k} < \tilde{\varphi}_{\theta,k+1} < \pi/2$, $k = 1, ..., m-1$, то $\forall\,\theta \in I$ определены интервалы $I_{\theta,1} = (-\pi/2, \tilde{\varphi}_{\theta,1})$, $I_{\theta,k} = (\tilde{\varphi}_{\theta,k-1}, \tilde{\varphi}_{\theta,k})$, $k = 2, ..., m$, $I_{\theta,m+1} = (\tilde{\varphi}_{\theta,m}, \pi/2)$. Ввиду (17)

$$\forall\, j = 1, ..., n_0\ \forall\,\theta \in I\ \hat{\varphi}'_{\theta,j} \in I_{\theta,k_{\theta,j}}. \tag{18}$$

Так как $\hat{c}_0(\varphi) > 0$, $\hat{c}_1(\varphi) > 0$, то $\forall\,\theta \in I\ \hat{c}_\theta(\varphi) = (1-\theta)\hat{c}_0(\varphi) + \theta\hat{c}_1(\varphi) > 0$.

Согласно лемме 1 из [9]

$$\Phi_{\hat{X}_l}(\varphi) = \hat{d}_l(\varphi)\prod_{k=1}^{m}\sin(\tilde{\varphi}_{l,k} - \varphi),\ l \in \{0, 1\}, \tag{19}$$

где $\hat{d}_l(\varphi)$ – однородный тригонометрический многочлен четной степени $n-1-m$, не обращающийся в нуль. Так как $\Phi_{\hat{X}_l}(-\pi/2) = \hat{P}_l(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2))$, то из (14), (19) и неравенства $\hat{c}_l(\varphi) > 0$ следует, что $\hat{d}_l(\varphi) > 0$, $l \in \{0, 1\}$. Поэтому $\forall\,\theta \in I\ \hat{d}_\theta(\varphi) = (1-\theta)\hat{d}_0(\varphi) + \theta\hat{d}_1(\varphi) > 0$. Пусть

$$\hat{c}_\theta(\varphi)\prod_{j=1}^{n_0}\sin(\hat{\varphi}'_{\theta,j} - \varphi) = \sum_{i=0}^{n}\hat{p}_{\theta,i}\cos^i\varphi\sin^{n-i}\varphi,$$

$$\hat{d}_\theta(\varphi)\prod_{k=1}^{m}\sin(\tilde{\varphi}_{\theta,k} - \varphi) = \sum_{i=0}^{n+1}\hat{a}_{\theta,i}\cos^i\varphi\sin^{n+1-i}\varphi.$$

Тогда $\hat{a}_{\theta,0} \neq 0$. Поскольку m и n_0 имеют разную четность, то $\kappa(\theta) = -\hat{p}_{\theta,0}/\hat{a}_{\theta,0} > 0$. Ввиду (14), (19) и (2) $\kappa(l) = 1$ при $l \in \{0, 1\}$. Зададим путь $w\colon I \to \mathrm{HP}_n$, положив $\forall\,\theta \in I\ w(\theta) = \bar{X}^\theta = \bar{P}^\theta\partial/\partial x + \bar{Q}^\theta\partial/\partial y$, где $\bar{P}^\theta(x, y) = \sum_{i=0}^{n}\hat{p}_{\theta,i}x^iy^{n-i}$,

$$\bar{Q}^\theta(x, y) = \hat{a}_{\theta,n+1}\kappa(\theta)x^n + (\hat{p}_{\theta,n} + \hat{a}_{\theta,n}\kappa(\theta))x^{n-1}y + \cdots + (\hat{p}_{\theta,1} + \hat{a}_{\theta,1}\kappa(\theta))y^n.$$

Тогда

$$\bar{P}^\theta(\cos\varphi, \sin\varphi) = \hat{c}_\theta(\varphi)\prod_{j=1}^{n_0}\sin(\hat{\varphi}'_{\theta,j} - \varphi), \tag{20}$$

$$\Phi_{\bar{X}^\theta}(\varphi) = \kappa(\theta)\sum_{i=0}^{n+1}\hat{a}_{\theta,i}\cos^i\varphi\sin^{n+1-i}\varphi = \kappa(\theta)\hat{d}_\theta(\varphi)\prod_{k=1}^{m}\sin(\tilde{\varphi}_{\theta,k} - \varphi). \tag{21}$$

При $\theta = l \in \{0, 1\}$ ввиду (14), (19) и равенства $\kappa(l) = 1$ имеем $\bar{P}^l = \hat{P}_l$, $\Phi_{\bar{X}^l} = \Phi_{\hat{X}_l}$, а потому и $w(l) = \bar{X}^l = \hat{X}_l$.

Из (18) и (20) следует, что $\mathrm{sgn}R_{\bar{X}^\theta(\tilde{\varphi}_{\theta,k})} = \mathrm{sgn}\bar{P}^\theta(\cos\tilde{\varphi}_{\theta,k}, \sin\tilde{\varphi}_{\theta,k})$, $k = 1, ..., m$, отличен от нуля для всех $\theta \in I$. Поскольку ввиду (21) $\tilde{\varphi}_{\theta,k}$, $k = 1, ..., m$ – все нули функции $\Phi_{\bar{X}^\theta}$ на $[-\pi/2, \pi/2]$ и они простые, то для всех $\theta \in I\ \bar{X}^\theta \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$. Лемма 3 доказана.

Пусть u_1^{-1} и v_1^{-1} – пути, обратные к u_1 и v_1, то есть $\forall\,\theta \in I\ u_1^{-1}(\theta) = u_1(1-\theta)$, $v_1^{-1}(\theta) = v_1(1-\theta)$. Так как $u_l(1) = v_l(0)$, $v_l(1) = w(l)$, $l \in \{0, 1\}$, то определено произведение путей $u_0, v_0, w, v_1^{-1}, u_1^{-1}$ [10, с. 64] – путь $\xi = u_0 \cdot v_0 \cdot w \cdot v_1^{-1} \cdot u_1^{-1}\colon I \to \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, соединяющий поле $\xi(0) = X_0$ и поле $\xi(1) = X_1$. На этом доказательство утверждения 1) теоремы 2 завершено.

Докажем утверждение 2) теоремы 2. Векторные поля X_1 и X_2 из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющие один тип, принадлежат одной связной компоненте множества $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ и потому топологически эквивалентны и в $\mathbb{K}$ и в $\mathbb{RP}^2$. Если типы X_1 и X_2 взаимно обратны, то отображение $T\colon (x, y) \mapsto (-x, y)$ переводит векторное поле X_2 в векторное поле $X_2^* = T^{-1}X_2T \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющее тот же тип, что и X_1. Поле X_1 топологически эквивалентно полю X_2^*, а потому и полю X_2.

Если векторные поля X_1 и X_2 из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющие на $\partial\mathbb{K}$ особые точки, топологически эквивалентны в $\mathbb{K}$, то существует гомеоморфизм $h_\partial\colon \partial\mathbb{K} \to \partial\mathbb{K}$, переводящий особые точки в особые точки того же типа. Если этот гомеоморфизм сохраняет ориентацию, то сохраняется и циклический порядок особых точек и потому поля X_1 и X_2 одного типа. Если гомеоморфизм h_∂ меняет ориентацию, то он обращает циклический порядок особых точек и потому типы векторных полей X_1 и X_2 взаимно обратны.

Если рассматриваемые векторные поля X_1 и X_2 топологически эквивалентны в $\mathbb{RP}^2$, то существует гомеоморфизм $h\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $h(\partial\mathbb{K}) = \partial\mathbb{K}$, отображающий траектории поля X_1 на траектории поля X_2 с сохранением ориентации на траекториях, принадлежащих $\mathbb{R}^2$; при этом диаметрально противоположные точки $\partial\mathbb{K}$ переходят в диаметрально противоположные точки $\partial\mathbb{K}$. Если особая точка S_1 поля X_1 имеет тип (τ_1^1, τ_1^2) а особая точка $S_2 = h(S_1)$ поля X_2 имеет тип (τ_2^1, τ_2^2), то $\tau_2^1\tau_2^2 = \tau_1^1\tau_1^2$. Гомеоморфизм h переводит $\omega(\alpha)$-предельные множества траекторий поля X_1, принадлежащих $\mathbb{R}^2$, в $\omega(\alpha)$-предельные множества траекторий поля X_2. Поэтому $\tau_1^2 = \tau_2^2$. Но тогда типы (τ_1^1, τ_1^2) и (τ_2^1, τ_2^2) особых точек S_1 и S_2 совпадают. Поскольку $h|_{\partial\mathbb{K}} : \partial\mathbb{K} \to \partial\mathbb{K}$ – гомеоморфизм, то он либо сохраняет, либо обращает циклический порядок особых точек на $\partial\mathbb{K}$. Следовательно, типы векторных полей X_1 и X_2 либо совпадают, либо противоположны.

5. Доказательство теорем 3 и 4. Пусть $n = 2k + 1$. Зададим векторные поля $Y, Z \in \mathrm{HP}_n$, положив

$$Y(x, y) = x(x^2 + y^2)^k\, \partial/\partial x + y(x^2 + y^2)^k\, \partial/\partial y,$$
$$Z(x, y) = -y(x^2 + y^2)^k\, \partial/\partial x + x(x^2 + y^2)^k\, \partial/\partial y.$$

Сначала докажем теорему 3. Для векторного поля $Y + Z$ функции $R_{Y+Z}(\varphi) \equiv 1$ и $\Phi_{Y+Z}(\varphi) \equiv 1$. Поэтому поле $Y + Z$ не имеет бесконечно удаленных особых точек, а $h(Y + Z) = -2\pi < 0$. Таким образом, $Y + Z \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, $\mathrm{T}(Y + Z) = (1, -1)$. Аналогично имеем $-Y + Z \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, $\mathrm{T}(-Y + Z) = (1, 1)$, $Y - Z \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, $\mathrm{T}(Y - Z) = (-1, -1)$ и $-Y - Z \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$, $\mathrm{T}(-Y - Z) = (-1, 1)$. Тем самым, теорема 3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Так как все траектории векторного поля $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ при $h(X) < 0$ ($h(X) > 0$) α-предельны (ω-предельны) к точке O и ω-предельны (α-предельны) к $\partial\mathbb{K}$ [5], то утверждение 2) теоремы очевидно. Докажем утверждение 1) теоремы.

Пусть C – компонента связности множества $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, состоящая из векторных полей, не имеющих бесконечно удаленных особых точек. Так как $\Phi_V(\varphi)$ и $h(V)$ – непрерывные функции соответственно на $[0, 2\pi] \times \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ и $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, то тип $\mathrm{T}(V)$ непрерывно зависит от векторного поля $V \in C$ и потому постоянен для всех $V \in C$.

Для доказательства того, что два векторных поля из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющих тип $(1, -1)$, принадлежат одной компоненте связности множества $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, достаточно показать, что любое векторное поле $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ с $\mathrm{T}(X) = (1, -1)$ можно соединить в $X \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ путем с векторным полем $Y + Z$.

Пусть $R(\varphi) = R_X(\varphi)$, $\Phi(\varphi) = \Phi_X(\varphi)$. Выберем число

$$M > \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |R(\varphi)|. \tag{22}$$

Для любого $\theta \in I = [0, 1]$ имеем $\Phi_{X+\theta MY}(\varphi) = \Phi(\varphi)$, $R_{X+\theta MY}(\varphi) = R(\varphi) + \theta M$. Поскольку $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ $\Phi(\varphi) > 0$, а $h(X) < 0$, то

$$h(X + \theta MY) = -\int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi) + \theta M}{\Phi(\varphi)}\, d\varphi = h(X) - \int_0^{2\pi} \frac{\theta M}{\Phi(\varphi)}\, d\varphi < 0.$$

Таким образом, $\forall \theta \in I\; X + \theta MY \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$. Отображение $g_1 : I \ni \theta \mapsto X + \theta MY$ – путь в $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, соединяющий векторные поля X и $X + MY$.

Для любых $\theta \in I$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеем с учетом неравенства (22)

$$\Phi_{X+MY+\theta Z}(\varphi) = \Phi(\varphi) + \theta > 0, \quad R_{X+MY+\theta Z}(\varphi) = R_{X+MY}(\varphi) = R(\varphi) + M > 0.$$

Поэтому

$$h(X + MY + \theta Z) = -\int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi) + M}{\Phi(\varphi) + \theta}\, d\varphi < 0 \quad \text{и} \quad X + MY + \theta Z \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n.$$

Отображение $g_2 : I \ni \theta \mapsto X + MY + \theta Z$ – путь в $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, соединяющий векторные поля $X + MY$ и $X + MY + Z$.

Для любых $\theta \in I$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Phi_{\theta X+MY+Z}(\varphi) = \theta\Phi(\varphi) + 1 > 0, \quad R_{\theta X+MY+Z}(\varphi) = \theta R(\varphi) + M > 0.$$

Поэтому $h(\theta X + MY + Z) < 0$ и $\theta X + MY + Z \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$. Следовательно, $g_3 : I \ni \theta \mapsto (1 - \theta)X + MY + Z$ – путь в $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, соединяющий векторные поля $X + MY + Z$ и $MY + Z$. Для любых $\theta \in I$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Phi_{((1-\theta)M+\theta)Y+Z}(\varphi) = 1 > 0, \quad R_{((1-\theta)M+\theta)Y+Z}(\varphi) = (1 - \theta)M + \theta > 0.$$

Поэтому $h(((1 - \theta)M + \theta)Y + Z) < 0$ и $((1 - \theta)M + \theta)Y + Z \in \Sigma^0\mathrm{HP}_n$. Следовательно, $g_4 : I \ni \theta \mapsto ((1 - \theta)M + \theta)Y + Z$ – путь в $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, соединяющий векторные поля $MY + Z$ и $Y + Z$.

В итоге получаем, что путь $g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4$ – произведение путей g_1, g_2, g_3 и g_4 - соединяет в $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ поле X с полем $Y + Z$.

Аналогично доказывается, что два векторных поля из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$, имеющих общий тип $(1, 1)$ или $(-1, 1)$ или $(-1, -1)$, также принадлежат к одной компоненте связности множества $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$.

Утверждение 1) теоремы 4 доказано.

6. Заключение. В работе изучена структура множества $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ грубых однородных полиномиальных векторных полей степени $n \geq 1$, заданных на плоскости. Для векторных полей из $\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ введена характеристика – тип векторного поля, являющийся его полным топологическим инвариантом. Два векторных поля из $\Sigma^0 HP_n$ топологически эквивалентны на проективной плоскости тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны. Основной результат работы состоит в том, что два векторных поля принадлежат одной связной компоненте множества $\Sigma^0 HP_n$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. 1937. Грубые системы. Доклады АН СССР, 14(5): 247–250.
2. Андронов, А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. 1966. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука. 568.
3. Гринес В. З., Починка О. В. 2011. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Москва–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика. 424.
4. Ошемков А. А., Шарко В. В. 1998. О классификации потоков Морса – Смейла на двумерных многообразиях. Мат. сб., 189(8): 93–140. DOI: 10.4213/sm341
5. Ройтенберг В. Ш. 2004. О связных компонентах множества векторных полей Морса – Смейла на двумерных многообразиях. Труды вторых Колмогоровских чтений, Ярославль, Изд-во ЯГПУ: 352 – 358.
6. Ройтенберг В. Ш. 2014. О типичных полиномиальных векторных полях на плоскости. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 4 (147): 13–21.
7. Ройтенберг В. Ш. 2018. О типичных однородных векторных полях на плоскости. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 46(2): 15-–26. DOI 10.21685/2072-3040-2018-2-2
8. Ройтенберг В. Ш. 2019. О бифуркациях однородных полиномиальных векторных полей на плоскости. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(2): 398-–404. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202
9. Ройтенберг В. Ш. 2020. О структуре пространства однородных полиномиальных дифференциальных уравнений на окружности. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математика. Механика. Физика», 12(1): 21–30. DOI: 10.14529/mmph200203
10. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. 1977. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М., Наука. 488.
11. Gutierrez C., Melo W. 1977. The connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds. Lecture Notes in Mathematics. 597. Springer-Verlag, 230—251.
12. Hayashi S. 1997. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1-Stability and Ω -Stability Conjectures for Flows. Annals of Mathematics, 145(1): 81—137.
13. Peixoto M. M. 1962. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 1(2): 101–120.
14. Peixoto M. M. 1973. On the classification of flows on two-manifolds. Dynamical Systems, Academic Press, 389-419.
15. Robinson C. 1974. Structural stability of vector fields. Annals of Mathematics, 99(1): 154–175.
16. Robinson C. 1976. Structural stability of diffeomorphisms. J. Diff. Equations, 22(1): 28–73.

References

1. Andronov A. A., Pontrjagin L. S. 1937. Grubye sistemy [Rough systems]. Doclady AN SSSR, 14(5): 247–250.
2. Grines V., Pochinka O. 2011. Vvedenie v topologicheskuju klassifikaciju kaskadov na mnogoobrazijah razmernosti dva i tri. [Introduction to the topological classification of cascades on manifolds of dimension two and three]. Moskva–Izhevsk, Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika Publ. 424.
3. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. 1966. Kachestvennaja teorija dinamicheskih sistem vtorogo porjadka [The qualitative theory of dynamical systems of second order]. Moscow, Nauka Publ. 568.

4. Oshemkov A. A., Sharko V. V. 1998. O klassifikacii potokov Morsa — Smejla na dvumernyh mnogoobrazijah [Classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds]. Sb. Math. 189(8): 1205–1250. DOI: 10.4213/sm341

5. Roitenberg V. Sh. 2004. O svjaznyh komponentah mnozhestva vektornyh polej Morsa–Smejla na dvumernyh mnogoobrazijah [On connected components of Morse–Smale vector fields on two-dimensional manifolds]. Trudy vtoryh Kolmogorovskih chtenij, Yaroslavl, YaGPU Publ: 352–358.

6. Roitenberg V. Sh. 2014. O tipichnyh polinomial'nyh vektornyh poljah na ploskosti [On generic polynomial vector fields on the plane]. Bulletin of the Adyghe State University. Series: Natural-Mathematical and Technical Sciencies, 4 (147): 13–21.

7. Roitenberg V. Sh. 2018. O tipichnyh odnorodnyh vektornyh poljah na ploskosti [On generic homogeneous vector fields on the plane]. University proceedings. Volga region. Physical and mathematical siences, 46(2): 15–26. DOI 10.21685/2072-3040-2018-2-2

8. Roitenberg V. Sh. 2019. O bifurkacijah odnorodnyh polinomial'nyh vektornyh polej na ploskosti [On bifurcations of homogeneous polynomial vector fields on the plane]. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, 51(2): 398—404. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202

9. Roitenberg V. Sh. 2020. O strukture prostranstva odnorodnyh polinomial'nyh differencial'nyh uravnenij na okruzhnosti [On the structure of the space of homogeneous polynomial differential equations on a circle]. Bulletin of the South Ural University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics, 12(2): 21–30. DOI: 10.14529/mmph200203

10. Rochlin V. A., Fuchs D. B. 1977. Nachal'nyj kurs topologii. Geometricheskie glavy [Basic course of topology. Geometric chapters]. Moscow, Nauka Publ. 488.

11. Gutierrez C., Melo W. 1977. The connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds. Lecture Notes in Mathematics, 597. Springer-Verlag: 230-–251.

12. Hayashi S. 1997. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1-Stability and Ω -Stability Conjectures for Flows. Annals of Mathematics, 145(1): 81-–137.

13. Peixoto M. M. 1962. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 1(2): 101–120.

14. Peixoto M. M. 1973. On the classification of flows on two-manifolds. Dynamical Systems, Academic Press: 389–419.

15. Robinson C. 1974. Structural stability of vector fields. Annals of Mathematics, 99(1): 154—175.

16. Robinson C. 1976. Structural stability of diffeomorphisms. J. Diff. Equations, 22(1): 28—73.

Получена 12.08.2020

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Ярославский государственный технический университет

Московский проспект, 88, Ярославль, 150023, Россия

E-mail: vroitenderg@mail.ru