Ю. П. Вирченко, Л. П. Данилова, Графы и алгебры симметрических функций, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 174, 20–36

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-174-20-36

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 174 (2020). С. 20–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-174-20-36

УДК 519.115+512.579+536.92

ГРАФЫ И АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2020 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, Л. П. ДАНИЛОВА**

Аннотация. Излагается алгебраическая техника оперирования со степенными рядами, коэффициенты которых представляются интегралами от симметрических функций f_n, определенных на декартовых степенях Ω^n множества Ω с мерой μ. При этом каждая из коэффициентных функций f_n получается посредством специального отображения из графов с n помеченными вершинами, принадлежащих фиксированному классу. Эта техника имеет применение в равновесной статистической механике и к задачам перечисления графов.

***Ключевые слова*:** граф, коммутативная алгебра, симметрическая функция, инвариантная мера, порождающая функция, мультипликативный функционал.

GRAPHS AND ALGEBRAS OF SYMMETRIC FUNCTIONS

© 2020 **YU. P. VIRCHENKO, L. P. DANILOVA**

Abstract. We describe an algebraic technique for operating with power series whose coefficients are represented by integrals of symmetric functions f_n defined on the Cartesian powers Ω^n of a set Ω with a measure μ. Moreover, each of the coefficient functions f_n is obtained by means of a special mapping from graphs with n labeled vertices belonging to a fixed class. This technique has application to equilibrium statistical mechanics and to problems of enumeration of graphs.

***Keywords and phrases*:** graph, commutative algebra, symmetric function, invariant measure, generating function, multiplicative functional.

***AMS Subject Classification*:** 82B05, 05C30, 13A99

1. Введение. В 1938 г. Дж. Майер предложил описывать структуру коэффициентов степенных рядов, возникающих в задачах статистической механики газов, посредством графов (см. [11, 12]). Использованная в этих работах конструкция довольно прозрачно реализуется в случае так называемых *групповых разложений* по степеням активности (см. [4]). Для формул, определяющих их коэффициенты, имеются достаточно полные математические доказательства (см., например, [5, 8]). Однако используемая при этом алгебраическая техника допускает обобщение и поэтому может быть приложена к гораздо более широкому кругу задач математической физики. В частности, она пригодна для для вычисления коэффициентов так называемых вириальных разложений статистической механики, которые остаются малоизвестными (см. [3]) и для которых не имеется строгого доказательства в математической литературе. Восполнению этого пробела посвящена настоящая работа. План изложение следующий. В разделе2 приводятся необходимые сведения из теории графов с помеченными вершинами: вводятся понятия и формулируются их свойства. Доказательства при этом опускаются, либо указывается путь, на котором они могут быть получены. За разъяснениями мы отсылаем читателя к известным монографиям по теории графов (см., например, [6, 9]). В разделе 3 кратко излагаются сведения о бесконечномерных коммутативных алгебрах последовательностей симметрических функций. В разделе 4 устанавливается связь между графами с помеченными вершинами и симметрическими функциями. Последний раздел посвящен доказательству формулы, которая играет основную роль при построении вириальных разложений.

2. Графы с помеченными вершинами. Пусть V — конечное множество элементов, которые называются *вершинами*; далее обозначаем их малыми латинскими буквами. Обозначим через $V^{(2)}$ множество всех пар $\{x,y\} \subset V$. *Графом с помеченными вершинами* (далее просто графом) над множеством V называется упорядоченная пара $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi\rangle$, где подмножество $\Psi \subset V^{(2)}$ называется *множеством смежности* графа, а его элементы — *ребрами* графа $\langle V, \Psi\rangle$. В теории графов, рассматривают также графы, у которых вершины не обладают метками; они определяются как фактор-множество $\langle V, \Psi\rangle/\mathbb{P}_{|V|}$ по группе перестановок $\mathbb{P}_{|V|}$. Граф $\mathfrak{G}' = \langle V', \Psi'\rangle$, у которого $V' \subset V$, $\Psi' = \Psi \cap V'^{(2)}$ называется *подграфом* графа $\mathfrak{G}$.

Бинарное симметричное отношение Ψ *смежности* на V определяет бинарное отношение *связности* на V. Оно конструируется на основе понятия *пути* на графе $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi\rangle$. Последовательность $\gamma(x,y) = \langle x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y\rangle$ вершин из V, для которой $\{x_j, x_{j+1}\} \in \Psi$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $x_0 = x$, $x_n = y$ называется путем с множеством вершин $\{\gamma(x,y)\}$. Пара $\{x,y\} \subset V$ называется *связной* на графе $\mathfrak{G}$, если существует путь $\langle x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y\rangle$, содержащий эти вершины. Подмножество пар связных вершин генерирует бинарное отношение, которое обладает свойствами симметричности и транзитивности и, таким образом, является отношением *эквивалентности.* Тогда оно генерирует разбиение графа на связные попарно непересекающиеся связные компоненты графа.

Пусть $\mathfrak{G}_1 = \langle V_1, \Psi_1\rangle$ и $\mathfrak{G}_2 = \langle V_2, \Psi_2\rangle$ — связные подграфы связного графа $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi\rangle$, причем

$$V_1 \cap V_2 = \{x\}, \quad V = V_1 \cup V_2; \quad \Psi = \Psi_1 \cap \Psi_2 = \varnothing, \quad \Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2. \tag{2.1}$$

Тогда x называется *вершиной сочленения* графа $\mathfrak{G}$. Граф, не имеющий вершин сочленения, будем в дальнейшем называть *блоком.* По определению, любой одновершинный граф $\{x\}$ не имеет вершины сочленения. Если x — вершина сочленения графа $\mathfrak{G}$, так что имеют место равенства (2.1), то граф $\mathfrak{G}$ будем называть *склеенным* по этой вершине и обозначать этот факт $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \vee \mathfrak{G}_2$ (символ $\vee$ обозначает операцию склейки). Вершина сочленения в связном графе $\mathfrak{G}$ характеризуется следующим свойством.

Теорема 2.1. *Для того чтобы вершина x связного графа $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi\rangle$ была вершиной сочленения, необходимо и достаточно чтобы существовала пара вершин $y_1 \in V$, $y_2 \in V$, $y_j \neq x$, $j = 1, 2$, для которой любой путь $\gamma(y_1, y_2)$ из y_1 в y_2 обязательно содержит вершину x.*

Если вершина x является вершиной сочленения в графе $\mathfrak{G}$ и этот граф представляется в виде склейки

$$\mathfrak{G} = \bigvee_{j=1}^{p} \mathfrak{G}_j$$

таких связных графов $\mathfrak{G}_j = \langle V_j, \Psi_j\rangle$, $j = 1, \dots, p$, что

$$V_j \cap V_k = \{x\}, \quad \Psi_j \cap \Psi_k = \varnothing, \quad j \neq k; \quad j, k = 1, \dots, p$$

и у каждого из них вершина x не является вершиной сочленения, то число p называется *степенью* вершины сочленения x на графе $\mathfrak{G}$. При этом графы $\mathfrak{G}_j$ будем называть *компонентами, соответствующими вершине сочленения x.* Если вершина x не является вершиной сочленения то, по определению, будем считать, что ее степень равна 1. Каждой вершине сочленения соответствует определенная степень.

Теорема 2.2. *Пусть x — вершина сочленения связного графа $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi\rangle$. Тогда существуют такие число $s \geqslant 2$ и однозначно определенный набор связных графов $\mathfrak{G}_j = \langle V_j, \Psi_j\rangle$, $j = 1, \dots, s$, в каждом из которых вершина x уже не является вершиной сочленения, для которых имеют место следующие соотношения*:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s, \qquad V_i \cap V_j = \{x\}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, s;$$
$$\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2 \cup \dots \cup \Psi_s, \qquad \Psi_i \cap \Psi_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, s.$$

Следствие 2.1. *В любом конечном неодновершинном графе имеется, по крайней мере, две вершины, которые не являются его вершинами сочленения.*

Введем более общее понятие склейки двух графов. Пусть два графа $\mathfrak{G}_j = \langle V_j, \Psi_j \rangle$, $j = 1, 2$, таковы, что $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. *Склейкой* $\mathfrak{G}_1 \vee \mathfrak{G}_2$ этих графов назовем граф $\langle V_1 \cup V_2, \Psi_1 \cup \Psi_2 \rangle$. Это понятие дает возможность ввести следующую конструкцию.

Пусть в графе $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi \rangle$ имеется подграф $\mathfrak{G}_B = \langle B, \Psi_B \rangle$, $\Psi_B = \Psi \cap B^{(2)}$, который не имеет вершин сочленения и для которого существует набор $\{\mathfrak{G}(z) = \langle V(z), \Psi(z) \rangle; z \in B\}$ связных, но попарно несвязных друг с другом подграфов графа $\mathfrak{G}$, обладающих следующими свойствами: $B \cap V(z) = \{z\}$, $\Psi_B \cap \Psi(z) = \varnothing$, $z \in B$, и граф $\mathfrak{G}$ представим в виде

$$\mathfrak{G} = \bigvee_{z \in B} \Big[\mathfrak{G}_B \vee \mathfrak{G}(z) \Big], \tag{2.2}$$

где допускается, что некоторые из подграфов $\mathfrak{G}(z)$, $z \in B$, могут быть пустыми. Тогда будем говорить, что подграф $\mathfrak{G}_B$ является блоком в составе графа $\mathfrak{G}$.

Следующее утверждение, ввиду существования в каждом графе вершины, не являющейся вершиной сочленения, гарантирует существование содержащегося в нем блока.

Теорема 2.3. *Пусть x — вершина графа $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi \rangle$, не являющаяся вершиной сочленения. Тогда в графе $\mathfrak{G}$ найдется единственный блок $\mathfrak{G}_B = \langle B, \Psi_B \rangle$, для которого справедливо представление* (2.2) *и который содержит x.*

Следующее утверждение уточняет формулу (2.2).

Теорема 2.4. *Пусть x — вершина связного графа $\mathfrak{G} = \langle V, \Psi \rangle$, которая не является его вершиной сочленения, и $\mathfrak{G}_B = \langle B, \Psi_B \rangle$ — единственный блок в этом графе, который содержит эту вершину. Тогда граф $\mathfrak{G}$ представим в виде*

$$\mathfrak{G} = \bigvee_{z \in B} \left[\mathfrak{G}_B \vee \left(\bigvee_{j=1}^{p(z)-1} \mathfrak{G}_j(z) \right) \right], \tag{2.3}$$

где $\mathfrak{G}_B$ — блок в графе $\mathfrak{G}$, которому принадлежит x, и для каждой вершины $z \in B$ числа $p(z)$ являются их степенями в графе $\mathfrak{G}$, а связные графы $\mathfrak{G}_j(z)$, $j = 1, \ldots, p(z)$, — компонентами сочленения, соответствующими вершине z.

Разложением $\mathcal{A}$ множества $I_n = \{1, \ldots, n\}$ называется дизъюнктивный набор $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ подмножеств из I_n, называемых компонентами, $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \varnothing$ при $j \neq k$, для которого $\bigcup_{j=1}^{s} \Gamma_j = I_n$, число $s \equiv |\mathcal{A}|$ называется *порядком* разложения. Класс всех разложений порядка s множества I_n будем обозначать $\mathfrak{S}_n^{(s)}$, а класс всех разложений — $\mathfrak{S} = \bigcup_{s=1}^{n} \mathfrak{S}_n^{(s)}$. Здесь классы $\mathfrak{S}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{S}_n^{(n)}$ состоят из одного разложения, соответственно, $\mathfrak{S}_n^{(1)} = \{I_n\}$ и $\mathfrak{S}_n^{(n)} = \big\{\Gamma_j = \{j\},\ j = 1, \ldots, n\big\}$.

Пусть $\bar{\mathcal{G}}[V; z]$ — класс всех связных графов над множеством вершин $V \cup \{z\}$ с отмеченной вершиной z. Этот класс является подклассом среди класса всех связных графов над $V \cup \{z\}$. Он характеризуется свойством инвариантности относительно перенумераций вершин из V. А именно, пусть P принадлежит группе $\mathbb{P}_{|V|}$ перестановок множества V. Тогда номера вершины z в множествах $\mathsf{P}V \cup \{z\}$ и $V \cup \{z\}$ совпадают. Перенумерация P индуцирует преобразование $\mathsf{P}\Psi \equiv \big\{\{\mathsf{P}x, \mathsf{P}y\} : \{x, y\} \in \Psi\big\}$ множества смежности Ψ у каждого графа $\mathfrak{G} = \langle V \cup \{z\}, \Psi \rangle$ и, следовательно, — преобразование $\mathsf{P}\mathfrak{G} = \langle \mathsf{P}V \cup \{z\}, \mathsf{P}\Psi \rangle$ любого графа $\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}[V \cup \{z\}]$. Тогда свойство инвариантности класса $\bar{\mathcal{G}}[V; z]$ относительно P означает, что

$$\mathsf{P}\bar{\mathcal{G}}[V; z] \equiv \big\{\mathsf{P}\mathfrak{G};\ \mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}[V; z]\big\} = \bar{\mathcal{G}}[V; z].$$

Ниже нам понадобятся следующие технические леммы, доказательства которых очевидны.

Лемма 2.1. *Класс $\bar{\mathcal{G}}[I_n; n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, представим в виде дизъюнктивного объединения*

$$\bar{\mathcal{G}}[I_n; n+1] = \bigcup_{s=1}^{n} \bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; n+1],$$

где $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; n+1]$ — класс всех связных графов с множеством вершин I_{n+1}, у которых отмеченная вершина является вершиной сочленения степени $s = 1, \ldots, n$.

При этом очевидно, что $\mathsf{P}\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; n+1] = \bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; n+1]$, $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$.

Лемма 2.2. *Если отмеченная вершина $n+1$ является вершиной сочленения со степенью $s > 1$, то класс $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; n+1]$ представим в виде дизъюнктивного объединения*

$$\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; n+1] = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}} \bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1]$$

с непустыми компонентами, каждая из которых представляет собой класс всех связанных графов над множеством I_{n+1} с отмеченной вершиной $n+1$ со степенью сочленения s. При этом номера вершин, отличные от $n+1$, у связных графов $\mathfrak{G}_j$, $j = 1, \ldots, s$, — компонент сочленения в вершине $n+1$ образуют разложение $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}$ с числом компонент s, а вершина $n+1$ не является вершиной сочленения в графах $\mathfrak{G}_j$.

Каждый из классов $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1]$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}$, инвариантен относительно таких перенумераций $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ множества I_n, которые не изменяют разложения $\mathcal{A}$, т.е.

$$\mathsf{P}\mathcal{A} = \langle \mathsf{P}A_j;\ j = 1, \ldots, s \rangle = \langle A_j;\ j = 1, \ldots, s \rangle \equiv \mathcal{A}.$$

Лемма 2.3. *Для любого дизъюнктивного разложения $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_s\} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}$ класс графов $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1]$, $n \geqslant s > 1$, эквивалентен декартову произведению*

$$\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1] = \bigotimes_{A \in \mathcal{A}} \bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A; n+1],$$

где $\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A; n+1]$ — класс связанных графов с множеством вершин $A \cup \{n+1\}$, $A \in \mathcal{A}$, у которых вершина $n+1$ не является вершиной сочленения.

Каждый из классов $\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A; n+1]$ инвариантен относительно перенумераций $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ вершин, которые переводят множество $A \in \mathcal{A}$ в себя, $\mathsf{P}A = A$, $A \in \mathcal{A}$.

На основе формулы (2.3) доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Класс $\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[I_n; n+1]$, $n \geqslant 2$, представим в виде дизъюнктивного объединения*

$$\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[I_n; n+1] = \bigcup_{B \subset I_n : |B| \geqslant 1} \ \bigcup_{C \subset B} \bar{\mathcal{G}}[I_n; B; C]$$

непустых классов $\bar{\mathcal{G}}[I_n; B; C]$ графов с отмеченной вершиной $n+1$, которая не является вершиной сочленения. У каждого графа $\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}[I_n; B; C]$ непустое множество B состоит из номеров вершин того блока $\mathfrak{G}_B$, который содержит вершину $n+1$, а C — множество вершин сочленения графа со степенью сочленения, большей 1, которые содержатся в блоке $\mathfrak{G}_B$.

Каждый из классов $\bar{\mathcal{G}}[I_n; B; C]$ инвариантен относительно перенумераций P вершин, которые переводят множества B и C в себя.

Для каждой пары множеств $B \subset I_n$ и $C \subset B$ обозначим через $\mathfrak{D}(B, C)$ класс функций $\{B(z);\ z \in C\}$ на C, где совокупность значений составляет дизъюнктивное разложение $\bigcup_{z \in C} B(z) = I_n \setminus B$, $B(z) \neq \varnothing$, $z \in C$ и $B(z_1) \cap B(z_2) = \varnothing$ при $z_1 \neq z_2$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Каждый класс $\bar{\mathcal{G}}[I_n;B;C]$, $n \geqslant 2$, представим в виде дизъюнктивного объединения*

$$\bar{\mathcal{G}}[I_n;B;C] = \bigcup_{\{B(z);\ z\in C\}\in\mathfrak{D}(B,C)} \bar{\mathcal{G}}\big[I_n;B \mid \{B(z), z\in C\}\big]$$

таких непустых классов $\bar{\mathcal{G}}[I_n;B \mid \{B(z), z\in C\}]$, $\{B(z);\ z\in C\}\in\mathfrak{D}(B,C)$, что каждый граф $\mathfrak{G}\in\bar{\mathcal{G}}\big[I_n;B \mid \{B(z),\ z\in C\}\big]$ с множествами B и C, определенными в лемме 2.4, для которых у каждой вершины $z\in C$ граф, приклеенный к блоку $\mathfrak{G}_B$, имеет множество вершин $B(z)$.

Здесь каждый из классов $\bar{\mathcal{G}}[I_n;B \mid \{B(z), z\in C\}]$ инвариантен относительно перенумераций P вершин, которые переводят множества B и C в себя и при этом не изменяют элементов разложения $\{B(z), z\in C\}$, $\mathsf{P}B(z) = B(z)$, $z\in C$.

Лемма 2.6. *Каждый класс $\bar{\mathcal{G}}\big[I_n;B \mid \{B(z),\ z\in C\}\big]$, $n\geqslant 2$, представим в виде декартова произведения*

$$\bar{\mathcal{G}}\big[I_n;B \mid \{B(z),\ z\in C\}\big] = \mathcal{F}[B;n+1]\otimes\left(\bigotimes_{z\in C}\bar{\mathcal{G}}[B(z);z]\right)$$

класса $\mathcal{F}[B;n+1]$ графов без вершин сочленения над множеством вершин $B\cup\{n+1\}$ и набора непустых классов $\bar{\mathcal{G}}[B(z);z]$, $z\in C$, где каждый класс состоит из всех связных графов над множеством вершин $B(z)\cup\{z\}$ с выделенной вершиной z.

Здесь каждый из классов $\bar{\mathcal{G}}[B(z);z]$ для фиксированной вершины $z\in C$ инвариантен относительно перенумераций P вершин, которые переводят множество $B(z)$ в себя.

3. Алгебры симметрических функций. Пусть фиксировано множество Ω, элементы которого будем обозначать буквами $x, y, z, \ldots$; упорядоченный набор $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle\in\Omega^n$ обозначим X_n. Функция $f_n(X_n)$, $n\geqslant 2$, на Ω^n со значениями в $\mathbb{C}$ называется *симметрической*, если для любой перестановки P из группы $\mathbb{P}_n$ перестановок множества I_n, $n\in\mathbb{N}$, имеет место формула $f_n(\mathsf{P}X_n) = f_n(X_n)$. Множество всех симметрических функций на Ω^n образует линейное многообразие $\mathbb{L}_n(\Omega)$. Рассмотрим прямую сумму

$$\mathbb{L}_\infty(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{L}_n(\Omega)$$

линейных многообразий: $\mathbb{L}_0(\Omega)\equiv\mathbb{C}$, $\mathbb{L}_1(\Omega)$ — линейное многообразие функций $f_1(x_1)$ на Ω и $\mathbb{L}_n(\Omega)$ — линейные многообразия симметрических функций $f_n(X_n)$ на Ω^n, $n\geqslant 2$. Таким образом, $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ состоит из последовательностей $\mathsf{f} = \langle f_n(X_n);\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$.

На линейном многообразии $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ введем отображение $\mathbb{L}_\infty\times\mathbb{L}_\infty\mapsto\mathbb{L}_\infty$, которое каждой паре последовательностей $\mathsf{f}^{(1)} = \langle f_n^{(1)};\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$ и $\mathsf{f}^{(2)} = \langle f_n^{(2)};\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$ сопоставляет однозначным образом последовательность $\mathsf{f} = \langle f_n;\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$, элементы которой определяются формулой

$$f_n(X_n) = \sum_{\Gamma\subset I_n} f^{(1)}_{|\Gamma|}\big(X(\Gamma)\big)f^{(2)}_{n-|\Gamma|}\big(X(I_n\setminus\Gamma)\big),\quad n\in\mathbb{N}_+,$$

где $X(\Gamma) = \langle x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\rangle$ с $\Gamma = \{j_1, \ldots, x_s\}$, $s = |\Gamma|$. Будем считать, что f является результатом применения бинарной операции, обозначаемой нами далее посредством $*$, к упорядоченной паре $\langle\mathsf{f}^{(1)}, \mathsf{f}^{(2)}\rangle$ из $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$.

Легко проверяется, что операция $*$ коммутативна и ассоциативна. Она, кроме того, она является дистрибутивной по отношению к сложению элементов в $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ и билинейна по отношению к умножению элементов $\mathsf{f}\in\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ на число из $\mathbb{C}$. В связи с этим, мы будем называть ее умножением на $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$. Линейное многообразие, снабженное операцией умножения $*$, превращается в алгебру над полем $\mathbb{C}$, которую мы будем обозначать тем же символом $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$. В $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ имеется нейтральный элемент — последовательность $\mathsf{e} = \langle\delta_{n,0};\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$. Кроме того, в $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ всякий элемент f, у которого $f_0\neq 0$ имеет обратный элемент, который мы обозначаем f_*^{-1}, так, что $\mathsf{f}*\mathsf{f}_*^{-1} = \mathsf{e}$, т.е. в алгебре определена операция деления на элементы $f_0\neq 0$. По этой же причине множество элементов $\mathbb{L}_\infty^{(0)}(\Omega) = \{\mathsf{f} \in \mathbb{L}_\infty(\Omega) : f_0 = 0\}$, которое является подалгеброй в $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ представляет собой максимальный идеал в $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ (см. [1]). Справедливо следующее легко доказываемое утверждение.

Лемма 3.1. *Для любого элемента* $\mathsf{f} \in \mathbb{L}_\infty^{(0)}(\Omega)$ *при* $n < l$ *имеет место равенство* $(\mathsf{f}_*^l)_n(X_n) = 0$, *а при* $n \geqslant l$ *справедлива следующая формула*

$$(\mathsf{f}_*^l)_n(X_n) = l! \sum_{\mathcal{A}=\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_l\}\in\mathfrak{S}_n^{(l)}} \prod_{j=1}^{l} \mathsf{f}_{|\Gamma_j|}(X(\Gamma_j)).$$

Так как элементами алгебры $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ являются функции со значениями из $\mathbb{C}$, то в $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ допустимо рассмотрение степенных рядов, в частности, экспоненциальная функция:

$$\exp_* \mathsf{f} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, \mathsf{f}_*^l,$$

где $\mathsf{f}_*^0 \equiv \mathsf{e}$. Из леммы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Для любого элемента* $\mathsf{f} \in \mathbb{L}_\infty^{(0)}(\Omega)$ *имеет место формула*

$$\Big(\exp_* \mathsf{f}\Big)_n(X_n) = \sum_{\mathcal{A}=\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_{|\mathcal{A}|}\}\in\mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^{|\mathcal{A}|} f_{|\Gamma_j|}(X(\Gamma_j)).$$

Введем линейные операторы ∂_x, $x \in \Omega$, на $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ посредством следующей формулы:

$$(\partial_x \mathsf{f})_n(X_n) = f_{n+1}(x, X_n).$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Каждый оператор* ∂_x *является оператором дифференцирования, т.е. для любой пары элементов* f *и* g *из* $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ *имеет место тождество Лейбница*

$$\partial_x(\mathsf{f} * \mathsf{g}) = (\partial_x \mathsf{f}) * \mathsf{g} + \mathsf{f} * (\partial_x \mathsf{g}).$$

Следствие 3.1. *Для любого* $x \in \Omega$ *и любого элемента* $\mathsf{f} \in \mathbb{L}_\infty^{(0)}(\Omega)$ *имеет место формула*

$$\partial_x \exp_* \mathsf{f} = (\partial_x \mathsf{f}) * \exp_* \mathsf{f}.$$

Далее, будем полагать, что на множестве Ω имеется структура измеримости, на которой определена конечная мера μ. Тогда, вводя для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ произведение мер $d\mu(x_1)d\mu(x_2)\dots d\mu(x_n)$ на Ω^n и ограничивая каждое из функциональных пространств $\mathbb{L}_n(\Omega)$ только измеримыми суммируемыми на Ω^n функциями $f_n(X_n)$, определим для каждой измеримой ограниченной функции $\zeta(x)$ на Ω линейный функционал на $\mathbb{L}_n(\Omega)$:

$$\mathsf{f}_n[\zeta; f_n] = \int_{\Omega^n} \Big(\prod_{j=1}^{n} \zeta(x_j)\Big) f_n(X_n) d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n). \tag{3.1}$$

Рассмотрим такое сужение многообразия $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$, обозначаемое далее тем же символом, в котором содержатся только элементы $\mathsf{f} = \langle f_n \in \mathbb{L}_n(\Omega);\ n \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathbb{L}_\infty(\Omega)$ с такими суммируемыми на Ω^n компонентами f_n, $n \in \mathbb{N}$, что сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n \int_{\Omega^n} |f_n(X_n)| d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) < \infty, \quad M > 0. \tag{3.2}$$

Если функция $\zeta(x)$ ограничена постоянной $M > 0$, $|\zeta(x)| < M$, $x \in \Omega$. Для таких элементов f определено значение функционала

$$\mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathsf{f}_n[\zeta; f_n].$$

Этот функционал обладает свойством *мультипликативности*, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если элементы* $\mathsf{f}^{(1)}$ *и* $\mathsf{f}^{(2)}$ *обладают свойством* (3.2) *с функцией* $\zeta(x)$, *для которой имеет место* $|\zeta(x)| < M$, *то их произведение* $\mathsf{f}_1 * \mathsf{f}_2$ *также обладает свойством* (3.2) *и имеет место формула*

$$\mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)}] = \mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}^{(1)}] \cdot \mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}^{(2)}].$$

Доказательство осуществляется прямым вычислением:

$$\mathsf{f}_n[\zeta; \mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)}] = \int\limits_{\Omega^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \zeta(x_j) \right) \left(\mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)} \right)_n (X_n) d\mu(x_1) \ldots d\mu(x_n) =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \int\limits_{\Omega^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \zeta(x_j) \right) f_l^{(1)}(X_l) f_{n-l}^{(2)}\big(X(I_n \setminus I_l)\big) d\mu(x_1) \ldots d\mu(x_n) =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \mathsf{f}_l[\zeta; f_l^{(1)}] \cdot \mathsf{f}_{n-l}[\zeta; f_{n-l}^{(2)}].$$

Подставляя полученное выражение в $\mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)}]$, находим

$$\mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \mathsf{f}_l[\zeta; f_l^{(1)}] \cdot \mathsf{f}_{n-l}[\zeta; f_{n-l}^{(2)}] = \mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}^{(1)}] \cdot \mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}^{(2)}]. \qquad \square$$

Следствие 3.2. *Справедлива формула*

$$\mathsf{f}[\zeta; \exp_* \mathsf{f}] = \exp \mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}]. \tag{3.3}$$

Следствие 3.3. *Имеет место формула дифференцирования*

$$\mathsf{f}[\zeta; \partial_x \exp_* \mathsf{f}] = \mathsf{f}[\zeta; \partial_x \mathsf{f}] \cdot \exp \mathsf{f}[\zeta; \mathsf{f}].$$

4. Графы и симметрические функции. Пусть $w(x, y)$ — произвольная симметрическая функция Ω^2, которую мы будем называть *порождающей*. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и поставим в соответствие паре $\langle w \in \mathbb{L}_2(\Omega), \mathfrak{G} = \langle I_n, \Psi \rangle \rangle$ функцию на Ω^n, определяемую формулой

$$h_n(X_n; \mathfrak{G}) = \prod_{\{i,j\} \in \Psi} w(x_i, x_j).$$

Каждую такую функцию будем называть *функцией на* Ω^n, *ассоциированной с графом* $\mathfrak{G}$ посредством порождающей функции w.

На основе функций $h_n(\cdot; \mathfrak{G})$, ассоциированных с графами, посредством следующей конструкции, строятся симметрические функции, которые являются элементами пространства $\mathbb{L}_n(\Omega)$. Зафиксируем какой-либо класс $\mathcal{H}$ графов над I_n, который обладает свойством инвариантности относительно перестановок, так что для $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ и $\mathfrak{G} \in \mathcal{H}$ имеем $\mathsf{P}\mathfrak{G} = \langle I_n, \mathsf{P}\Psi \rangle \in \mathcal{H}$. Определим функцию

$$f_n(X_n) = \sum_{\mathfrak{G} \in \mathcal{H}} h_n(X_n; \mathfrak{G}) \tag{4.1}$$

на Ω^n, которая, очевидно, является симметрической. Каждую функцию $f_n(X_n)$ на Ω^n, построенную согласно (4.1), будем называть *ассоциированной с классом* $\mathcal{H}$. Возьмем в качестве $\mathcal{H}$ класс $\mathcal{G}_n$ всех графов над I_n.

Лемма 4.1. *Пусть* $w(x, y)$ — *симметрическая функция на* Ω^2. *Тогда функция, ассоциированная с классом* $\mathcal{G}_n$ *на основе порождающей функции* $w(x, y)$, *равна*

$$f_n(X_n) = \sum_{\mathfrak{G} = \langle I_n; \Psi \rangle \in \mathcal{G}_n} \prod_{\{i,j\} \in \Psi} w(x_i, x_j) = \prod_{\{i,j\} \in I_n^{(2)}} (1 + w(x_i, x_j)). \tag{4.2}$$

Доказательство проводится индукцией по n на основе формулы

$$\sum_{\mathfrak{G}=\langle I_{n+1};\Psi\rangle\in\mathcal{G}_{n+1}}\ \prod_{\{i,j\}\in\Psi} w(x_i,x_j) = \sum_{\mathfrak{G}=\langle I_n;\Psi\rangle\in\mathcal{G}_n}\ \prod_{\{k,l\}\in\Psi} w(x_k,x_l)+$$
$$+\sum_{\mathfrak{G}=\langle I_n;\Psi\rangle\in\mathcal{G}_n}\ \sum_{\Gamma\subset I_n}\ \prod_{j\in\Gamma} w(x_{n+1},x_j)\left[\prod_{\{k,l\}\in\Psi} w(x_k,x_l)\right],$$

обеспечивающей индукционный шаг. Здесь первая сумма соответствует графам, у которых вершина $n+1$ не связана ни с одной вершиной из I_n, а вторая сумма учитывает все графы класса $\mathcal{G}_{n+1}$, у которых вершина $n+1$ связывается с вершинами графов класса $\mathcal{G}_n$, множество номеров которых составляют Γ. □

Заметим, что класс $\mathcal{G}_n$ всех графов над I_n инвариантен относительно перестановок $\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n$, и поэтому при любом $n\in\mathbb{N}$ функции f_n, ассоциированные с $\mathcal{G}_n$, являются симметрическими, т.е. принадлежат $\mathbb{L}_n(\Omega)$.

Наряду с функциями $f_n(X_n)$, ассоциированными с классами $\mathcal{G}_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, введем последовательность функций $\bar f_n(X_n)$ с порождающей функцией $w(x,y)$, каждая из которых ассоциирована с классом $\bar{\mathcal{G}}_n$ всех связных графов на I_n, $n\geqslant 2$:

$$\bar f_n(X_n) = \sum_{\mathfrak{G}=\langle I_n;\Psi\rangle\in\bar{\mathcal{G}}_n}\ \prod_{\{i,j\}\in\Psi} w(x_i,x_j). \tag{4.3}$$

Так как при каждом $n\in\mathbb{N}$ класс $\bar{\mathcal{G}}_n$ инвариантен относительно перестановок $\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n$, то функции $\bar f_n(X_n)$ при каждом $n\geqslant 2$ являются симметрическими. Таким образом, функции f_n и $\bar f_n$ принадлежат $\mathbb{L}_n(\Omega)$ при любом $n\geqslant 2$. Докажем, что для составленных последовательностей функций из $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть элементы* $\mathsf{f}=\langle f_n;\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$ *и* $\bar{\mathsf{f}}=\langle \bar f_n;\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$ *алгебры* $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$, *компоненты которых при* $n\geqslant 2$ *определяются формулами* (4.2) *и* (4.3) *соответственно на основе одной и той же порождающей функции* $w(x,y)\in\mathbb{L}_2(\Omega)$ *и при этом* $f_0=1$, $\bar f_0=0$, $\bar f_1=f_1=1$, *то эти элементы связаны следующим образом*:

$$\mathsf{f}=\exp_*\bar{\mathsf{f}}.$$

Доказательство. Докажем, что для функций f_n имеет место соотношение

$$f_n(X_n)=\sum_{\mathcal{A}\in\mathfrak{S}_n}\ \prod_{\Gamma\in\mathcal{A}} \bar f_{|\Gamma|}(X(\Gamma)).$$

Распределим следующим образом все графы класса $\mathcal{G}_n$ на непересекающиеся классы $\mathcal{G}_n(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}=\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_s\}\in\mathfrak{S}_n$. Рассмотрим произвольный граф $\mathfrak{G}=\langle I_n,\Psi\rangle$ из $\mathcal{G}_n$. Этот граф распадается однозначным образом на связанные компоненты $\mathfrak{G}_j=\langle\Gamma_j,\Psi_j\rangle$, $j=1,\dots,s$, так, что

$$\bigcup_{j=1}^{s}\Gamma_j=I_n,\quad \bigcup_{j=1}^{n}\Psi_j=\Psi$$

и каждый из графов $\mathfrak{G}_j$ принадлежит классу $\bar{\mathcal{G}}_{|\Gamma_j|}(\Gamma_j)$ всех связных графов над множеством вершин Γ_j. В этом случае отнесем граф $\mathfrak{G}$ к классу $\mathcal{G}_n(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}=\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_{|\mathcal{A}|}\}$. Ясно, что классы $\mathcal{G}_n(\mathcal{A}_1)$ и $\mathcal{G}_n(\mathcal{A}_2)$ не пересекаются, если $\mathcal{A}_1\neq\mathcal{A}_2$, и не пусты. Тогда имеет место следующее представление суммы по всем графам класса $\mathcal{G}_n$:

$$\sum_{\mathfrak{G}\in\mathcal{G}_n}\cdots=\sum_{\mathcal{A}\in\mathfrak{S}_n}\left(\prod_{j=1}^{|\mathcal{A}|}\ \sum_{\mathfrak{G}_j\in\mathcal{G}_{|\Gamma_j|}(\Gamma_j)}\right)\cdots.$$

При этом для каждого слагаемого суммы имеет место соотношение

$$\prod_{\{k,l\}\in\Psi} w(x_k,x_l) = \prod_{j=1}^{|\mathcal{A}|} \prod_{\{k,l\}\in\Psi_j} w(x_k,x_l),$$

ввиду несвязанности графов $\mathfrak{G}_j$, $j=1,\ldots,|\mathfrak{D}|$. Подставляя произведение в правой части в сумму, определяющую $f_n(X_n)$, находим

$$f_n(X_n) = \sum_{\mathfrak{G}\in\mathcal{G}_n} \prod_{\{k,l\}\in\Psi} w(x_k,x_l) =$$

$$= \sum_{\mathcal{A}\in\mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^{|\mathcal{A}|} \left(\sum_{\mathfrak{G}_j\in\mathcal{G}_{|\Gamma_j|}(\Gamma_j)} \prod_{\{k,l\}\in\Psi_j} w(x_k,x_l) \right) = \sum_{\mathcal{A}\in\mathfrak{S}_n} \left(\prod_{j=1}^{|\mathcal{A}|} \bar{f}_{|\Gamma_j|}(X(\Gamma_j)) \right). \quad \square$$

Применяя формулу (3.3), из этой теоремы получаем следующий результат.

Следствие 4.1. *Если на множестве Ω определена структура измеримости с конечной мерой и ограниченная измеримая функция ζ на Ω, то для значений функционала $\mathsf{f}[\zeta;\cdot]$ на суммируемых элементах $\mathsf{f}\in\mathbb{L}_\infty(\Omega)$, $\bar{\mathsf{f}}\in\mathbb{L}_\infty^{(0)}(\Omega)$, построенных на основе фиксированной порождающей функции w, имеет место формула*

$$\mathsf{f}[\zeta,\mathsf{f}] = \exp \mathsf{f}[\zeta;\bar{\mathsf{f}}].$$

Заметим, что это утверждение остается справедливым и в том случае, когда ряды, определяющие указанные значения функционала расходятся.

5. Симметрические функции и графы класса $\mathcal{F}_n$. Пусть на множестве Ω определена группа $\mathbb{T}$ преобразований T, причем для любого $x\in\Omega$ имеет место $\Omega=\{\mathsf{T}x;\mathsf{T}\in\mathbb{T}\}$, т.е. Ω инвариантно относительно преобразований этой группы. В этом разделе мы получим основной результат работы: уравнение, связывающее значения функционала $\mathsf{f}[z;\bar{\mathsf{f}}]$ и $\mathsf{f}[z;\mathsf{g}]$ с $\zeta(x)\equiv z\in\mathbb{C}$, где функции $\mathsf{g}=\langle g_n;\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$ ассоциированы со связными графами без вершин сочленения и, вместе с функциями последовательности $\bar{\mathsf{f}}$, порождаются симметрической функцией $w(x,y)$, инвариантной относительно преобразований $\mathsf{T}\in\mathbb{T}$.

Рассмотрим подалгебру $\mathbb{L}_+(\Omega)$ таких элементов h алгебры $\mathbb{L}_\infty(\zeta)$, у которых все их компоненты $h_n(X_n)$, $n\in\mathbb{N}_+$, инвариантны относительно преобразований группы $\mathbb{T}$ ($\mathbb{T}$-инвариантны). В частности, для значения $n=1$ линейное многообразие $\mathbb{L}_1$ в этой алгебре совпадает с $\mathbb{C}$.

Кроме того, потребуем, чтобы все компоненты каждой последовательности из $\mathbb{L}_+(\Omega)$ являлись суммируемыми в следующем смысле с $\mathbb{T}$-инвариантной мерой μ

$$\int_{\Omega^{n-1}} |h_n(X_n)| \prod_{j=1}^{n-1} d\mu(x_j) < \infty,$$

а вся их совокупность обладает тем свойством, что для элементов h из максимального идеала $\mathbb{L}_+^{(0)}(\Omega)=\mathbb{L}_+(\Omega)\cap\mathbb{L}_\infty^{(0)}(\Omega)$ алгебры $\mathbb{L}_+(\Omega)$ имеется достаточно малая окрестность точки $z=0$ в плоскости $z\in\mathbb{C}$, в которой сходится степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\Omega^{n-1}} |h_n(X_n)| \prod_{j=1}^{n-1} d\mu(x_j) < \infty.$$

На элементах $\mathsf{h}=\langle h_n(X_n);\ n\in\mathbb{N}_+\rangle\in\mathbb{L}_+^{(0)}(\Omega)$ рассмотрим функционал

$$\mathsf{S}[z;\mathsf{h}] = \mathsf{f}[z;\partial_x\mathsf{h}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathsf{f}_n[h_{n+1}],$$

где функционалы $\mathsf{f}_n[\cdot]$ при $n \in \mathbb{N}$ определяются $\mathbb{T}$-инвариантной мерой μ и весовой функцией $\zeta = 1$ в соответствии с (3.1),

$$\mathsf{f}_n[h_{n+1}] = \int\limits_{\Omega^n} h_{n+1}(X_{n+1}) \prod_{j=1}^{n} d\mu(x_j) \quad \text{и} \quad \mathsf{f}_0[h_1] = h_1.$$

Для доказательства основного утверждения этого приложения нам понадобится следующее простое комбинаторное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_s)$ — произвольная функция на $\mathbb{N}^s$. Тогда при $n \geqslant s$ имеет место формула*

$$\sum_{\substack{\langle A_1,\dots,A_s\rangle:\\ A_j\neq\varnothing,\ A_j\subset I_n,\ j=1,\dots,s;\\ A_j\cap A_k=\varnothing,\ j\neq k;\ \bigcup\limits_{j=1}^{s} A_j=I_n}} \varphi\bigl(|A_1|, \dots, |A_s|\bigr) = \sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_s\rangle:\ l_j\geqslant 1;\\ l_1+\dots+l_s=n}} \frac{n!}{l_1!\dots l_s!}\varphi(l_1, \dots, l_s). \tag{5.1}$$

Доказательство проводится индукцией по s. При $s = 1$ сумма в (5.1) состоит из одного слагаемого и формула превращается в тождество:

$$\sum_{A_1=I_n} \varphi(|A_1|) = \sum_{l_1=n} \frac{n!}{l_1!}\,\varphi(l_1).$$

Индукционный шаг строится следующим образом:

$$\sum_{\substack{\langle A_1,\dots,A_{s+1}\rangle:\\ A_j\neq\varnothing,\ A_j\subset I_n,\ j=1,\dots,s+1;\\ A_j\cap A_k=\varnothing,\ j\neq k;\ \bigcup\limits_{j=1}^{s+1} A_j=I_n}} \varphi\bigl(|A_1|, \dots, |A_{s+1}|\bigr) =$$

$$= \sum_{\substack{\varnothing\neq A_{s+1}\subset I_n:\\ |A_{s+1}|=1,\dots,n-s}} \sum_{\substack{\langle A_1,\dots,A_s\rangle:\\ A_j\neq\varnothing,\ A_j\subset I_n\setminus A_{s+1},\ j=1,\dots,s;\\ A_j\cap A_k=\varnothing,\ j\neq k;\ \bigcup\limits_{j=1}^{s} A_j=I_n\setminus A_{s+1}}} \varphi\bigl(|A_1|, \dots, |A_{s+1}|\bigr) =$$

$$= \sum_{l_{s+1}=1}^{n-s} \binom{n}{l_{s+1}} \sum_{\substack{\langle A_1,\dots,A_s\rangle:\\ A_j\neq\varnothing,\ A_j\subset I_n\setminus A_{s+1},\ j=1,\dots,s;\\ A_j\cap A_k=\varnothing,\ j\neq k;\ \bigcup\limits_{j=1}^{s} A_j=I_n\setminus A_{s+1}}} \varphi\bigl(|A_1|, \dots, |A_s|, l_{s+1}\bigr).$$

Используя предположение индукции для внутренней суммы, запишем

$$\sum_{l_{s+1}=1}^{n-s} \binom{n}{l_{s+1}} \sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_s\rangle:\ l_j\geqslant 1;\\ l_1+\dots+l_s=n-l_{s+1}}} \frac{(n-l_{s+1})!}{l_1!\dots l_s!}\varphi(l_1, \dots, l_s, l_{s+1}) =$$

$$= \sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_{s+1}\rangle:\ l_j\geqslant 1;\\ l_1+\dots+l_{s+1}=n}} \frac{n!}{l_1!\dots l_{s+1}!}\varphi(l_1, \dots, l_s, l_{s+1}). \quad \square$$

Следствие 5.1. *Пусть $\varphi(\xi_1,\dots,\xi_s)$ — произвольная функция на $\mathbb{N}^s$. Тогда для суммирования по разложениям $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_s\}\in\mathfrak{S}_n^{(s)}$ множества I_n при $n\geqslant s$ имеет место формула*

$$\sum_{\substack{\{A_1,\dots,A_s\}:\\ A_j\neq\varnothing,\ A_j\subset I_n,\ j=1,\dots,s;\\ A_j\cap A_k=\varnothing,\ j\neq k;\ \bigcup\limits_{j=1}^{s}A_j=I_n}}\varphi\big(|A_1|,\dots,|A_s|\big)=\frac{1}{s!}\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_s\rangle:\ l_j\geqslant 1;\\ l_1+\dots+l_s=n}}\frac{n!}{l_1!\dots l_s!}\varphi(l_1,\dots,l_s). \qquad (5.2)$$

Доказательство следует из того, что каждое разложение $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_s\}\in\mathfrak{S}_n^{(s)}$ множества I_n порождает ровно $s!$ упорядоченных наборов $\langle A_1,\dots,A_s\rangle$. □

Рассмотрим функции

$$\bar f_{n+1}(X_{n+1})=\sum_{\mathfrak{G}\in\bar{\mathcal{G}}_n}h(X_{n+1};\mathfrak{G}),\quad h(X_{n+1};\mathfrak{G})=\prod_{\{j,k\}\in\Psi}w(x_j,x_k),$$

где $h(X_{n+1};\mathfrak{G})$ на Ω^{n+1} ассоциированы с графами $\mathfrak{G}=\langle I_{n+1},\Psi\rangle\in\bar{\mathcal{G}}_n$ посредством $\mathbb{T}$-инваринатной порождающей функции $w(x,y)$ на Ω^2. При этом $\bar{\mathsf{f}}=\langle\bar f_{n+1};\ n\in\mathbb{N}_+\rangle\in\mathbb{L}_+^{(0)}(\Omega)$. Точно так же введем функции

$$g_{n+1}(X_{n+1})=\sum_{\mathfrak{G}\in\mathcal{F}[I_{n+1}]}h(X_{n+1};\mathfrak{G}),\quad n\in\mathbb{N}_+, \qquad (5.3)$$

где $\mathcal{F}[I_{n+1}]$ — класс графов без вершин сочленения над I_{n+1}, которые составляют элемент $\mathsf{g}=\langle g_{n+1};\ n\in\mathbb{N}_+\rangle$ алгебры $\mathbb{L}_+(\Omega)$. Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 5.1. *Значения $\mathsf{S}[z;\bar{\mathsf{f}}]$ и $\mathsf{S}[z;\mathsf{g}]$ функционала $\mathsf{S}[z;\cdot]$ на элементах $\bar{\mathsf{f}}$ и g подчинены следующему функциональному уравнению*:

$$\mathsf{S}[z;\bar{\mathsf{f}}]=\exp\Big(\mathsf{S}\big[z\mathsf{S}[z;\bar f];\mathsf{g}\big]-1\Big). \qquad (5.4)$$

Доказательство.

1. Согласно лемме 2.1, так как классы $\bar{\mathcal{G}}_{n+1}[I_n;n+1]$, $n\in\mathbb{N}$, представимы в виде дизъюнктивных объединений

$$\bar{\mathcal{G}}[I_n,n+1]=\bigcup_{s=1}^{n}\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n;n+1],$$

где отмеченная вершина сочленения $n+1$ имеет степень s, то каждая из функций $\bar f_{n+1}(X_{n+1})$ представима в виде суммы

$$\bar f_{n+1}(X_{n+1})=\sum_{s=1}^{n}f_{n+1}^{(s)}(X_{n+1}),\quad f_{n+1}^{(s)}(X_{n+1})=\sum_{\mathfrak{G}\in\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n,n+1]}h(X_{n+1};\mathfrak{G}). \qquad (5.5)$$

При этом ввиду симметрии классов $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n,n+1]$ относительно перестановок $\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{T}$-инвариантности $w(x,y)$, функции $f_{n+1}^{(s)}(X_{n+1})$ являются симметрическими относительно таких P и $\mathbb{T}$-инвариантны. Кроме того, имеет место равенство

$$\mathsf{f}_n[\bar f_{n+1}]=\sum_{s=1}^{n}\mathsf{f}_n\big[f_{n+1}^{(s)}\big].$$

2. Далее, согласно лемме 2.2, если вершина $n+1$ имеет степень сочленения $s>1$, то класс $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n;n+1]$ представим в виде следующего дизъюнктивного объединения

$$\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n;n+1]=\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathfrak{S}_n^{(s)}}\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n;\mathcal{A},n+1],$$

где у связанных графов из $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n;\mathcal{A},n+1]$ над I_{n+1} вершина $n+1$ имеет степень сочленения s, а номера вершин, отличных от вершины $n+1$, у связных графов $\mathfrak{G}_j$, $j=1,\dots,s$, составляют разложение $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}$ с числом компонент s и $n+1$ не является у них вершиной сочленения. Тогда функции $f_{n+1}^{(s)}$ представимы в виде сумм

$$f_{n+1}^{(s)}(X_{n+1}) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}} f_{n+1}^{(s)}\big(X_{n+1}; \mathcal{A}, n+1\big),$$

где функции $f_{n+1}^{(s)}\big(X_{n+1}; \mathcal{A}, n+1\big)$ определяются формулой

$$f_{n+1}^{(s)}\big(X_{n+1}; \mathcal{A}, n+1\big) = \sum_{\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1]} h(X_{n+1}; \mathfrak{G}). \tag{5.6}$$

Они симметричны относительно всех $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$, которые оставляют инвариантными компоненты разложения $\mathcal{A}$. При этом имеет место

$$\mathsf{f}_n\big[f_{n+1}^{(s)}\big] = \sum_{\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}} \mathsf{f}_n\Big[f_{n+1}^{(s)}\big(X_{n+1}; \mathcal{A}, n+1\big)\Big].$$

3. Согласно лемме 2.3, для любого разложения $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_s\} \in \mathfrak{S}_n^{(s)}$ класс $\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1]$, $n \geqslant s > 1$, эквивалентен декартову произведению

$$\bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1] = \bigotimes_{l=1}^{s} \bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A_l; n+1]$$

классов $\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A_l; n+1]$ связных графов над множеством $A_l \cup \{n+1\}$, $l = 2, \ldots, s$, с выделенной вершиной $n+1$, у которых вершина $n+1$ не является вершиной сочленения. Тогда имеет место следующее представление для суммы

$$\sum_{\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1]} h(X_{n+1}; \mathfrak{G}) = \left(\prod_{l=1}^{s} \sum_{\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A_l; n+1]}\right) h(X_{n+1}; \mathfrak{G}).$$

При этом, так как для каждого графа $\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}^{(s)}[I_n; \mathcal{A}, n+1]$, где $\mathcal{A} = \{A_j; j = 1, \ldots, |\mathcal{A}|\}$, ассоциированная с ним симметрическая функция представима в виде

$$h(X_{n+1}; \mathfrak{G}) = \prod_{l=1}^{s} h\big(X(A_l \cup \{n+1\}); \mathfrak{G}_l\big), \quad \mathfrak{G} = \bigvee_{l=1}^{s} \mathfrak{G}_l, \tag{5.7}$$

то

$$\mathsf{f}_n[f(X_{n+1}; \mathcal{A})] = \left(\prod_{l=1}^{s} \sum_{\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A_l; n+1]}\right) \mathsf{f}_n\left[\prod_{l=1}^{s} h\big(X(A_l \cup \{n+1\}); \mathfrak{G}_l\big)\right] =$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \mathsf{f}_{|A_l|}\left[\sum_{\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}^{(1)}[A_l; n+1]} h\big(X(A_l \cup \{n+1\}); \mathfrak{G}_l\big)\right] = \prod_{l=1}^{s} \mathsf{f}_{|A_l|}\Big[f_{|A_l|+1}^{(1)}\big(X(A_l \cup \{n+1\})\big)\Big],$$

где учтено, что для графа $\mathfrak{G}_{l_1} \vee \mathfrak{G}_{l_2}$ с множествами вершин A_{l_1} и A_{l_2} соответственно, склеенного из двух графов $\mathfrak{G}_{l_1}$ и $\mathfrak{G}_{l_2}$ в вершине $n+1$, выполняется

$$\mathsf{f}_{|A_{l_1}|+|A_{l_2}|}\Big[h\Big(X(A_{l_1} \cup A_{l_2} \cup \{n+1\});\ \mathfrak{G}_{l_1} \vee \mathfrak{G}_{l_2}\Big)\Big] =$$

$$= \sum_{X(A_{l_1} \cup A_{l_2}) \in \Omega^{|A_{l_1}|+|A_{l_2}|}} h\Big(X\big(A_{l_1} \cup A_{l_2} \cup \{n+1\}\big);\ \mathfrak{G}_{l_1} \vee \mathfrak{G}_{l_2}\Big) =$$

$$= \left(\sum_{X(A_{l_1}) \in \Omega^{|A_{l_1}|}} h\Big(X\big(A_{l_1} \cup \{n+1\}\big);\ \mathfrak{G}_{l_1} \Big) \right) \left(\sum_{X(A_{l_2}) \in \Omega^{|A_{l_2}|}} h\Big(X\big(A_{l_2} \cup \{n+1\}\big);\ \mathfrak{G}_{l_2} \Big) \right) =$$

$$= \mathsf{f}_{|A_{l_1}|}\Big[h\Big(X\big(A_{l_1} \cup \{n+1\}\big);\ \mathfrak{G}_{l_1} \Big) \Big] \cdot \mathsf{f}_{|A_{l_2}|}\Big[h\Big(X\big(A_{l_2} \cup \{n+1\}\big);\ \mathfrak{G}_{l_2} \Big) \Big]. \quad (5.8)$$

4. На основании формул (5.5), (5.6), (5.7), применяя (5.2), получаем следующее выражение для функционала f_n на функциях $\bar{f}_{n+1}(X_{n+1})$:

$$\mathsf{f}_n\big[\bar{f}_{n+1}\big] = \mathsf{f}_n\big[\bar{f}^{(1)}_{n+1}\big] + \sum_{s=2}^{n} \mathsf{f}_n\big[f^{(s)}_{n+1}\big] = \mathsf{f}_n\big[f^{(1)}_{n+1}\big] + \sum_{s=2}^{n} \sum_{\mathcal{A} \in \mathfrak{S}^{(s)}_n} \mathsf{f}_n\big[f^{(s)}_{n+1}(X_{n+1}; \mathcal{A})\big] =$$

$$= \mathsf{f}_n\big[\bar{f}^{(1)}_{n+1}\big] + \sum_{s=2}^{n} \sum_{\mathcal{A} \in \mathfrak{S}^{(s)}_n} \prod_{j=1}^{s} \mathsf{f}_{|A_j|}\Big[\bar{f}_{|A_j|+1}\big(X(A_j \cup \{n+1\}) \big) \Big] =$$

$$= \mathsf{f}_n\big[\bar{f}^{(1)}_{n+1}\big] + \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{l_j \geqslant 1,\ j=1,\ldots,s: \\ l_1+\cdots+l_s=n}} \frac{n!}{l_1! \ldots l_s!} \prod_{j=1}^{s} \mathsf{f}_{l_j}\Big[\bar{f}^{(1)}_{l_j+1}\big(X_{l_j}, x_{n+1} \big) \Big] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{l_j \geqslant 1,\ j=1,\ldots,s: \\ l_1+\cdots+l_s=n}} \frac{n!}{l_1! \ldots l_s!} \prod_{j=1}^{s} \mathsf{f}_{l_j}\Big[\bar{f}^{(1)}_{l_j+1}\big(X_{l_j}, x_{n+1} \big) \Big]. \quad (5.9)$$

5. Рассмотрим теперь графы класса $\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[I_n, n+1]$. Согласно лемме 2.4, класс $\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[I_n, n+1]$, $n \geqslant 2$, представим в виде дизъюнктивного объединения

$$\bar{\mathcal{G}}^{(1)}[I_n, n+1] = \bigcup_{B \subset I_n : |B| \geqslant 1} \ \bigcup_{C \subset B} \bar{\mathcal{G}}[I_n; B; C]$$

классов графов, у которых $n+1$ не является вершиной сочленения, причем для каждого графа множество B представляет номера вершин того блока в нем, который содержит вершину $n+1$, а C — множество вершин сочленения графа в этом блоке. Тогда

$$f^{(1)}_{n+1}(X_{n+1}) = \sum_{B \subset I_n : |B| \geqslant 1} \ \sum_{C \subset B} f_{n+1}\big(X_{n+1}; B; C\big),$$

$$f_{n+1}\big(X_{n+1}; B; C\big) = \sum_{\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}[I_n; B; C]} h(X_{n+1}; \mathfrak{G}).$$

При таком представлении значение $\mathsf{f}_n\big[f^{(1)}_{n+1}\big]$ функционала $\mathsf{f}_n[\cdot]$ дается суммой

$$\mathsf{f}_n\big[f^{(1)}_{n+1}\big] = \sum_{B \subset I_n : |B| \geqslant 1} \ \sum_{C \subset B} f_{n+1}\big(X_{n+1}; B; C\big), \quad (5.10)$$

6. Так как каждый класс $\bar{\mathcal{G}}[I_n; B; C]$ графов с $n \geqslant 2$, согласно леммам 2.4 и 2.5, представим в виде дизъюнктивного объединения непустых классов

$$\bar{\mathcal{G}}\big[I_n; B; C\big] = \bigcup_{\{B(z); z \in C\} \in \mathfrak{D}(B,C)} \bar{\mathcal{G}}\big[I_n; B \mid \{B(z), z \in C\}\big].$$

Тогда функции $f_{n+1}(X_{n+1}; B; C)$ представимы в виде следующих сумм:

$$f_{n+1}\big(X_{n+1}; B; C\big) = \sum_{\{B(z); z \in C\} \in \mathfrak{D}(B,C)} f_{n+1}\big(X_{n+1}; B \mid \{B(z), z \in C\}\big),$$

$$f_{n+1}\big(X_{n+1}; B \mid \{B(z), z \in C\}\big) = \sum_{\mathfrak{G} \in \bar{\mathcal{G}}\left[I_n;\ B \mid \{B(z), z \in C\}\right]} h\big(X_{n+1}; \mathfrak{G}\big).$$

При этом ввиду линейности функционала $\mathsf{f}_n[\cdot]$ имеет место равенство

$$\mathsf{f}_n\big[f_{n+1}(X_{n+1};B;C)\big] = \sum_{\{B(z);\ z\in C\}\in\mathfrak{D}(B,C)} \mathsf{f}_n\Big[f_{n+1}\big(X_{n+1};B\mid\{B(z),z\in C\}\big)\Big]. \tag{5.11}$$

7. Наконец, примем во внимание, что каждый класс $\bar{\mathcal{G}}\big[I_n;B\mid\{B(z),z\in C\}\big]$, $n\geqslant 2$, эквивалентен, согласно лемме 2.6, декартову произведению

$$\bar{\mathcal{G}}\big[I_n;B\mid\{B(z),z\in C\}\big] = \mathcal{F}[B;n+1]\otimes\left(\bigotimes_{z\in C}\bar{\mathcal{G}}[B(z);z]\right),$$

где $\mathcal{F}_n[B;n+1]$ — класс графов без вершин сочленения над множеством вершин $B\cup\{n+1\}$, $\bar{\mathcal{G}}[B(z);z]$, $z\in C$ — набор таких непустых классов, что $\bar{\mathcal{G}}_z[B(z);z]$ содержит все связные графы с множеством вершин $B(z)\cup\{z\}$ и выделенной вершиной $z\in C$. Тогда

$$\mathsf{f}_n\Big[f_{n+1}\big(X_{n+1};B\mid\{B(z),z\in C\}\big)\Big] =$$
$$= \sum_{\mathfrak{G}_B\in\mathcal{F}_n[B;n+1]}\left(\prod_{z\in C}\ \sum_{\mathfrak{G}(z)\in\bar{\mathcal{G}}_z[B(z);z]}\right)\mathsf{f}_n\Big[h\Big(X_{n+1};\bigvee_{z\in C}\big\{\mathfrak{G}_B\vee\mathfrak{G}(z)\big\}\Big)\Big]. \tag{5.12}$$

Так как (ср. с (5.7))

$$h\Big(X_{n+1};\bigvee_{z\in C}\big\{\mathfrak{G}_B\vee\mathfrak{G}(z)\big\}\Big) = h\big(X(B);\mathfrak{G}_B\big)\prod_{z\in C}h\big(X(B(z));\mathfrak{G}(z)\big),$$

то, ввиду мультипликативности (5.8), получаем следующее выражение:

$$\mathsf{f}_n\Big[h\Big(X_{n+1};\bigvee_{z\in C}\big\{\mathfrak{G}_B\vee\mathfrak{G}(z)\big\}\Big)\Big] = \mathsf{f}_{|B|}\big[h(X(B);\mathfrak{G}_B)\big]\prod_{z\in C}\mathsf{f}_{|B(z)|}\big[h(X(B(z));\mathfrak{G}(z))\big].$$

Тогда на основании (5.12) получаем

$$\mathsf{f}_n\Big[f_{n+1}\big(X_{n+1};B\mid\{B(z),z\in C\}\big)\Big] = \mathsf{f}_{|B|}\big[g_{|B|+1}\big]\cdot\prod_{z\in C}\mathsf{f}_{|B(z)|}\big[\bar{f}_{|B(z)|+1}\big], \tag{5.13}$$

где использованы введенные в (5.3) функции $g_{n+1}(X_{n+1})$, а также функции

$$\bar{f}_{B(z)|+1}\big(X_{|B|+1}\big) = \sum_{\mathfrak{G}(z)\in\bar{\mathcal{G}}_z[B(z);z]} h\big(X_{|B|+1};\mathfrak{G}(z)\big),\quad z\in C.$$

В формуле (5.12) в случае, когда $C=\varnothing$, $\mathfrak{G}_B=\mathfrak{G}$, левая часть равенства равна $\mathsf{f}_n\big[f_{n+1}(X_{n+1})\big]$.

8. На основании формул (5.10), (5.11), (5.13) получаем:

$$\mathsf{f}_n\big[f^{(1)}_{n+1}(X_{n+1})\big] = \sum_{B\subset I_n:|B|\geqslant 1}\ \sum_{C\subset B} f_{n+1}(X_{n+1};B;C) =$$
$$= \sum_{B\subset I_n:|B|\geqslant 1}\ \sum_{C\subset B}\ \sum_{\{B(z);z\in C\}\in\mathfrak{D}(B,C)} \mathsf{f}_n\Big[f_{n+1}\big(X_{n+1};B\mid\{B(z),z\in C\}\big)\Big] =$$
$$= \sum_{B\subset I_n:|B|\geqslant 1}\ \sum_{C\subset B}\ \sum_{\{B(z);z\in C\}\in\mathfrak{D}(B,C)} \mathsf{f}_{|B|}[g_{|B|+1}]\cdot\prod_{z\in C}\mathsf{f}_{|B(z)|}\big[\bar{f}_{|B(z)|+1}\big] =$$
$$= \sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\sum_{C\subset I_m}\ \sum_{\{B(z);z\in C\}\in\mathfrak{D}(I_m,C)} \mathsf{f}_m[g_{m+1}]\cdot\prod_{z\in C}\mathsf{f}_{|B(z)|}\big[\bar{f}_{|B(z)|+1}\big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \sum_{\{B(z_j);j\in I_l\}\in\mathfrak{D}(I_m,I_l)} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \cdot \prod_{j=1}^{l} \mathsf{f}_{|B(z_j)|}\big[\bar{f}_{|B(z_j)|+1}\big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \sum_{\substack{\langle k_1,\ldots,k_l\rangle:\\ k_1+\cdots+k_l=n-m,\\ k_j\geqslant 1,\ j=1,\ldots,l}} \frac{(n-m)!}{k_1!\ldots k_l!} \cdot \prod_{j=1}^{l} \mathsf{f}_{k_j}\big[\bar{f}_{k_j+1}\big]; \quad (5.14)$$

здесь $\mathsf{f}_0\big[\bar{f}_{|B(z)|+1}\big] = 1$ при $B(z) = \varnothing$.

9. Ввиду сходимости степенных рядов, используемых в следующих преобразованиях, согласно (5.9), получаем

$$\mathsf{S}\big[z;\bar{\mathsf{f}}\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathsf{f}_n\big[\bar{f}_{n+1}\big] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{l_j\geqslant 1,\ j=1,\ldots,s:\\ l_1+\cdots+l_s=n}} \frac{n!}{l_1!\ldots l_s!} \prod_{j=1}^{s} \mathsf{f}_{l_j}\Big[\bar{f}^{(1)}_{l_j+1}\big(X_{l_j}, x_{n+1}\big)\Big] =$$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{s=n}^{\infty} \sum_{\substack{l_j\geqslant 1,\ j=1,\ldots,s:\\ l_1+\cdots+l_s=n}} \prod_{j=1}^{s} \frac{z^{l_j}}{l_j!} \mathsf{f}_{l_j}\Big[\bar{f}^{(1)}_{l_j+1}\big(X_{l_j}, x_{n+1}\big)\Big] =$$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \prod_{j=1}^{s} \sum_{l_j=1}^{\infty} \frac{z^{l_j}}{l_j!} \mathsf{f}_{l_j}\Big[\bar{f}^{(1)}_{l_j+1}\big(X_{l_j}, x_{n+1}\big)\Big] = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathsf{f}_n\Big[\bar{f}^{(1)}_{n+1}(X_{n+1})\Big]\right].$$

Преобразуем теперь сумму, стоящую в показателе экспоненты, после подстановки в нее значения (5.14) функционала $\mathsf{f}_n\big[\bar{f}^{(1)}_{n+1}(X_{n+1})\big]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathsf{f}_n\Big[\bar{f}^{(1)}_{n+1}(X_{n+1})\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{m!} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \sum_{\substack{\langle k_1,\ldots,k_l\rangle:\\ k_1+\cdots+k_l=n-m,\\ k_j\geqslant 1,\ j=1,\ldots,l}} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{k_j!} \mathsf{f}_{k_j}\big[\bar{f}_{k_j+1}\big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{\substack{\langle k_1,\ldots,k_l\rangle:\\ k_1+\cdots+k_l=n-m,\\ k_j\geqslant 1,\ j=1,\ldots,l}} \prod_{j=1}^{l} \frac{z^{k_j}}{k_j!} \mathsf{f}_{k_j}\big[\bar{f}_{k_j+1}\big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \sum_{\substack{\langle k_1,\ldots,k_l\rangle:\\ k_j\geqslant 1,\ j=1,\ldots,l}} \prod_{j=1}^{l} \frac{z^{k_j}}{k_j!} \mathsf{f}_{k_j}\big[\bar{f}_{k_j+1}\big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \prod_{j=1}^{l} \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{z^{k_j}}{k_j!} \mathsf{f}_{k_j}\big[\bar{f}_{k_j+1}\big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \mathsf{f}_k\big[\bar{f}_{k+1}\big]\right)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \mathsf{f}_m[g_{m+1}] \Big(\mathsf{S}\big[z;\bar{\mathsf{f}}\big]\Big)^m.$$

Тогда

$$\mathsf{S}\big[z;\bar{\mathsf{f}}\big] = \exp\Big(\mathsf{S}\big[z\mathsf{S}[z;\bar{\mathsf{f}}];\mathsf{g}\big] - 1\Big).$$

Теорема доказана. □

6. Заключение. В заключение укажем на некоторые применения описанной в работе алгебраической техники. В равновесной статистической механике классических систем (см. [8]) при вычислении уравнения состояния $P(z,T)$ в виде степенного ряда по так называемой активности z возникает величина $\ln\Xi$, где Ξ — статистическая сумма системы, определяемая формулой

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \exp\left(- \sum_{\{j,k\} \subset I_n} U(x_j - x_k)/T \right) \prod_{k=1}^{n} dx_k = \mathsf{f}[z; \mathsf{f}],$$

где dx — мера Лебега в $\mathbb{R}^3$, которая инвариантна относительно группы трансляций, $U(x)$ — потенциал взаимодействия в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Здесь компоненты последовательности f симметрических функций порождаются функцией $w(x,y) = \exp(-U(x-y)/T)$. Выражение для $P(z,T)$ дается формулой (2.2), в которой коэффициенты так называемого *группового* разложения определяются функциями последовательности $\bar{\mathsf{f}}$. В терминах введенных величин плотность ρ числа частиц для указанных систем определяется формулой

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} \int_{\Omega^n} \bar{f}_{n+1}(X_{n+1}) \prod_{k=1}^{n} dx_k = \mathsf{S}[z; \bar{\mathsf{f}}].$$

Тогда формула (5.4) представляет уравнение $\rho = \exp\bigl(\mathsf{S}\bigl[z\rho; \mathsf{g}\bigr] - 1\bigr)$ относительно ρ, в котором коэффициенты (называемые неприводимыми интегралами) определяются компонентами последовательности g.

Наконец, укажем простое применение формулы (5.4) в задаче перечисления графов без вершин сочленения (см. [2]).

Теорема 6.1. *Пусть в последовательностях $\langle N_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ и $\langle M_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ компоненты N_n — числа связных графов с $n \in \mathbb{N}$ вершинами (где $N_1 = 1$) и M_m — числа связных графов без вершин сочленения с $m \in \mathbb{N}$ вершинами ($M_1 \equiv 1$). Тогда числа M_{n+1} определяются рекуррентно через N_m, $m = 1, \dots, n+1$, и M_m, $m = 1, \dots, n$ по формуле*

$$N_{n+1} = n! \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{\langle k_1,\dots,k_s\rangle,\ k_j \in \mathbb{N}:\\ k_1+\dots+k_s = n}} \prod_{j=1}^{s} \left(\sum_{m=1}^{k_j} \frac{M_{m+1}}{m!} \sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\ l_i \in \mathbb{N}_+:\\ l_1+\dots+l_m = k_j - m}} \prod_{i=1}^{m} \frac{N_{l_i+1}}{l_i!} \right). \tag{6.1}$$

Доказательство. Достаточно положить $\mathsf{f}_m[g_{m+1}] = M_{m+1}$ и $\mathsf{f}_n[\bar{f}_{n+1}] = N_{n+1}$ в формулах (5.9) и (5.14). □

Следствие 6.1 (см. [7]). *Производящие функции*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N_{n+1}, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} M_{n+1} \tag{6.2}$$

связаны следующим функциональным уравнением:

$$F(z) = \exp\Bigl[G\bigl(zF(z)\bigr) - 1\Bigr]. \tag{6.3}$$

Доказательство. Утверждение следует из (5.4) при $\mathsf{f}_m[g_{m+1}] = M_{m+1}$ и $\mathsf{f}_n[\bar{f}_{n+1}] = N_{n+1}$. □

Замечание 6.1. Ряды (6.2) расходятся в каждой ненулевой точке плоскости z, т.е. их нужно рассматривать как асимптотические степенные ряды. Несмотря на расходимость, их допустимо использовать для последовательного вычисления чисел M_m, $m \in \mathbb{N}$, на основе производящей функции $F(z)$ чисел N_n, посредством вычисления производных порядка $n = 1, \dots, m$ (обоснование этой возможности дано в [2]). Например, так как

$$F(0;1) = 1,\ F'(0;1) = 1,\ F''(0;1) = N_3 = 4,\ F'''(0;1) = N_4 = 38,\ F^{IV}(0;1) = N_5 = 728,$$

то применение этой процедуры приводит к следующим значениям:

$$G(0,1) = 1,\ G'(0,1) = M_2 = 1,\ G''(0;1) = M_3 = 1,\ G'''(0;1) = M_4 = 10,\ G^{IV}(0;1) = M_5 = 238.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. — М.: Наука, 1979.
2. *Вирченко Ю. П., Остапенко Л. П.* Задачи перечисления графов с помеченными вершинами// Науч. вед. БелГУ. Мат. Физ. — 2016. — *44*, № 214. — С. 150–180.
3. *Гейликман Б. Т.* Статистическая теория фазовых превращений. — М.: ГИТТЛ, 1954.
4. *Майер Дж., Гепперт-Майер М.* Статистическая механика. — М.: Мир, 1980.
5. *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. — М.: Наука, 1985.
6. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980.
7. *Остапенко Л. П., Вирченко Ю. П.* Число связных графов без вершин сочленения// Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна—2016». — Воронеж: Научная книга, 2016. — С. 310–314.
8. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. — М.: Мир, 1971.
9. *Харрари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
10. *Харрари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
11. *Mayer J., Harrison S. F.* Statistical mechanics of condensing systems. III// J. Chem. Phys. — 1938. — *6*. — P. 87–100.
12. *Mayer J., Harrison S. F.* Statistical mechanics of condensing systems. IV// J. Chem. Phys. — 1938. — *6*. — P. 101–104.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Данилова Любовь Петровна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `Danilova@bsu.edu.ru`