Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, № 2, С. 71–85.

УДК 517.952 DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОПЕРАТОРНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, 362025, Россия

Университет Северного Иллинойса,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Воронежский государственный технических университет,
г. Воронеж, 394006, Россия

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Аннотация. В работе предложена и обосновывается модификация метода подобных операторов в случае, если на собственные значения невозмущенного оператора не накладывается условие роста лакун между ними. Эта модификация отлична от традиционной схемы, используемой, например, при исследовании оператора Хилла. Все выкладки приводятся на языке матриц операторов. В рассматриваемую схему укладываются, например, дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией, операторы Дирака.
Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, спектр, спектральный проектор.

Благодарности: Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00732.

Для цитирования: Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Прикладная математика & Физика, 52(2): 71–85. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85.

THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE SPECTRAL ANALYSIS OF INFINITE OPERATOR MATRICES

A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova

(Article submitted by a member of the editorial board C. M. Sitnik)

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
Nizhny Novgorod, 603950, Russia

Northern Illinois University,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Voronezh state technical University,
Voronezh, 394006, Russia

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Received April 8, 2020

Abstract. Method of similar operators is a useful tool for studying the spectral properties of various classes of perturbed differential operators. In this paper, we exhibit a modification of the method which applies for a large class of operators. In particular, the spectrum of the unperturbed operator is not assumed to have increasing lacunas, which is a typical assumption for Hill operators. The method is presented in terms of the operator matrices. It can be used, for example, for first order differential operators with an involution, Dirac operators.
Key words: similar operator method, first order differential operator, spectrum, spectral projection.

Acknowledgements: The work is supported in part by the Russian Federal Property Fund, project 19-01-00732.

For citation: Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 71–85 (in Russian).
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85.

---

1. Введение. В серии работ А. П. Хромова и М. Ш. Бурлуцкой (см. [Бурлуцкая, 2014], [Бурлуцкая, Хромов, 2014] и библиографию в них) изучались спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и гладким потенциалом. Рассматривались различные места нахождения инволюции: при производной или при потенциале, а также различные краевые условия. Указанные операторы сводились к оператору Дирака. Другим, альтернативным, методом получения спектральных характеристик является метод подобных операторов. С его помощью получены результаты работ [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Баскаков, Ускова, 2018], [Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova , 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. Однако в этих работах не было построено общей модификации метода подобных операторов, пригодной для применения к дифференциальным операторам первого порядка, как с инволюцией, так и других. Например, операторов Дирака или интегро-дифференциальных операторов первого порядка. Такая модификация появилась в [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. Но она опять получилась достаточно общей попыткой уложить в одну схему дифференциальные операторы, и первого и второго порядка, а также теорию расщепления линейных операторов. Поэтому необходимость появления общей и одновременно простой модификации метода подобных операторов, в которую идеально ложились дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией и операторы Дирака, осталась. Именно такая модификация и приводится ниже в данной работе. Еще раз подчеркнем, что данная работа не есть перевод на русский язык статьи [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], хотя, безусловно, они имеют много общего. Главное их отличие в том, что в [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019] – более общая схема, а в данной работе – конкретная.

Все результаты исследования удобно в нашем случае проводить и формулировать в терминах операторных матриц рассматриваемых операторов.

Данная статья состоит из трех частей, перед читателем находится первая часть, состоящая из теоретических результатов. Во второй и третьей части будут собраны конкретные примеры применения общей схемы. Заметим, что они также отличается от работы [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Перейдем к конкретной постановке задачи.

Пусть H – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, и $\mathbb{J}$ – некоторое непустое подмножество из $\mathbb{Z}$. Введем в рассмотрение нормальный линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset H \to H$, имеющий плотную область определения $D(A)$, спектр $\sigma(A)$ и резольвентное множество $\rho(A)$. Спектральным множеством будем называть замкнутое отделенное подмножество из $\sigma(A)$. Напомним [Рудин У. 1975], что оператор $A : D(A) \subset H \to H$ называется нормальным, если $\overline{D(A)} = H$ и для оператора $A^* : D(A^*) \subset H \to H$ выполняются условия: $D(A) = D(A^*)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для всех $x \in D(A)$.

Пусть оператор A имеет полупростые собственные значения $\lambda_n, n \in \mathbb{J}$, конечной кратности, не превосходящей некоторого числа $N_0 \in \mathbb{N}$. При этом всюду в статье считается выполненным условие

$$dist(\{\lambda_n\}, \sigma(A)\backslash\{\lambda_n\}) \geq \beta > 0 \tag{1}$$

(условие разделенности спектра оператора A). Отметим, что из этих условий вытекает компактность резольвенты оператора A.

Далее, для $n \in \mathbb{J}$, символом

$$P_n = P(\{\lambda_n\}, A) \tag{2}$$

обозначим проектор Рисса, построенный по одноточечному спектральному множеству $\sigma_n = \{\lambda_n\}, n \in \mathbb{J}$, оператора A. Отметим, что совокупность ортогональных проекторов $\{P_n, n \in \mathbb{J}\}$ образует дизъюнктную систему операторов, являющуюся разложением единицы, т. е. $P_mP_n = 0$ при $m \neq n$, и $\sum_{n\in\mathbb{J}} P_nx = x$, где ряд сходится безусловно для любого $x \in H$.

Далее символом $\mathcal{L}_A(H)$ обозначим банахово пространство операторов, подчиненных оператору A. Линейный оператор $B : D(B) \subset H \to H$ отнесем к $\mathcal{L}_A(H)$, если $D(A) \subset D(B)$ и $\|Bx\| \leq C(\|x\|+\|Ax\|)$, для всех $x \in D(A)$ и некоторого $C \geq 0$. Обычно, без ограничения общности, полагают $D(B) = D(A)$. Норма в $\mathcal{L}_A(H)$ задается формулой: $\|B\|_A = \inf\{C \geq 0 : \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|)$ для любого $x \in D(A)\}$.

Символом $End\, H$ будет обозначаться банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H, с нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Xx\|, x \in H, X \in End\, H$. Пространство $End\, H$ непрерывно вложено в $\mathcal{L}_A(H)$, если $\overline{D(A)} = H$.

Символом I обозначим тождественный оператор в $End\, H$, а символами $I_k, k \in \mathbb{J}, I_{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$– тождественные операторы в подпространствах $H_k = ImP_k, k \in \mathbb{J}$, и $H_{(m)} = ImP_{(m)}$, где $P_{(m)} = \sum\limits_{|i|<m, i\in\mathbb{J}} P_i, m \in \mathbb{Z}_+$, соответственно.

Отметим, что принадлежность оператора B пространству $\mathcal{L}_A$(H) означает ограниченность оператора $B(A - \lambda I)^{-1}$ для каждого $\lambda \in \rho(A)$. При этом в $\mathcal{L}_A$(H) можно ввести эквивалентные нормы, положив $\|B\|_A = \|B(A - \lambda I)^{-1}\|$, $\lambda \in \rho(A)$.

В работе рассматривается оператор $A - B$, где $B \in \mathcal{L}_A(H)$. Дополнительные условия на операторы A и B будут приведены в §2. К оператору $A - B$ применяется метод подобных операторов [Баскаков, Ускова, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. В основе метода лежит преобразование подобия исследуемого оператора к оператору вида

$$\tilde{A} = A - P_{(n)}YP_{(n)} - \sum_{|i|>n, i\in\mathbb{J}} P_iYP_i, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cup \{0\}, \tag{3}$$

где ограниченный оператор Y есть решение некоторого нелинейного операторного уравнения (подробности см. в §3, 5). Преимущество онератора $\tilde{A}$ из формулы (3) заключается в том, что подпространства $H_k, |k| > n, k \in \mathbb{J}$ и $H_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, являются для него инвариантными.

Далее оператор $A - B$ будем называть возмущенным оператором, оператор A – невозмущенным оператором, а оператор B – возмущением.

Метод подобных операторов имеет давпюю историю [Баскаков, 1983], [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011] и применяется для исследования различных классов дифференциальных и разностных операторов (см. [Баскаков, 1983], [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Баскаков А. Г., Поляков Д. М. 2017], [Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. 2018], Гаркавенко, Ускова, 2017. В данной работе приводится модификация метода подобных операторов для невозмущепного оператора у которого собственные значения «не разбегаются», в отличии от, например, работы [Баскаков, Поляков, 2017]. Это создает определенные трудности в применении метода подобных операторов. Поэтому приходится вводить некоторую весовую последовательность, отвечающую за скорость убывания матричных элементов оператора по строкам и по столбцам и получать условия применимости в терминах этой последовательности. Впервые весовая последовательность была введена в [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], результаты статей [Баскаков, Ускова, 2018], [Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], также получены с её использованием.

2. Пространства операторов. Условия на операторы A и B. Введем понятия операторной матрицы и матрицы операторов [Баскаков А. Г., 1997], [Baskakov., Krishtal, 2014], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], соответствующие некоторому разложению единицы проекторами $\{E_j, j \in \mathbb{J}\}$.

Определение 2.1. *Операторной матрицей $\mathcal{X} = (X_{ij})_{i,j\in\mathbb{J}}$ называется отображение $\mathcal{X} : \mathbb{J} \times \mathbb{J} \to End\, H$. При этом операторная матрица $\mathcal{X} = (X_{ij})$ ассоциирована с разложением единицы $\{E_j, j \in \mathbb{J}\}$, если $X_{ij} = P_iX_{ij}P_j$, $i, j \in \mathbb{J}$.*

Определение 2.2. *Матрицей оператора $X \in \mathcal{L}_A(H)$ относительно разложения единицы проекторами $\{P_j, j \in \mathbb{J}\}$, определенными формулой* (2), *называется операторная матрица $\mathcal{X} = (X_{ij})$, для которой $X_{ij} = P_iXP_j$, $i, j \in \mathbb{J}$.*

Определение 2.2 корректно, так как $P_iXP_j \in End\, H, i, j \in \mathbb{J}$.

Каждая операторная матрица $\mathcal{X}$, ассоциированная с разложением единицы $\{P_j, j \in \mathbb{J}\}$, определяет оператор $X : D(X) \subset H \to H$. При этом предполагается, что область определения оператора X, задаваемого матрицей $\mathcal{X}$, является максимальной из возможных. Пусть $\mathcal{X}$ – некоторая операторная матрица, ассоциированная с разложением единицы $\{P_j, j \in \mathbb{J}\}$. Определим оператор $X : D(X) \subset H \to H$, полагая что $x \in H$ принадлежит $D(X)$ и $Xx = y \in H$, если $\sum\limits_{n,m\in\mathbb{J}} X_{nm}x = \sum\limits_{n,m\in\mathbb{J}} X_{nm}P_mx$ безусловно сходится к y. Отметим, что если $X \in \mathcal{L}_A(H)$, то его матрица $(X_{ij}), i, j \in \mathbb{J}$, определяет оператор, являющийся расширением оператора X. Также заметим что, из равенства операторной матрицы пулю следует, что соответствующий оператор из $\mathcal{L}_A(H)$ пулевой. Кроме того, матрица $(A_{ij}), i, j \in \mathbb{J}$, невозмущенного оператора A диагональна и $A_{ii} = \lambda_iI_i, i \in \mathbb{J}$, $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

В настоящей работе все доказательства и результаты будут формулироваться в терминах матриц рассматриваемых операторов. Для простоты мы будем отождествлять оператор с его матрицей относительно введенной формулой (2) системы спектральных проекторов (проекторов Рисса) невозмущенного оператора A.

Далее нам потребуется понятие диагоналей оператора $X \in \mathcal{L}_A(H)$. Операторы $X_p \in \mathcal{L}_A(H), p \in \mathbb{Z}$, определяемые матрицами

$$(X_p)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i - j = p, \\ 0, & i - j \neq p. \end{cases}$$

Матрицы X_p назовем p-ми диагоналями оператора X из $\mathcal{L}_A(H)$.

Пиже нами будет использоваться двусторонний идеал $\mathfrak{S}_2(H) \subset End\, H$ операторов Гильберта-Шмидта. Через $\|X\|_2, X \in \mathfrak{S}_2(H)$ обозначим норму Гильберта-Шмидта.

Отметим, что для X из $\mathfrak{S}_2(H)$ его норму Гильберта-Шмидта можно выразить через норму матричных элементов формулой

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{J}} \|X_{ij}\|_2^2. \tag{4}$$

Нужные нам свойства идеала $\mathfrak{S}_2(H)$ можно найти в [Гохберг, Крейн, 1965], [12].

Перейдем к условиям на операторы A и B, накладываемым в данной работе для применения метода подобных операторов.

Напомним, что спектр $\sigma(A)$ оператора A представим в виде $\sigma(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{J}}\{\lambda_n\}$. Полупростота собственных значений $\lambda_n, n \in \mathbb{J}$ означает, в частности, выполнение равенств

$$AP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{J}. \tag{5}$$

Далее будет считаться всюду выполпенпым условие:

$$\sup_{i\in\mathbb{J}} \sum_{n\in\mathbb{J}/\{i\}} |\lambda_i - \lambda_n|^{-2} < \infty. \tag{6}$$

Отметим, что условие разделепности спектра (1) пепосредствепно вытекает из (6).

Также считаются выполнепными следующие условия:

1)

$$\sum_{i\in\mathbb{J}} \|B_{ii}\|_2^2 < \infty; \tag{7}$$

2)

$$\sum_{i,j\in\mathbb{J},i\neq j} \frac{\|B_{ij}\|_2^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} < \infty; \tag{8}$$

3)

$$\sum_{i,j\in\mathbb{J}} \left\| \sum_{l\in\mathbb{J},l\neq j} \frac{B_{il}B_{lj}}{\lambda_l - \lambda_j} \right\|_2^2 < \infty; \tag{9}$$

4) для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$, что

$$\|B(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon. \tag{10}$$

В некоторых случаях мы не будем проверять выполнение условия (7) (см. замечание 4.1).

Отметим, что поставленные выше условия на операторы A и B автоматически выполнялись или предполагались в работах [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Баскаков., Ускова, 2018], [Криштал, Ускова, 2019], [Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Замечание 2.1. Для того, чтобы возмущение B принадлежало идеалу операторов Гильберта – Шмидта $\mathfrak{S}_2(H)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i,j\in\mathbb{J}} \|B_{ij}\|_2^2 < \infty. \tag{11}$$

При этом условия (7)–(10) выполняются автоматически и их проверка не проводится.

Замечание 2.2. Выполнение условия (7) означает, что оператор B_0, являющийся нулевой диагональю оператора B, принадлежит $\mathfrak{S}_2(H)$ опять же в силу (4). По поводу формул (8), (9) см. замечание 4.2.

3. Метод подобных операторов. Абстрактная схема. Различные преобразования подобия широко используются в математике, начиная с приведения конечных матриц к диагональной форме. История и обзор операторов преобразования изложены, например, в работе [Ситник, Шишкина, 2019].

Определение 3.1. *Линейные операторы* $\mathcal{E}_1 : D(\mathcal{E}_1) \subset H \to H$ *и* $\mathcal{E}_2 : D(\mathcal{E}_2) \subset H \to H$ *называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор* $V \in End\, H$, *такой, что* $VD(\mathcal{E}_2) = D(\mathcal{E}_1)$ *и* $\mathcal{E}_1 V x = V\mathcal{E}_2 x, x \in D(\mathcal{E}_2)$. *Оператор* V *называется оператором преобразования оператора* $\mathcal{E}_1$ *в оператор* $\mathcal{E}_2$. *Оператор* V *также иногда называют сплетающим оператором.*

Подобные операторы интересны и широко используются в связи с тем, что зная спектральные свойства одного оператора, можно получить соответствующие свойства другого оператора.

Лемма 3.1. *Пусть операторы* $\mathcal{E}_1 : D(\mathcal{E}_1) \subset H \to H$ *и* $\mathcal{E}_2 : D(\mathcal{E}_2) \subset H \to H$ *подобны и* $\mathcal{E}_1 V = V\mathcal{E}_2$. *Тогда:*

1) их образы $Im\mathcal{E}_1$ *и* $Im\mathcal{E}_2$ *связаны равенством* $Im\mathcal{E}_1 = V(Im\mathcal{E}_2)$;

2) их спектры $\sigma(\mathcal{E}_1)$ *и* $\sigma(\mathcal{E}_2)$ *такие, что* $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$;

3) пусть e *– собственный вектор оператора* $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_2 e = \lambda e$, *тогда* Ve *— собственный вектор оператора* $\mathcal{E}_1$, *причем* $\mathcal{E}_1 Ve = \lambda Ve$;

4) пусть $Q \in End\,H$ – спектральный проектор, построенный по некоторому спектральному множеству σ оператора $\mathcal{E}_2$. Тогда спектральный проектор $\widetilde{Q} \in End\,H$, построенный по спектральному множеству σ для оператора $\mathcal{E}_1$, определяется равенством

$$\widetilde{Q} = VQV^{-1}.$$

Немного затронем вопросы истории метода подобных операторов. Первоначально этот метод предложил К. О. Фридрихс [Данфорд, Шварц, 1974] для исследования возмущенных самосопряженных операторов с непрерывным спектром (метод Фридрихса). Р. Тернер развил метод Фридрихса (см. [Данфорд, Шварц, 1974]) для операторов с дискретным спектром. А. Г. Баскаков продолжил развитие метода Фрпдрихса с учетом пдей Пуанкаре, Крылова, Боголюбова (см. [Баскаков, 1983], [Баскаков, Поляков, 2017], [Баскаков., Ускова, 2018]. В работах [Баскаков, 1985], [Баскаков, 1999] показана связь метода подобных операторов с заменой Крылова-Боголюбова. Отметим также, что метод подобных операторов имеет множество разновидностей. В данной работе основные положения метода будут излагаться в соответствии с [Баскаков, Ускова, 2018].

Мы далее будем называть трансформатором (термин М. Г. Крейна) оператор, действующий в пространстве операторов.

Основным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой (для невозмущепного оператора) тройкп. Она состоит из пространства $\mathcal{M}$ допустимых возмущений и двух трансформаторов $J \in End\,\mathcal{M}$ и $\Gamma : \mathcal{M} \to End\,H$.

Определение 3.2.[Баскаков, Ускова, 2018] *Для оператора A тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой и $\mathcal{M}$ — пространством допустимых возмущений, если выполняются следующие условия:*

1) $\mathcal{M}$ – банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное $\mathcal{L}_A(H)$, т. е. существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|X\|_A \le c\|X\|_*$ для любого $X \in \mathcal{M}$;

2) J и Γ – ограниченные трансформаторы и $J^2 = J$;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$. Для любого оператора X из пространства $\mathcal{M}$ выполнено равенство

$$A\Gamma X x - \Gamma X A x = (X - JX)x,$$

для каждого вектора $x \in D(A)$. Кроме того, $Y = \Gamma X$ – единственное решение уравнения

$$AY - YA = X - JX, \tag{12}$$

и $JY = 0$;

4) для любых операторов X и Y из $\mathcal{M}$ операторы $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y$ также принадлежат $\mathcal{M}$. Кроме того, существует постоянная $\gamma > 0$, которая удовлетворяет неравенствам

$$\|\Gamma\| \le \gamma \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \le \gamma\|X\|_*\|Y\|_*; \tag{13}$$

5) для всех X, Y из $\mathcal{M}$: $J((\Gamma X)JY) = 0$;

6) для любого оператора $X \in \mathcal{M}$ и произвольного $\epsilon > 0$ существует число λ_ϵ, которое принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ такое, что выполняется неравенство

$$\|X(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon. \tag{14}$$

Замечание 3.1. Согласно [Баскаков, 1983] условие 6) можно сформулировать так: для любого $X \in \mathcal{M}$, $Im\,\Gamma X \subset D(A)$ и $A\Gamma X \in End\,H$.

Пусть тройка $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — фиксированная допустимая тройка для оператора A.

Теорема 3.1. [Баскаков, Поляков, 2017] *Пусть $B \in \mathcal{M}$ и выполнено неравенство*

$$\|J\|\|B\|_*\gamma < 0.25, \tag{15}$$

то возмущенный оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ есть решение операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{16}$$

Оператор X_* может быть найден методом простых итераций, $X_0 = 0$, $X_1 = B, \ldots$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma X_* \in End\,H$ и $\Gamma X^* \in \mathcal{M}$. Отображение $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_* \le 3\|B\|_*\}$.

Возмущение B не обязано принадлежать нужному (удобному) пространству допустимых возмущений. В этом случае удобно сначала сделать предварительное преобразование подобия данного возмущенного оператора $A - B$ в такой оператор $A - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ уже есть элемент $\mathcal{M}$.

Предположение 3.1. *Для оператора $B \in \mathcal{L}_A(H)$ и пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ существуют операторы $M, N \in End\, H$ удовлетворяющие условиям:*
1)$\|N\| < 1$;
2)$ND(A) \subset D(A)$;
3)$BN, NM \in \mathcal{M}$;
4)$ANx - NAx = Bx - Mx, x \in D(A)$;
5) *для любого* $\epsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\epsilon \in p(A)$ *такое, что* $\|B(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon$.

Теорема 3.2. [Баскаков, Поляков, 2017] *Пусть предположение 3.1 имеет место. Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - M - C$, где $C = (I + N)^{-1}(BM - NM)$ и справедливо равенство*

$$(A - B)(I + N) = (I + N)(A - M - C). \tag{17}$$

Замечание 3.2. Отметим, что если $\mathcal{M}$ – двусторонний идеал в $End\, H$, то $C \in \mathcal{M}$. Если, более того, и $M \in \mathcal{M}$, тогда новое возмущение $M + C$ также принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathcal{M}$.

Замечание 3.3. В [Баскаков, Поляков, 2017] и других работах, например, в [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], Предложение 3.1 и теорема 3.2 сформулированы в других терминах.

В заключении параграфа сформулируем теорему, позволяющую ослабить условие (15) в частном случае $JB = 0$.

Теорема 3.3. *Пусть $B \in \mathcal{M}$ и $JB = 0$. Тогда если*

$$3\|J\|\|B\|_*\gamma < 1,$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ – решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - \Gamma XJ(B\Gamma X) + B,$$

и оно может быть найдено методом простых итераций, положив $X_0 = 0, X_1 = B, \ldots$.

4. Предварительное преобразование подобия. В рассмотренном нами случае в качестве пространства допустимых возмущений удобно брать идеал операторов Гильберта – Шмидта $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_2(H)$ (или более узкое пространство, определенное в §5.2). Однако, в общем случае $B \notin \mathfrak{S}_2(H)$, и поэтому необходимо сделать предварительное преобразование подобия оператора $A - B, B \in \mathcal{L}_A(H)$ в оператор $A - Q$, где $Q \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Важно отметить, что если B уже принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$, то предварительное преобразование подобия не требуется.

Подчеркнем еще раз, что основное и предварительное преобразования подобия мы будем строить с использованием матриц операторов, причем операторы часто будут отождествляется со своими матрицами. Подход к предварительному преобразованию подобия, изложенный ниже, отличается от [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Определим два линейных оператора M и N, участвующих в предварительном преобразовании подобия, своими матрицами, положив $M = (M_{ij}), N = (N_{ij})$,$i, j \in \mathbb{J}$ где

$$M_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad N_{ij} = \begin{cases} \frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \tag{18}$$

Наряду с операторами M и N рассмотрим две последовательности операторов $M^{(n)}$ и $N^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, положив

$$M_{ij}^{(n)} = \begin{cases} B_{ij}, i = j, \\ B_{ij}, \max\{|i|, |j|\} \leq n, \\ 0, \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \qquad N_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, i \neq j \text{ и } \min(|i|, |j|) \geq n, \\ 0, \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{19}$$

$N^{(0)} = N$, $M^{(0)} = M$. Важно, что операторы $M^{(n)} - M$ и $N^{(n)} - N$ есть операторы конечного ранга.

Операторы M, N, $N^{(n)}$ и $M^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, есть операторы Гильберта – Шмидта. Действительно,

$$\|M\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{J}} \|B_{ii}\|_2^2 < \infty, \tag{20}$$

$$\|N\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}, i \neq j} \frac{\|B_{ij}\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2}. \tag{21}$$

Также очевидно, что

$$(BN)_{ij} = \sum_{l \in \mathbb{J}, l \neq j} \frac{B_{il} B_{lj}}{\lambda_l - \lambda_j} \tag{22}$$

и, следовательно,

$$\|BN\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \| \sum_{l \neq j, l \in \mathbb{J}} \frac{B_{il} B_{lj}}{\lambda_l - \lambda_j} \|_2^2 < \infty. \tag{23}$$

Таким образом операторы N, M, BN принадлежат $\mathfrak{S}_2(H)$.

Посчитаем матричные элементы коммутатора $AN - NA$; учтем формулу (5):

$$P_i(AN - NA)P_j = (\lambda_i - \lambda_j) N_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, i \neq j, \\ 0, i = j. \end{cases}$$

Матричные элементы коммутатора $AN - NA$ совпадают с матричными элементами матрицы $B - M$, т. е. $AN - NA = B - M$. Покажем, что $N(D(A)) \subset D(A)$. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A), x \in D(A)$, тогда

$$x = (A - \lambda_0 I)^{-1} y, \quad y \in H,$$

$$N(A - \lambda_0 I)^{-1} y = \sum_{n,m \in \mathbb{J}, n \neq m} \frac{P_m Y P_n}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} =$$

$$= \sum_{n,m \in \mathbb{J}, n \neq m} \frac{P_m Y P_n}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_m - \lambda_0)} = \sum_{n,m \in \mathbb{J}, n \neq m} \frac{P_m Y P_n}{(\lambda_m - \lambda_0)(\lambda_n - \lambda_0)} =$$

$$= (A - \lambda_0 I)^{-1} N y + (A - \lambda_0 I)^{-1} (B - M) x = (A - \lambda_0 I)^{-1} (N y + (B - M) x) \in D(A).$$

Для операторов M и N выполнены все условия предположения 3.1. Напомним, что условие 5) предположения 3.1 есть условие (9) на оператор B.

Заметим, что элементы матрицы оператора $B(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}$ имеют вид $\left(\frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_\epsilon}\right)$, $i, j \in \mathbb{J}$, $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$.

Далее также будет использоваться следующая простая

Лемма 4.1. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ имеет место равенство:*

$$\lim_{n \to \infty} \|X - P_{(n)} X P_{(n)}\|_2 = 0.$$

Из теоремы 3.2 и леммы 4.1 вытекает

Теорема 4.1. *Есть такое целое $k \geq 0$, что возмущенный оператор $A - B$ подобен оператору*

$$A - M^{(k)} - C^{(k)} = A - Q; C^{(k)} = (I + N^{(k)})(BN^{(k)} - N^{(k)} M^{(k)}),$$

где $C^{(k)}, N^{(k)}, M^{(k)}, N^{(k)} M^{(k)} \in \mathfrak{S}_2(H)$ и имеет место равенство

$$(A - B)(I + N^{(k)}) = (I + N^{(k)})(A - Q), Q \in \mathfrak{S}_2(H).$$

Замечание 4.1. Условие (6) на оператор B, гарантирующее принадлежность оператора M идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$, в некоторых случаях можно обойти.

Приведем простой пример.

Пусть B_0 (нулевая диагональ оператора – возмущения B) определяется формулой $B_0 = b_0 I, b_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $M_0 = b_0 I \notin \mathfrak{S}_2(H)$. В этом случае отнесем оператор $b_0 I$ к невозмущенному оператору. Вместо A невозмущенным считаем $A - b_0 I$, и $M = 0$

Замечание 4.2. Из формул (20) и (23) следует, что операторы M и BN, матричные элементы которых определены формулами (18) и (22) соответственно, принадлежат идеалу операторов Гилберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(H)$. Поэтому в некоторых случаях удобнее вместо проверки неравенств (20) и (23) проверять принадлежность соответствующих операторов идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$. В таком случае условия (8), (9) на матрицу оператора B, обеспечивающие выполнение неравенств (20) и (23), также не проверяются.

5. Построение допустимых троек. В этом параграфе будут построены два различных семейства допустимых троек для невозмущенного оператора A с возмущением Q из идеала $\mathfrak{S}_2(H)$. Если у невозмущенного оператора A собственные значения «разбегаются», т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} dist(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \backslash \{\lambda_n\}) = \infty$, или норма $\|Q\|_2$ возмущения достаточно мала, то в качестве пространства допустимых возмущений можно использовать $\mathfrak{S}_2(H)$. В общем случае мы используем более «узкие» пространства $\mathcal{M}_Q$, построенные по возмущению Q. (см. §5.2)

5.1. Построение первого семейства допустимых троек $(\mathfrak{S}_2(H), J_m, \Gamma_m)$. В этом пункте в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ выступает идеал операторов Гильберта – Шмидта $\mathfrak{S}_2(H)$ из алгебры $End\, H$. Отметим, что можно считать A обратимым оператором, иначе, вместо A можно рассматривать оператор $A - \mu I, \mu \in \rho(A)$. Допустимые тройки для A и $A - \mu I$ будут одинаковыми.

Поскольку $\mathfrak{S}_2(H) \subset End\, H \subset \mathcal{L}_A(H)$, имеем $\|Xx\| = \|XA^{-1}Ax\| \leq \|XA^{-1}\|\|Ax\|$, $X \in \mathfrak{S}_2(H), x \in D(A)$. Таким образом, $\|X\|_A \leq \|XA^{-1}\|$.

Перейдем к построению трансформаторов $J, \Gamma \in End(\mathfrak{S}_2(H))$.

Для $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ определим трансформаторы JX и ΓX матрицами:

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \tag{24}$$

$$(\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \frac{X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, i \neq j, \\ 0, i = j. \end{cases} \tag{25}$$

Очевидно, что $JX = \sum\limits_{n \in \mathbb{J}} P_n X P_n$ и выписанный ряд безусловно сходится в $\mathfrak{S}_2(H)$, $\|JX\|_2^2 = \sum\limits_{i \in \mathbb{J}} \|P_i X P_i\|_2^2 \leq \|X\|_2^2$, т. е. из $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ следует, что $JX \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Покажем, что $\Gamma X \in \mathfrak{S}_2(H)$ для $X \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Действительно,

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}, i \neq j} \frac{\|X_{ij}\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leq \frac{1}{\beta^2} \sum_{i,j \in \mathbb{J}, i \neq j} \|X_{ij}\|_2^2 \leq \frac{1}{\beta^2} \|X\|_2^2, \tag{26}$$

где β определено формулой (1).

Теорема 5.1. *Тройка* $(\mathfrak{S}_2(H), J, \Gamma)$ *является допустимой тройкой для оператора* A.

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству леммы 3.5 из [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Наряду с трансформаторами $J, \Gamma \in End(\mathfrak{S}_2(H))$, введем в рассмотрение семейства трансформаторов $J_k, \Gamma_k \in End(\mathfrak{S}_2(H)), k \in \mathbb{Z}_+$, формулами

$$J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, X \in \mathfrak{S}_2(H) \tag{27}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - P_{(k)} \Gamma X P_{(k)} = \Gamma(X - J_k X), X \in \mathfrak{S}_2(H), \tag{28}$$

при этом $J_0 X = JX, \Gamma_0 X = \Gamma X$. Операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X, k \in \mathbb{Z}_+$, определены корректно, все вышеописанные ряды сходятся в $\mathfrak{S}_2(H)$. Отметим, что операторы $JX - J_k X$, $\Gamma X - \Gamma_k X$ есть операторы конечного ранга. Поэтому имеет место

Теорема 5.2. *Тройка* $(\mathfrak{S}_2(H), \Gamma_k X, J_k X)$ *является допустимой для оператора* A *тройкой при любом* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пз теоремы 5.1 и теоремы 3.1 следует

Теорема 5.3. *Пусть оператор* Q *такой, что*

$$\|Q\|_2 \leq \frac{\beta}{4}. \tag{29}$$

Тогда оператор $A - Q$ *подобен оператору* $A - JX_* = A - V$, X_*, $V \in \mathfrak{S}_2(H)$, *имеющему диагональную операторную матрицу. Имеет место равенство*

$$(A - Q)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - V),$$

где оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(H)$ *есть решение нелинейного операторного уравнения* (16).

Отметим, что довольно жесткое условие (29) можно снять в том случае, если собственные значения оператора A «разбегаются» т. е.

$$\lim_{n \to \infty} dist(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \backslash \{\lambda_n\}) = \infty. \tag{30}$$

Тогда рассматривается тройка $(\mathfrak{S}_2(H), J_n, \Gamma_n)$ и константа γ, аналогично (26), оценивается следующей величиной

$$\gamma = \gamma_n = (dist(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \backslash \{\lambda_n\}))^{-1},$$

при этом очевидно, что величину γ_n можно сделать малой.

Теорема 5.4. *При выполнении условия* (30). *Существует такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - Q$ подобен оператору блочно-диагонального вида $A - V$ и*

$$(A - Q)(I + \Gamma_m X_*) = (I + \Gamma_m X_*)(A - V),$$

где операторы $V, X_* \in \mathfrak{S}_2(H)$ и X_* есть решение нелинейного операторного уравнения (16) *с трансформаторами $J_m, \Gamma_m \in End(\mathfrak{S}_2(H))$, определенным формулами* (27), (28).

Из теорем 5.3, 5.4, 4.1 вытекает

Теорема 5.5. *Пусть выполняется условие теоремы 5.3 или 5.4. Тогда исходный оператор $A-B$ подобен оператору $A - V, V \in \mathfrak{S}_2(H)$, имеющему матрицу диагонального (блочно-диагонального) вида. Оператором преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - V$ служит оператор*

$$(I + M^{(k)})(I + \Gamma_m X_*) = I + U_{km},$$

где $U_{km} \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Отметим, что для оператора Дирака из [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Ускова, 2019] или дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией из [Баскаков, Ускова, 2018], [Криштал, Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018] предположения теорем 5.3 и 5.4 не выполнено в общем случае. Поэтому для них строится другое семейство допустимых троек.

5.2. Построение допустимой тройки $(\mathcal{M}_Q, J_k, \Gamma_k)$. Ниже будут использоваться пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}_Q$. По любому ненулевому оператору $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ построим двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max \left\{ \Big(\sum_{|k| \ge n, k \in \mathbb{J}} \|P_k X\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{4}}, \Big(\sum_{|k| \ge n, k \in \mathbb{J}} \|X P_k\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{4}} \right\}, n \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

Последовательность $(\alpha_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ обладает следующими свойствами:
1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X), n \in \mathbb{Z}$;
2) $\lim\limits_{|n| \to \infty} \alpha_n(X) = 0, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\alpha_n(X) \le 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;
4) $\alpha_n(X) \ge \alpha_{n+1}(X), n \ge 0$;
5) $\alpha_n(X) \ne 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, если $P_{(m)} X P_{(m)} \ne X$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$;
6) конечна величина

$$\sum_{n \in \mathbb{J}} \frac{\|X P_n\|_2^2 + \|X P_n\|_2^2}{(\alpha_n(X))^2}.$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $P_{(n)} Q P_{(n)} \ne 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ также зададим самосопряженный компактный оператор F:

$$F_X = \sum_{n \in \mathbb{J}} \alpha_n(X) P_n,$$

$F_X \in End\, H$ — функция от нормального оператора A и $\|F_X\|_\infty = \max |\alpha_n(X)| = 1$.

Пусть $F_Q = F$. Введем множество операторов $\mathcal{M}_Q \subset \mathfrak{S}_2(H)$, представляемых в виде

$$X = X_l F, \quad X = F X_r,$$

где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(H)$. Зададим в $\mathcal{M}_Q$ норму $\|X\|_{\mathcal{M}_Q} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$, $\|X\|_2 \le \|X\|_{\mathcal{M}_Q}, X \in \mathcal{M}_Q$.

Пз свойства 5) последовательности $(\alpha_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ следует, что $\mathcal{M}_Q$ является банаховым пространством.

Очевидно, что любой оператор X из $\mathfrak{S}_2(H)$ можно записать как

$$X = \Big(\sum_{n \in \mathbb{J}} \frac{1}{\alpha_n(X)} X P_n\Big) F_X = F_X \Big(\sum_{n \in \mathbb{J}} \frac{1}{\alpha_n(X)} P_n X\Big).$$

Следовательно, $Q \in \mathcal{M}_Q$.

Отметим, что последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ характеризует скорость убывания матричных элементов оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ по строкам и столбцам.

Поскольку $M_Q \subset \mathfrak{S}_2(H)$, то трансформаторы J_k и $\Gamma_k, k \ge 0$, задаваемые формулами (24), (25), (27), (28), определены и для операторов из $\mathcal{M}_Q$. Более того,

$$J_k(X_l F) = (J_k X_l) F, \quad J_k(F X_r) = F(J_k X_r),$$

$$\Gamma(X_l F) = (\Gamma_k X_l)F, \quad \Gamma_k(FX_r) = F(\Gamma_k X_r),$$

где $X_r, X_l \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Для оценки норм $\|\Gamma_k(XF)\|_2$ и $\|\Gamma_k(FX)\|_2, X \in \mathfrak{S}_2(H)$, рассмотрим две последовательности $(\alpha'_n), n \in \mathbb{N}$ и $(\tilde{\alpha}'_n), n \in \mathbb{N}$, определенные формулами

$$\alpha'_{n+1} = \max\{\lambda_l d_{jl}^{-1}, l, j \in \mathbb{J}, |l| \leq n, |j| > n\}, \tag{32}$$

$$\tilde{\alpha_n}' = (\beta^{-1}\alpha_n + \alpha'_n), n \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

где $d_{ij} = dist(\sigma_i, \sigma_j), i, j \in \mathbb{J}$. Последовательности (α'_n) и $(\tilde{\alpha}'_n)$ принадлежат пространству сходящихся к нулю последовательностей, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha'_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tilde{\alpha}'_n = 0. \tag{34}$$

Аналогично [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011, Лемма 3] доказывается

Лемма 5.1. *Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ и $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ имеют место оценки*

$$\max\{\|\Gamma_k(XF)\|_2, \|\Gamma_k(FX)\|_2\} \leq \tilde{a}'_{k+1}\|X\|_2.$$

Теорема 5.6. [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019, Proposition 3.7] *Тройка $(\mathcal{M}_Q, J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ и постоянная $\gamma = \gamma_k$ из определения 3.2 допускает оценку*

$$\gamma_k \leq \tilde{\alpha}'_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Из теоремы 5.6 и теоремы 3.1 следует

Теорема 5.7. *Пусть целое $k \geq 0$ такое, что выполняется равенство*

$$4\tilde{\alpha}'_{k+1}\|Q\|_{\mathcal{M}_Q} < 1. \tag{35}$$

Тогда оператор $A - Q$ подобен блочно-диагональному оператору $A - J_k X_* = A - P_{(k)}X_*P_{(k)} - \sum\limits_{|i|>k, i\in\mathbb{J}} P_i X_* P_i, = A - V$, где $X_* \in \mathcal{M}_Q$ – решение нелинейного уравнения (16)*. Оператор преобразования $A - Q$ в оператор $A - V$ есть оператор $I + \Gamma X_*$, $\Gamma X_* \in \mathcal{M}_Q \subset \mathfrak{S}_2(H)$.*

Теорема 5.8. *В условиях теоремы 5.7 исходный оператор $A-B$ подобен оператору $A-V$, где V принадлежит $\mathfrak{S}_2(H)$ и имеет матрицу блочно-диагонального вида. Оператором преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - V$ служит оператор*

$$(I + M^{(k)})(I + \Gamma_m X_*) = I + U_{km}, U_{km} \in \mathfrak{S}_2(H), X_* \in \mathfrak{S}_2(H), m \geq 0.$$

6. Оценки спектральных характеристик оператора $A - B$.

6.1. Оценки спектра. Из теорем 5.5 и 5.7 следует очевидная

Лемма 6.1. $\sigma(A - B) = \sigma(A - V) = \sigma(A - P_{(m)}X_*P_{(m)} - \sum\limits_{|i|>m} P_i X_* P_i)$, *где X_* – решение операторного уравнения* (16).

Особо подчеркнем, что оператор $A - V$ имеет блочно-диагональный вид, что существенно облегчает исследование его спектральных свойств.

Лемма 6.2. *В условиях теоремы 5.5 или 5.7 спектр оператора $A - B$ представим в виде объединения взаимно пересекающихся конечных множеств $\tilde{\sigma}_{(m)}$, $\tilde{\sigma}_i, |i| > m$, причем*

$$\tilde{\sigma}_{(m)} = \sigma((A - P_i X_*)|_{H_{(m)}}) = \sigma(\tilde{A}_{(m)}), \quad H_{(m)} = Im P_{(m)},$$

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma((A - P_i X_*)|_{H_i}) = \sigma(\tilde{A}_i), \quad H_i = Im P_i, |i| > m, i \in \mathbb{J},$$

$$\sigma(A - B) = \sigma(\tilde{A}_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i\in\mathbb{J}} \sigma(\tilde{A}_i \right) = \tilde{\sigma}_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i\in\mathbb{J}} \tilde{\sigma}_i \right).$$

Доказательство. Для доказательства равенства (36) необходимо проверить два включения

$$\sigma(A - B) \subset \tilde{\sigma}_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i\in\mathbb{J}} \tilde{\sigma}_i \right),$$

$$\tilde{\sigma}_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i \in \mathbb{J}} \tilde{\sigma}_i \right) \subset \sigma(A - B).$$

Оператор $A-V$ перестановочен со всеми операторами $P_{(m)}, P_i, |i| > m$ и пространства $H_{(m)}, H_i, |i| > m$ является для него инвариантными.

Из компактности резольвенты оператора $A - V$ следует компактность резольвенты оператора $A - B$. Поэтому если $\lambda_0 \in \sigma(A - V)$, то существует собственный вектор $x_0 \in D(A)$ такой, что $(A - V)x_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, имеют места равенства

$$\tilde{A}_{(m)} P_{(m)} x_0 = \lambda_0 P_{(m)} x_0, \quad \tilde{A}_i P_i x_0 = \lambda_0 x_0, |i| > m + 1.$$

Система проекторов $P_{(m)}, P_i, |i| > m$ образует разложение единицы: $x = P_{(m)}x + \sum\limits_{|i|>m} P_i x$, $x \in H$, хотя бы один из векторов $P_{(m)}x_0, P_i x_0, |i| > m$ ненулевой. Следовательно, λ_0 – собственное значение каждого из операторов $\tilde{A}_{(m)}, \tilde{A}_i, |i| > m$.

Пусть $\lambda_0 \in \sigma(\tilde{A}_l)$ для некоторого $|l| > m$, тогда $\tilde{A}_l P_l x_0 = \lambda_0 P_l x_0, x_0 \in D(A)$ – соответствующий вектор. Применим оператор $A - V$ к вектору $x_0 = P_l x_0, |l| > m$, $(A - V)x_0 = (A - P_{(m)} X_* P_{(m)} - \sum\limits_{|i|>m} P_i X_* P_i) P_l x_0 = (AP_l - P_l X P_l) P_l x_0 - \tilde{A}_l P_l x_0 = \lambda_0 P_l x_0$. Лемма доказана.

Замечание 6.1. В общем случае спектр оператора E с блочно-диагональной матрицей может не совпадать с объединением спектров его блоков E_i и даже с его замыканием. Приведем простой пример. У оператора E, заданного бесконечной блочно-диагональной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

спектральный радиус равен единице, и $\sigma(E_i) = \{0\}, i \in \mathbb{J}$.

Пз леммы 6.2 следует, что важной задачей является вычисление спектра операторов $\tilde{A}_i, |i| > k, i \in \mathbb{J}$.

Вернемся к оператору X_* – решению нелинейного операторного уравнения (16) и оценим его блок $P_i X_* P_i$, который и используется далее в спектральном анализе. Имеем:

$$P_i X_* P_i = P_i Q \Gamma_m X_* P_i + P_i Q P_i,$$

откуда

$$P_i X_* P_i = P_i Q P_i + P_i Q \Gamma_m Q P_i + P_i Q \Gamma_m (X - Q) P_i = P_i Q P_i + T_{0i},$$

где оператор T_{0i} принадлежит идеалу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(H)$. Отметим также, что из теоремы 4.1 следует, что

$$P_i Q P_i = P_i B P_i + P_i (I + N^{(k)})^{-1} (B N^{(k)} - N^{(k)} M^{(k)}) P_i = P_i B P_i + P_i B N^{(k)} P_i + T_{1i},$$

$$|i| > k, T_{1i} \in \mathfrak{S}_1(H).$$

Поэтому, собирая все вместе, получим равенства

$$P_i X_* P_i = P_i B P_i + P_i B N^{(k)} P_i + T_i, \; T_i \in \mathfrak{S}_1(H).$$

Напомним также, что элементы матрицы $BN^{(k)}$ определены формулой (18), и, следовательно, при $|i| > max\{k, m\}$ имеют место равенства

$$P_i B N^{(k)} P_i = \sum_{l \neq i} \frac{B_{il} B_{li}}{\lambda_l - \lambda_i}.$$

Определение 6.1. *Число $\hat{\lambda}$, определенное формулой*

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

называется взвешенным средним значением собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Перед тем, как сформулировать основной результат данного параграфа, введем следующее обозначение: $l_i = dimImP_i, i \in \mathbb{J}$, и пусть матрицы P_iBP_i и $P_iBN^{(k)}P_i, i \in \mathbb{J}, |i| > m$, состоят из элементов $b^i_{nj}, 1 \le n, j \le l_i$ и $\tilde{b}^i_{nj}, 1 \le n, j \le l_i$ соответственно.

Теорема 6.1. *Имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{l_i}\sum_{n=1}^{l_i} b^i_{nn} - \frac{1}{l_i}\sum_{n=1}^{l_i} \tilde{b}^i_{nn} + \beta_i, \text{ где } \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}). \tag{36}$$

Доказательство. Подпространства $ImP_i, |i| > m$, конечномерны, а в конечномерном подпространстве спектральный след равен матричному.

Следствие 6.1. *Если* $dimImP_i = 1, |i| > m, i \in \mathbb{J}$, *то для каждого из собственных значений* $\tilde{\lambda}_i, |i| > m$ *исходного оператора* $A - B$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - b_{ii} - \sum_{l \neq i} \frac{b_{il}b_{li}}{\lambda_l - \lambda_i} + \beta_i, \text{ где } \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}). \tag{37}$$

Результат теоремы 6.1 можно сформулировать несколько иначе, в русле работы [Баскаков, Поляков, 2017]. Приведем соответствующую формулировку. Для этого нам понадобится последовательность матриц

$$\Psi_n = P_iBP_i + P_iBN^{(k)}P_i = B_{ii} + \sum_{l \neq i} \frac{B_{il}B_{li}}{\lambda_l - \lambda_i}.$$

Теорема 6.2. *Имеет место оценка*

$$\sum_{|n|>k} \frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{l=1}^{l_i} |\tilde{\lambda}_{n,l} - \lambda_n|^2 < \infty,$$

где λ_n, $|n| > k$, *– собственные значения невозмущенного оператора* A, $\tilde{\lambda}_{n,l}$ *– собственные значения блока* $P_n(A - X_*)P_n$ *и последовательность* $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *определена формулой* (31). *Более того,*

$$\sigma_n = \{\lambda_n - \sigma(\Phi_n)\}, \quad |n| > k,$$

и Φ_n *есть такая матрица, что последовательность*

$$|\hat{\lambda}(\Phi_n) - \hat{\lambda}(\Psi_n)|, \quad |n| > k,$$

суммируема.

Замечание 6.2. Если к исходному оператору $A - B$ не применялось предварительное преобразование подобия (другими словами, если возмущение B изначально принадлежало идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$), то формулы (36) и (37) перепишутся в виде

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{l_i}\sum_{n=1}^{l_i} b^i_{nn} + \delta_i, \tag{38}$$

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - b_{ii} + \delta_i, \tag{39}$$

где последовательность δ_i принадлежит $\ell_1(\mathbb{J})$.

В формулах (38) и (39) учтено, что оператор $B\Gamma X_*$ принадлежит $\mathfrak{S}_1(H)$, если $B \in \mathfrak{S}_2(H)$.

6.2. Оценки спектральных проекторов. В этом параграфе изложение проводится в условиях подобия оператора $A-B$ оператору $A-Q, Q \in \mathfrak{S}_2(H)$. Напомним, что символом $P_l, l \in \mathbb{J}$, обозначены спектральные проекторы невозмущенного оператора A из формулы (2), $P_{(k)} = \sum\limits_{|i| \le k, i \in \mathbb{J}} P_i$. Обозначим через $\tilde{P}_n, |n| > k$, спектральные проекторы оператора $A - B$, построенные по спектральным множествам $\tilde{\sigma}_n$ из леммы 6.2, $\tilde{P}_{(k)} = \sum\limits_{|i| \le k} \tilde{P}_i$. Мы приходим к двум разложениям единицы:

$$I = P_{(k)} + \sum_{|i|>k} P_i, \quad I = \tilde{P}_{(k)} + \sum_{|i|>k} \tilde{P}_i.$$

Отметим, что $\tilde{P}_i = (I + U_{km})P_i(I + U_{km})^{-1}$, $\tilde{P}_{(k)} = (I + U_{km})P_{(k)}(I + U_{km})^{-1}$. Откуда

$$\tilde{P}_i - P_i = (U_{km}P_i - P_iU_{km})(I + U_{km})^{-1} \in \mathfrak{S}_2(H), \tag{40}$$

$$\tilde{P}_{(k)} - P_{(k)} = (U_{km}P_{(k)} - P_{(k)}U_{km})(I + U_{km})^{-1} \in \mathfrak{S}_2(H).$$

Для любого подмножества $\Omega \in \mathbb{Z}\backslash\{-k,\dots,-1,0,1,\dots,k\}$ (не обязательно конечного) через $P(\Omega)$ обозначим спектральные проекторы $P(\Omega) = \sum\limits_{j\in\Omega\cap\mathbb{J}} P_j$, $\tilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{j\in\Omega\cap\mathbb{J}} \tilde{P}_j$. Очевидно, что $\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (U_{km}P(\Omega) - P(\Omega)U_{km})(I + U_{km})^{-1} \in \mathfrak{S}_2(H)$. Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ определим величину

$$\alpha(\Omega, X) = \max_{n\in\Omega} \alpha_n(X), \quad \Omega \subset \mathbb{Z},$$

где последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ определена формулой (31). Отметим, что даже в случае использования первой допустимой тройки $(\mathfrak{S}_2(H), J_{(k)}, \Gamma_{(k)})$ для оценки проекторов удобнее брать последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Лемма 6.3. [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. *Имеет место оценка*

$$\max\{\|U_{km}P(\Omega)\|, \|P(\Omega)U_{km}\|\} \leq C(U_{km})\alpha(\Omega, U_{km}).$$

Теорема 6.3. [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. *Имеет место оценка*

$$\|\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \alpha(\Omega, Q)C(U_{km}, Q),$$

где константа $C(U_{km}, Q) > 0$ не зависит от Ω.

Доказательство теоремы 6.3 вытекает из (40) и леммы 6.3.

Список литературы

1. Баскаков А. Г. 1985. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов. Дифференц. уравнения, 21(4): 555–562.

2. Баскаков А. Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. матем. журн., 24(1): 27–39.

3. Баскаков А. Г. 1997. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. Изв. РАН. Сер. Матем., 61(6): 3–26. DOI: https://doi.org/10.4213/im164

4. Баскаков А. Г. 1999. Об абстрактном аналоге преобразования Крылова-Боголюбова в теории возмущений линейных операторов. Функц. анализ и его нрил., 33(2): 76–80. DOI: https://doi.org/10.4213/faa357

5. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. 2011. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом. Изв. РАН. Сер. матем., 75(3): 3–28. DOI: https://doi.org/10.4213/im4202

6. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. 2017. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом. Матем. сб., 208(1): 3–47. DOI: https://doi.org/10.4213/sm8637

7. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. 2018. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов. Уфимск. матем. жури., 10(3): 11–34.

8. Бурлуцкая М. Ш. 2014. О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 54(1): 3–12. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466914010050

9. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. Н. 2014. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией. Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика, Механика, Информатика, 14(1): 10–20. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-10-20

10. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. 2017. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом. Спб. электр. матем. нзв., 14: 673–689. DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.058

11. Гохберг И. Ц., Крейп М. Г. 1965. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 448 с.

12. Дапфорд Н., Шварц Дж. Т. 1974. Линейные операторы. Спектральные операторы, Т. 3. М., Мир, 662 с.

13. Кришталь И. А., Ускова Н. Б. 2019. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов. Сиб. электр. матем. изв., 16: 1091–1132. DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.076

14. Рудин У. 1975. Функциональный анализ. М., Мир, 449 с.

15. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. М., Физматлит, 220 с.

16. Ускова Н. Б. 2019. Спектральные свойства оператора Дирака с негладким потенциалом общего вида и группы операторов. Дифференц. уравнения, 55(8): 1154–1158. DOI: 10.1134/S0374064119080132

17. Baskakov A. G., Krishtal I. A. 2014. Memory estimation of inverse operators. J. Funct. Anal., 267: 2551–2605. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.07.025

18. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2018. Linear differential operator with an involution as a generation of an operator group. J. Oper. Matr., 12(3): 723–756. DOI: 10.7153/oam-2018-12-43

19. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. J. Math. Anal. Appl., 477: 930–960. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050

References

1. Baskakov A. G. 1985. The averaging method in the theory of perturbations of linear differential operator. Differ. Equ., 21(4): 555–562. (in Russian)

2. Baskakov A. G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J., 24(1): 17–32. (in Russian)

3. Baskakov A. G. 1997. Estimates for the elements of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. Izv. Math., 61(6): 1113–1135. DOI: 10.1070/IM1997v061n06ABEH000164. (in Russian)

4. Baskakov A. G. 1999. An abstract analog of the Krylov-Bogolyubov transformation in the perturbation theory of linear operators. Funct. Anal. Appl., 33(2): 144–147. DOI: 10.1007/BF02465196. (in Russian)

5. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izv. Math., 75(3): 445–469. DOI: 10.1070/IM2011v075n03ABEH002540. (in Russian)

6. Baskakov A. G., Polyakov D. M. 2017. The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potentials. Sb. Math., 208(1): 1–43. DOI: 10.1070/SM8637. (in Russian)

7. Baskakov A. G., Uskova N. B. 2018. Fourier method for first order differential equations with an involution and groups of operators. Ufa Math. J., 10(3): 11–34. DOI: https://doi.org/10.13108/2018-10-3-11. (in Russian)

8. Burlutskaya M. Sh. 2014. Mixed problem for the first-order partial differential equation with involution and periodic boundary conditions. Comput. Math. Math. Phys., 54(1): 1–10. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542514010059. (in Russian)

9. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. 2014. Mixed problem for simplex hyperbolic first-order equations with involution. Izv. Saratov Univ. (N.S.). Ser. Math. Mech. Inform., 14(1): 10–20 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-10-20

10. Garkavenko G. B., Uskova N. B. 2017. Method of similar operators in research of spectral properties of difference operators with growing potential. Siberian Electronic Math. Reports, 14: 673–689 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.058

11. Gohberg I. Ts., Krein M. G. 1969. An introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 378. (in Russian)

12. Dunford N., Schwartz J. T. 1973. Linear operators. Spectral operators. V. III. New York, Pure and Applied Mathematics, VII, Wiley-Interscience, 688 p. (in Russian)

13. Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Spectral properties of first-order differential operators with an involution and groups of operators. Siberian Electronic Math. Reports, 16: 1091–1132. DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.076. (in Russian)

14. Rudin W. 1973. Functional analysis. McGraw-Hill book company, 448. (in Russian)

15. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. The transmutation method for differential equations with a Bessel operator. Fizmatlit, 220 p (in Russian).

16. Uskova N. B. 2019. Spectral properties of the Dirac Operator with a nonsmooth potential of the general form and operator groups. Differ. Equ., 55(8): 1154–1158. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266119080135. (in Russian)

17. Baskakov A. G., Krishtal I. A. 2014. Memory estimation of inverse operators. J. Funct. Anal., 267:2551–2605. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.07.025

18. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2018. Linear differential operator with an involution as a generation of an operator group. J. Oper. Matr., 12(3): 723–756. DOI: 10.7153/oam-2018-12-43

19. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. J. Math. Anal. Appl., 477: 930–960. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050

Получена 08.04.2020

Баскаков Анатолий Григорьевич – профессор, ведущий научный сотрудник Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова

ул. Ватутина, 44–46, г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, Россия, 362025

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Криштал Илья Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Университета Северного Иллинойса

WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL, USA, 60115

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного технического университета

ул. 20 лет Октября, 84, г. Воронеж, Россия, 394006

E-mail: nat-uskova@mail.ru