Глушак А.В. Критерий единственности решения граничных задач для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на конечном интервале. Математ. заметки. 2021. Т. 109, вып. 6. С. 821–831.

УДК 517.983.23

Критерий единственности решения граничных задач для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на конечном интервале

Глушак А.В.

Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E, область определения $D(A) \subset E$ которого не обязательно плотна в E. Мы будем изучать граничные задачи на конечном интервале $0 < t < 1$, поскольку общий случай изменения $0 < t < T$ сводится к рассматриваемому заменой переменной t на t/T. Постановка граничных условий для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

в силу сингулярности уравнения в точке $t = 0$ зависит от параметра $k \in \mathbb{R}$ и эти условия будут приведены далее. Граничные условия в точке $t = 1$ для всех рассматриваемых случаев изменения параметра k одинаковы и имеют вид

$$\alpha u(1) + \beta u'(1) = u_1, \quad u_1 \in E. \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Граничные задачи для уравнения (1), вообще говоря, не являются корректными, но необходимость решать некорректные задачи в настоящее время является общепризнанной (см. введение в [1], [2], [3] и имеющуюся в них обширную библиографию). Во второй главе монографии [1] исследована корректность общих граничных задач для дифференциально-операторного уравнения первого порядка и для абстрактного несингулярного уравнения второго порядка (случай $k = 0$ в уравнении (1)).

Мы приведем постановку различных граничных задач для уравнения (1) в зависимости от параметра $k \in \mathbb{R}$ и установим соответствующие критерии единственности их решений. Будет показано, что единственность решения зависит лишь от расположения на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ собственных значений оператора A и связана с распределением нулей некоторых аналитических функций. Поскольку на оператор A наложены весьма общие условия, то в этой работе вопросов разрешимости граничных задач мы, естественно, не касаемся. Укажем лишь, что результаты о разрешимости граничных задач в полупространстве для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в частных производных приведены в [4], а граничные задачи на полуоси для абстрактных сингулярных уравнений исследовались в [5, 6].

Важную роль при установлении критерия единственности будет играть задача на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = \lambda v(t), \quad 0 < t < 1.$$

Структура общего решения этого дифференциального уравнения при всех значениях параметра $k \in \mathbb{R}$ указана в [7] и нужные в дальнейшем результаты мы будем напоминать по мере их использования.

1. Случай $k < 1$. Условие Дирихле при $t = 0$. Рассмотрим задачу определения функции $u(t) \in C([0,1], E) \bigcap C^2((0,1], E)$, принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0,1)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу (1), условию (2), а также граничному условию Дирихле

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in E. \tag{3}$$

Исследование единственности решения задачи (1) – (3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений $u(t)$, удовлетворяющих нулевым условиям

$$u(0) = 0, \tag{4}$$

$$\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \tag{5}$$

поскольку нулевое решение $u(t) \equiv 0$ у этой задачи всегда имеется.

Нетривиальные решения $u(t)$ однородной задачи (1), (4), (5) будем искать методом разделения переменных в виде $u(t) = v(t)h$, где $v(t) \in C[0,1] \bigcap C^2(0,1]$ — ненулевая скалярная комплекснозначная функция, $h \in D(A),\ h \neq 0$.

Подставляя $u(t) = v(t)g$ в задачу (1), (4), (5), будем иметь

$$v''(t)h + \frac{k}{t}v'(t)h = v(t)Ah, \tag{6}$$

и условия

$$v(0) = 0, \tag{7}$$

$$\alpha v(1) + \beta v'(1) = 0. \tag{8}$$

Из уравнения (6) вытекает равенство

$$Ah = \frac{v''(t) + k/t\ v'(t)}{v(t)}\ h, \tag{9}$$

которое должно выполняться на множестве $\{t \in (0,1) :\ v(t) \neq 0\}$.

Очевидно, равенство (9) может быть справедливым только, если

$$Ah = \lambda h \tag{10}$$

с некоторой постоянной $\lambda \in \mathbb{C}$.

Таким образом, в силу (10), элемент $h \in D(A),\ h \neq 0$ должен быть собственным вектором оператора A с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$, при этом уравнение (6) превратится в уравнение

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = \lambda v(t). \tag{11}$$

В работе [7] установлено, что общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (11) представимо в виде

$$v(t) = c_1 Y_k(t;\lambda) + c_2 t^{1-k} Y_{2-k}(t;\lambda), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

где $Y_k(t;A)$ — построенный в [7] разрешающий оператор задачи Коши для уравнения (1), $Y_k(0;A) = I$. Конкретные представления для $Y_k(t;\lambda)$ и $Y_{2-k}(t;\lambda)$ будут указаны по ходу доказательства.

Поэтому удовлетворяющее начальному условию (7) решение уравнения (11) имеет вид

$$v(t) = t^{1-k} Y_{2-k}(t;\lambda), \tag{13}$$

где при $k < 1$

$$Y_{2-k}(t;\lambda) = \Gamma(3/2 - k/2) \left(t\sqrt{\lambda}/2\right)^{k/2-1/2} I_{1/2-k/2}\left(t\sqrt{\lambda}\right), \tag{14}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя. Функцию $Y_{2-k}(t;\lambda)$ также называют нормированной функцией Бесселя и обозначают $j_{1/2-k/2}(t\sqrt{\lambda})$.

Для нахождения подходящих собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ осталось воспользоваться граничным условием (8), подставляя в которое функцию (13), получим трансцендентное уравнение

$$(\alpha + \beta(1-k)) Y_{2-k}(1;\lambda) + \beta Y'_{2-k}(1;\lambda) = 0. \tag{15}$$

Обозначив $\sqrt{\lambda} = i\mu$ и учитывая представление (14), в терминах функции Бесселя первого рода $J_\nu(\cdot)$ уравнение (15) запишем в виде

$$\frac{(\alpha + \beta(1-k)/2) J_{1/2-k/2}(\mu) + \beta\mu J'_{1/2-k/2}(\mu)}{\mu^{1/2-k/2}} = 0. \tag{16}$$

Как известно (см. п. 18.3 [8]), уравнение (16) имеет бесконечное множество расположенных в порядке возрастания положительных корней μ_m, $m \in \mathbb{N}$. Подставляя $\lambda_m = -\mu_m^2$ в (13) получим функции

$$v_m(t) = t^{1-k}(Y_{2-k}(t;\lambda_m), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

которые являются нетривиальными решениями задачи (11), (7), (8), при этом соотношение (10) превратится в уравнения для нахождения $h_m \neq 0$

$$Ah_m = \lambda_m h_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Предположим далее, что число λ_m при некотором $m \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $h_m \neq 0$. Тогда мы определим нетривиальное решение однородной задачи (1), (4), (5) следующего вида

$$u_m(t) = t^{1-k} Y_{2-k}(t;\lambda_m) h_m. \tag{18}$$

Сформулируем теперь критерий единственности решения граничной задачи (1) – (3).

Теорема 1. Пусть $k < 1$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1) – (3) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_m, $m \in \mathbb{N}$ функции

$$\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda) = (\alpha + \beta(1-k)) Y_{2-k}(1;\lambda) + \beta Y'_{2-k}(1;\lambda), \tag{19}$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, исследование единственности решения задачи (1) – (3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений $u(t)$, удовлетворяющих нулевым условиям (4), (5).

Необходимость. Предположим противное, пусть некоторый нуль λ_m, $m \in \mathbb{N}$ из счетного множества $\Lambda_k^{\alpha,\beta}$ нулей функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$ является собственным значением оператора A

с собственным вектором $h_m \neq 0$. Тогда определяемая равенством (18) функция $u_m(t)$ служит нетривиальным решением однородной обратной задачи (1), (4), (5), что противоречит единственности решения этой задачи, и необходимость доказана.

Докажем теперь **достаточность.** Предположим, что ни одно число λ_m из счетного множества $\Lambda_k^{\alpha,\beta}$ нулей, определяемой равенством (19) функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$, не является собственным значением оператора A, и пусть $u(t)$ — некоторое решение однородной граничной задачи (1), (4), (5). Покажем, что в этом случае $u(t) \equiv 0$.

Введем в рассмотрение функцию $U(\lambda)$ переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве E

$$U(\lambda) = \int\limits_0^1 tY_{2-k}(t;\lambda)u(t)\ dt, \tag{20}$$

где скалярная функция $Y_{2-k}(t;\lambda)$ определена равенством (14), является решением уравнения (11) и удовлетворяет условиям $Y_{2-k}(0;\lambda) = I,\ Y'_{2-k}(0;\lambda) = 0$.

Учитывая замкнутость оператора A и равенство (1), вычислим $AU(\lambda)$. После двукратного интегрирования по частям будем иметь

$$AU(\lambda) = \int\limits_0^1 tY_{2-k}(t;\lambda)Au(t)\ dt = \int\limits_0^1 tY_{2-k}(t;\lambda)\left(u''(t) + \frac{k}{t}u'(t)\right)\ dt =$$

$$= tY_{2-k}(t;\lambda)u'(t)\,\big|_0^1 + \int\limits_0^1 \big((k-1)Y_{2-k}(t;\lambda) - tY'_{2-k}(t;\lambda)\big)\,u'(t)\ dt =$$

$$= Y_{2-k}(1;\lambda)u'(1) + \big((k-1)Y_{2-k}(t;\lambda) - tY'_{2-k}(t;\lambda)\big)\,u(t)\,\big|_0^1 +$$

$$+ \int\limits_0^1 t\left(Y''_{2-k}(t;\lambda) + \frac{2-k}{t}Y'_{2-k}(t;\lambda)\right)u(t)\ dt =$$

$$= Y_{2-k}(1;\lambda)u'(1) + \big((k-1)Y_{2-k}(1;\lambda) - Y'_{2-k}(1;\lambda)\big)\,u(1) + \lambda U(\lambda). \tag{21}$$

Пусть в граничном условии (5) коэффициент $\beta \neq 0$. Тогда равенство (21) примет вид

$$(\lambda I - A)U(\lambda) = \frac{1}{\beta}\big((\alpha + \beta(1-k))Y_{2-k}(1;\lambda) + \beta Y'_{2-k}(1;\lambda)\big)\,u(1). \tag{22}$$

Таким образом, для всех чисел $\lambda_m \in \Lambda_k^{\alpha,\beta}$ из счетного множества нулей определяемой равенством (19) функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$, из равенства (22) вытекает соотношение

$$AU(\lambda_m) = \lambda_m U(\lambda_m).$$

По предположению, ни одно из таких чисел λ_m не является собственным значением оператора A. Но тогда все значения $U(\lambda_m)$ должны равняться нулю

$$U(\lambda_m) = 0,\ m \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Пусть $\mu_m,\ m \in \mathbb{N}$ — расположенные в порядке возрастания положительные корни уравнения (16) и $(i\mu_m)^2 = \lambda_m$. Тогда равенства (23) принимают вид

$$U_m = \int\limits_0^1 t^{k/2+1/2}J_{1/2-k/2}(t\mu_m)u(t)\ dt = 0,\ m \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Применив к определяемым равенством (24) векторным коэффициентам U_m линейный непрерывный функционал $f \in E^*$, получим скалярную функцию $\varphi(t) = f(t^{k/2-1/2}u(t))$, удовлетворяющую условиям

$$f(U_m) = \int\limits_0^1 t J_{1/2-k/2}(t\mu_m)\varphi(t)\,dt = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Дальнейшие рассуждения зависят от коэффициентов α, β, k.

a) Если в граничном условии (5) коэффициенты α, β, k таковы, что

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 - k > 0, \tag{26}$$

то с точностью до множителя скалярные коэффициенты $f(U_m)$ являются коэффициентами ряда Дини (см. п. 18.3 [8])

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m J_{1/2-k/2}(t\mu_m) \tag{27}$$

разложения функции $\varphi(t)$ по функциям $J_{1/2-k/2}(t\mu_m)$.

Функция $\varphi(t)$ вполне определена своими коэффициентами ряда Дини независимо от того, сходится этот ряд или нет, следовательно, $\varphi(t) \equiv 0,\ 0 \le t \le 1$. Поскольку выбор функционала $f \in E^*$ был произвольным, то и $u(t) \equiv 0,\ 0 \le t \le 1$.

b) Если

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 - k = 0, \tag{28}$$

то к разложению Дини (27) следует дополнительно добавить (см. п. 18.3 [8]) слагаемое $b_0 t^{1/2-k/2}$, где $b_0 = 2f(U_0)$, а U_0 определяется формулой (24) по значению $\mu_0 = 0$.

И в этом случае, учитывая равенство (28) и граничное условие (5), получим

$$\varphi(t) = b_0 t^{1/2-k/2}, \quad \alpha\varphi(1) + \beta\varphi'(1) = b_0 \frac{\beta(k-1)}{2} = 0.$$

Поскольку $\beta \ne 0,\ k < 1$, то $b_0 = 0$ и $\varphi(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0,\ 0 \le t \le 1$.

c) Пусть

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 - k < 0. \tag{29}$$

В этом случае к разложению Дини (27) следует дополнительно добавить (см. п. 18.3 [8]) слагаемое $b_0 I_{1/2-k/2}(t\mu_0)$, где $\pm i\mu_0$ ($\mu_0 > 0$) — два чисто мнимых корня уравнения (16) и тогда учитывая граничное условие (5), получим

$$\varphi(t) = b_0 I_{1/2-k/2}(t\mu_0),$$

$$\alpha\varphi(1) + \beta\varphi'(1) = b_0\left(\alpha I_{1/2-k/2}(\mu_0) + \beta\mu_0 I'_{1/2-k/2}(\mu_0)\right) = b_0 \frac{\beta(k-1)}{2} I_{1/2-k/2}(\mu_0) = 0.$$

Модифицированная функция Бесселя $I_{1/2-k/2}(\mu_0)$ при действительных значениях μ_0 в нуль не обращается, поэтому, опять-таки $b_0 = 0$ и $\varphi(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0,\ 0 \le t \le 1$.

Тем самым установлено, что решение $u(t)$ однородной задачи (1), (4), (5), а, следовательно, и задачи (1) – (3), может быть только нулевым.

d) Если, наконец, $\beta = 0$, то доказательство проводится аналогично рассуждениям пункта a), при этом вместо ряда Дини (27), где μ_m — корни уравнения (16), используется ряд Фурье-Бесселя, построенный по нулям функции $J_{1/2-k/2}(\mu)$.

Теорема доказана.

Нули функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$ при $k < 1$ удобно определять равенством $\lambda_m = -\mu_m^2$, где μ_m — корни уравнения (16). Например, если $k = 0$, то уравнение (16) принимает вид

$$\alpha \frac{\sin\mu}{\mu} + \beta\cos\mu = 0.$$

В некоторых случаях корни этого уравнения явно вычисляются, в частности, при $\alpha = 0$ имеем $\mu_m = \pi/2 + \pi m,\ m \in \mathbb{N}$, поэтому $\Lambda_0^{0,\beta} = \{-(\pi/2 + \pi m)^2,\ m \in \mathbb{N}\}$, а если $\beta = 0$, то $\mu_m = \pi m,\ m \in \mathbb{N}$, а $\Lambda_0^{\alpha,0} = \{-(\pi m)^2,\ m \in \mathbb{N}\}$.

Таким образом, чтобы решить вопрос о единственности решения рассматриваемой граничной задачи, следует определить собственные значения оператора A и выяснить их принадлежность множеству $\Lambda_k^{\alpha,\beta}$ нулей функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$. Многочисленные примеры нахождения собственных значений для дифференциальных операторов A, действующих по пространственным переменным можно найти, например, в гл. 2 [9], и в каждом конкретном случае их следует сравнить с нулями функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$.

Мы рассмотрим пример действующего по пространственной переменной x сингулярного оператора A. Для заданного на множестве функций

$$D(A) = H^2(0,1)\bigcap H_0^1(0,1) \subset E = L_2(0,1)$$

дифференциального оператора Бесселя $A = B_{q,x}$, где

$$B_{q,x} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{q}{x}\frac{d}{dx}, \quad q > 0,$$

единственность решения рассматриваемых граничных задач сводится к исследованию расположения нулей функции $I_{q/2-1/2}(\sqrt{z})$, которые являются собственными значениями оператора $B_{q,x}$, и нулей определяемой равенством (19) функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$.

В частности, при $\beta = 0,\ k < 1$ предстоит исследовать расположения нулей функций $I_{q/2-1/2}(\sqrt{z})$ и $I_{1/2-k/2}\left(\sqrt{\lambda}\right)$. В зависимости от параметров k и q, указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на $(-\infty, 0)$, поэтому единственность решения граничных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулей функций Бесселя см., например, в п.2 работы [10]. Отметим также, что важную роль при исследовании единственности играют и промежутки изменения переменных $0 < t < T$ и $0 < x < l$, поскольку при этом нули каждой из функций Бесселя меняют свое положение. Аналогичные факты при решении задачи Дирихле для гиперболических уравнений в частных производных установлены ранее в [11].

В случаях $A = -B_{q,x}$ или $A = iB_{q,x}$, где i — мнимая единица, собственные значения оператора A лежат либо на $(0, +\infty)$, либо на мнимой оси и не попадают на $(-\infty, 0)$, поэтому соответствующие граничные задачи имеют единственное решение.

2. Случай $k \geq 0$. Весовое условие Неймана при $t = 0$. Как видно из представления (12) для общего решения уравнения (11), уравнение (1) может иметь и неограниченные при $t = 0$ решения, если вместо условия Дирихле задавать весовое условие Неймана. Предложенный в п.1 метод доказательства единственности использует разложения в ряды Дини и Фурье-Бесселя, поэтому постановка граничного условия в точке $t = 0$ должна быть такой, чтобы у общего решения обыкновенного дифференциального уравнения (11) только одна из постоянных c_1 или c_2 обратилась в нуль. Первая такая возможность реализована в п.1 ($c_1 = 0,\ c_2 = 1$). Еще одной возможностью является весовое граничное условие Неймана вида

$$\lim_{t\to 0+} t^k u'(t) = u_2 \in E. \tag{30}$$

Удовлетворяющее однородному начальному условию (30) решение уравнения (11) имеет вид ($c_1 = 1,\ c_2 = 0$)

$$v(t) = Y_k(t;\lambda),$$

где при $k \geq 0$

$$Y_k(t;\lambda) = \Gamma(k/2+1/2)\left(t\sqrt{\lambda}/2\right)^{1/2-k/2} I_{k/2-1/2}\left(t\sqrt{\lambda}\right). \tag{31}$$

Дальнейшая схема установления критерия единственности аналогична п.1, при этом вместо соотношений (15), (16), (18), (20) следует использовать соответственно следующие равенства:

$$\alpha Y_k(1;\lambda) + \beta Y_k'(1;\lambda) = 0,$$

$$\frac{(\alpha + \beta(1-k)/2)J_{k/2-1/2}(\mu) + \beta\mu J'_{k/2-1/2}(\mu)}{\mu^{k/2-1/2}} = 0, \tag{32}$$

$$u_m(t) = Y_k(t;\lambda_m)h_m,$$

$$U(\lambda) = \int\limits_0^1 t^k Y_k(t;\lambda)u(t)\ dt.$$

В результате мы приходим к следующему критерию единственности.

Теорема 2. Пусть $k \geq 0$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1), (2), (30) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_m,\ m \in \mathbb{N}$ функции

$$\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda) = \alpha Y_k(1;\lambda) + \beta Y_k'(1;\lambda) \tag{33}$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Нули задаваемой равенством (33) функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$ удобно определять равенством $\lambda_m = -\mu_m^2$, где μ_m — корни уравнения (32).

Если $k = 0$, то уравнение (32) принимает вид

$$\alpha\cos\mu - \beta\mu\sin\mu = 0.$$

В частности, при $\beta = 0$ имеем $\mu_m = \pi/2 + \pi m,\ \lambda_m = -\mu_m^2,\ m \in \mathbb{N}$, а если $\alpha = 0$, то $\mu_0 = \lambda_0 = 0,\ \mu_m = \pi m,\ \lambda_m = -(\pi m)^2,\ m \in \mathbb{N}$.

Заметим, что наличие нуля $\lambda_0 = 0$ у функции $\Upsilon_k^{\alpha,\beta}(\lambda)$ при установлении однозначной разрешимости граничных задач приводит к необходимости существования обратного оператора A^{-1}.

Если $k = 2$, то уравнение (32) принимает вид

$$\frac{(\alpha-\beta)\sin\mu + \beta\mu\cos\mu}{\mu} = 0.$$

В частности, при $\beta = 0$ имеем $\mu_m = \pi m,\ \lambda_m = -(\pi m)^2,\ m \in \mathbb{N}$, а если $\alpha = \beta \neq 0$, то $\mu_m = \pi/2 + \pi m,\ \lambda_m = -\mu_m^2,\ m \in \mathbb{N}$.

3. Случай $0 \le k < 1$. Для указанных значений параметра k одновременно справедливы и теорема 1 с условием Дирихле при $t = 0$, и теорема 2 с весовым условием Неймана при $t = 0$.

4. Случай $-1 < k < 0$. Весовое условие Неймана при $t = 0$. Условие Дирихле или Неймана при $t = 1$. Наряду с условием Дирихле при $t = 0$, которое было рассмотрено в п.1, рассмотрим и весовое условие Неймана. В отличие от п.2 при отрицательных значениях индекса $-1 < k < 0$ для функции $v(t) = Y_k(t;\lambda)$ вместо равенства (31) следует использовать (см. [7]) другое представление, а именно:

$$v(t) = Y_k(t;\lambda) = Y_{k+2}(t;\lambda) + \frac{t}{k+1}Y'_{k+2}(t;\lambda) =$$

$$= \frac{\Gamma(k/2+3/2)}{\left(t\sqrt{\lambda}\right)^{k/2+1/2}}\left(\frac{1}{2}I_{k/2+1/2}(t\sqrt{\lambda}) + \frac{t\sqrt{\lambda}}{k+1}I'_{k/2+1/2}(t\sqrt{\lambda})\right). \tag{34}$$

Для нахождения подходящих собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ воспользуемся граничным условием (8), подставляя в которое функцию (34), получим трансцендентное уравнение

$$\left(\alpha + \frac{\beta\lambda}{k+1}\right)Y_{k+2}(1;\lambda) + \frac{\alpha}{k+1}Y'_{k+2}(1;\lambda) = 0$$

или

$$\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-k/2-1/2}\left(\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\lambda}{k+1}\right)I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda}) + \frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{k+1}I'_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})\right) = 0. \tag{35}$$

Ввиду наличия множителя λ перед функцией $I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})$ корни уравнение (35), вообще говоря, не связаны с разложениями функций в ряды Фурье-Бесселя и Дини, за исключением случаев $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Именно эти случаи мы далее и рассмотрим.

4.1. Условие Неймана при $t = 1$. Если $\alpha = 0$, то граничное условие (2) превращается в условие Неймана при $t = 1$

$$u'(1) = u_1, \quad u_1 \in E, \tag{36}$$

а уравнение (35) принимает вид

$$\lambda^{3/4-k/4}I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda}) = 0$$

или при $\lambda = -\mu^2$

$$\mu^{3/2-k/2}J_{k/2+1/2}(\mu) = 0. \tag{37}$$

Обозначим корни уравнения (37) через $\mu_0 = 0,\ \mu_m > 0,\ m \in \mathbb{N},\ \lambda_m = -\mu_m^2$.

Дальнейшая схема установления критерия единственности аналогична доказательству теоремы 1(d) или 1(a). В результате получим следующий критерий единственности.

Теорема 3. Пусть $-1 < k < 0$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1), (30), (36) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_m,\ m = 0, 1, 2...$ функции

$$\Upsilon_k^{0,\beta}(\lambda) = \lambda Y_{k+2}(1;\lambda)$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

4.2. Условие Дирихле при $t = 1$. Если $\beta = 0$, то граничное условие (2) превращается в условие Дирихле при $t = 1$

$$u(1) = u_1, \quad u_1 \in E, \tag{38}$$

а уравнение (35) принимает вид

$$\frac{(k+1)I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})+2\sqrt{\lambda}I'_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})}{\lambda^{k/4+1/4}}=0,$$

или при $\lambda=-\mu^2$

$$\frac{(k+1)J_{k/2+1/2}(\mu)+2\mu J'_{k/2+1/2}(\mu)}{\mu^{k/2+1/2}}=0. \qquad (39)$$

Обозначим положительные корни уравнения (39) через $\mu_m,\ m\in\mathbb{N}$, $\lambda_m=-\mu_m^2$. Аналогично доказательству теоремы 1(a) получим следующий критерий.

Теорема 4. Пусть $-1<k<0$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1), (30), (38) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_m,\ m=0,1,2...$ функции

$$\Upsilon_k^{\alpha,0}(\lambda)=Y_{k+2}(1;\lambda)+\frac{1}{k+1}Y'_{k+2}(1;\lambda)$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Предыдущие результаты о критерии единственности обобщаются на случай сингулярного уравнения соболевского типа

$$B\left(u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)\right)=Au(t),\quad 0<t<1, \qquad (40)$$

где, также как и A, оператор B — линейный замкнутый оператор в E, область определения $D(B)\subset E$ которого не обязательно плотна в E.

Схема доказательства утверждений аналогична. Отличительная особенность состоит в замене равенства (10) $Ah=\lambda h$, определяющего собственные значения оператора A, на операторное уравнение $Ah=\lambda Bh$, если оно имеет нетривиальные решения, а также замене спектра $\sigma_p(A)$ на спектр $\sigma_p(B,A)$ оператора A относительно B. Кроме того, естественно, в определение решения следует дополнительно включить требование принадлежности пространству $C^2((0,1),D(B))$.

Список литературы

[1] *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит. 1995.

[2] *Кабанихин С.И., Криворотько О.И.* Численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15. №4. С. 90 – 101.

[3] *Васильев В.И., Кардашевский А.М., Попов В.В.* Решение задачи Дирихле для уравнения колебаний струны методом сопряженных градиентов // Вестник СВФУ. 2015 Т. 12. №2. С. 43 – 50.

[4] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987.

[5] *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №4. С. 510 – 514.

[6] *Глушак А.В.* О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя-Струве // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. №8. С. 1103 – 1110.

[7] *Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Матем. 1986. №6. С. 55 – 56.

[8] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.

[9] *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ. 1998.

[10] *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. №9. С. 1387 — 1441.

[11] *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 2. С. 262—276.