Глушак А.В. О разрешимости вырождающихся гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 61–75.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.23

О РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.В. Глушак

Аннотация. В банаховом пространстве рассмотрены начальные задачи для ряда гиперболических уравнений со степенным характером вырождения и операторными коэффициентами. Установлены достаточные условия их однозначной разрешимости, налагаемые на коэффициенты уравнения, порядок вырождения и начальные элементы.

1 Введение

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей (см. [1] – [3] и имеющуюся в них библиографию). Отдельные виды таких уравнений подробно изучены, однако для уравнений второго порядка вырождающихся в уравнение первого порядка некоторые вопросы, в частности, случай операторных коэффициентов (абстрактные уравнения) и получение явных формул для решений, требуют дальнейшего исследования.

В настоящей работе мы рассмотрим уравнения в банаховом пространстве в гиперболическом случае. Ранее задача Коши с оператором $A = A_0^2$, A_0 — генератор C_0-группы, для дифференциального уравнения вида $u''(t) - t^\alpha Au(t) = 0,\ \alpha > 0$, изучалась в [4], а случай гильбертового пространства рассмотрен в [5]. Задача Коши с генератором операторной косинус-функции, для слабо вырождающегося дифференциального уравнения вида $t^\gamma u''(t) - Au(t) = f(t)$, $0 < \gamma < 2$ рассматривалась в [6] (по поводу терминов см., например, книгу [7]). И в том, и в другом случаях указанных вырождающихся уравнений исследование проводилось путем их сведения к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Мы рассмотрим более общий чем в [4] – [6] вид как дифференциального уравнения, так и операторного коэффициента, имеющего, кроме того, и переменную составляющую. Исследования также будут производиться путем сведения к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу, при этом потребуется использование операторной функции Бесселя (ОФБ), введённой в рассмотрение и изученной автором в работах [8], [9].

В связи с указанными фактами опишем класс операторов A, с которым в дальнейшем будут рассматриваться различные уравнения. В работах [8], [9] при $k > 0$ в гиперболическом случае исследована корректная разрешимость следующей задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД) с операторным коэффициентом A

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = Av(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$v(0) = u_0, \;\; v'(0) = 0. \tag{2}$$

В работе [8] необходимое и достаточное условие разрешимости сформулировано в терминах оценки нормы резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ и ее весовых производных, а в статье [9] получен критерий равномерной корректности этой задачи, который, в отличие от [8], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее невесовых производных.

Класс операторов A, с которым задача Коши (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, а соответствующий разрешающий оператор, который назовем операторной функцией Бесселя, — через $Y_k(t)$, т.е., $v(t) = Y_k(t)u_0$, при этом через G_0 ($G_0 \subset G_k$ при $k > 0$) обозначим множество генераторов операторной косинус-функции $C(t)$ и $Y_0(t) = C(t)$. Примеры операторов $A \in G_k$ и порождаемых ими ОФБ $Y_k(t)$ приводятся в [9]. В частности, если $A \in G_0 \subset G_k, \; k > 0$ и $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, то

$$Y_k(t) = \frac{2\Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int\limits_0^1 (1 - s^2)^{k/2-1} C(ts)\, ds. \tag{3}$$

2 Слабо вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения

При $t \geq 0$ в банаховом пространстве E рассмотрим слабо вырождающееся дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами вида

$$t^\gamma u''(t) + bt^{\gamma-1}u'(t) = (A + t^\beta B)u(t), \tag{4}$$

где $0 < \gamma < 2, \; b \in \mathbb{R}, \; \beta \geq 0$, A — неограниченный замкнутый оператор, $B \in L(E)$ — ограниченный оператор. Значение параметра $\gamma, \; 0 < \gamma < 2$ и означает слабое вырождение, в отличие от случая сильного вырождения $\gamma \geq 2$, который далее также будет рассмотрен в работе.

Под решением уравнения (4) мы будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую на $(0, +\infty)$ функцию $u(t)$, принадлежащую области определения $D(A)$ оператора A и удовлетворяющую этому уравнению. Аналогично определяются решения и последующих рассматриваемых уравнений.

В скалярном случае при $\gamma = 1, \; A = \lambda > 0, \; B = 0$ неоднородное уравнение вида (4) методами теории полугрупп исследовалось в работе [10] для изучения стохастических процессов, которые являются пределом последовательности случайных блужданий.

Замена независимой переменной $t = (\tau/\nu)^\nu, \; \nu = 2/(2 - \gamma)$ и неизвестной функции $u(t) = u\left((\tau/\nu)^\nu\right) = w(\tau)$, с учетом равенств

$$u'(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{1-\nu} w'(\tau), \quad u''(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{2(1-\nu)} \left(w''(\tau) + \frac{1-\nu}{\tau} w'(\tau)\right), \tag{5}$$

приводит слабо вырождающееся уравнение (4) к уравнению ЭПД вида

$$w''(\tau) + \frac{b\nu - \nu + 1}{\tau} w'(\tau) = \left(A + \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{\nu\beta} B\right) w(\tau), \quad \tau > 0. \tag{6}$$

Корректная постановка начальных условий для уравнения ЭПД (6) зависит от знака параметра $b\nu - \nu + 1$. Если $b\nu - \nu + 1 \geq 0$, то начальные условия также как и для уравнения (1) имеют вид

$$w(0) = u_0, \quad w'(0) = 0. \tag{7}$$

Если $b\nu - \nu + 1 < 0$, то (см. [11]) следует задавать весовое начальное условие

$$w(0) = 0, \quad \lim_{\tau \to 0+} \tau^{b\nu-\nu+1} w'(\tau) = u_1. \tag{8}$$

Возможна и более общая постановка начальных условий (см. [12]), но она требует дополнительной гладкости начальных элементов и здесь мы ее рассматривать не будем.

Разрешимость начальной задачи для уравнения (6), естественно, зависит и от оператора $A + (\tau/\nu)^{\nu\beta} B$. Мы будем предполагать, что оператор A принадлежит более широкому, чем в цитированной во введении работе [6], классу функций $A \in G_k,\ G_k \supset G_0$ при некотором $k > 0$.

В работе [13] исследован вопрос о принадлежности классу $G_k,\ k > 0$ возмущённого оператора $A+B$ в случае, когда $A \in G_k$, B — ограниченный оператор, а в [14] принадлежность оператора $A + B$ некоторому классу корректности для неограниченного $B \in G_m,\ m \geq 0$. Указанные результаты о возмущении значительно расширяют класс операторов, порождающих ОФБ. В настоящей работе предстоит рассмотреть случай возмущения оператора $A \in G_k,\ k > 0$ переменным оператором вида $B(\tau) = (\tau/\nu)^{\nu\beta} B$.

Теорема 1. Пусть $k > 0,\ A \in G_k$, $B(t) = (t/\nu)^{\nu\beta} B,\ \nu\beta \geq 0$, а $Q(t, s)$ — непрерывный при $t \geq s > 0$ оператор, удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2 - 2k}{4t^2} Q(t,s) - B(t) Q(t,s) = \frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial s^2} - \frac{k^2 - 2k}{4s^2} Q(t,s) \tag{9}$$

и граничным условиям

$$\frac{dQ(t,t)}{dt} = \frac{1}{2} B(t), \quad \lim_{s \to 0+} s^{k/2-1} Q(t,s) = 0. \tag{10}$$

Тогда функция

$$v(t) = Y_k(t) u_0 + t^{-k/2} \int_0^t s^{k/2} Q(t,s) Y_k(s) u_0 \, ds, \tag{11}$$

является единственным решением уравнения

$$v''(t) + \frac{k}{t} v'(t) = (A + B(t)) v(t), \tag{12}$$

удовлетворяющим условиям (2).

Доказательство. Для первого слагаемого в представлении (11) по определению ОФБ $Y_k(t)$ справедливо равенство

$$Y_k''(t) u_0 + \frac{k}{t} Y_k'(t) u_0 = A Y_k(t) u_0, \tag{13}$$

здесь и в дальнейшем мы будем использовать обозначение $Y_k'(t) u_0 = (Y_k(t) u_0)'$.

Обозначим второе слагаемое в представлении (11) через $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = t^{-k/2} \int_0^t s^{k/2} Q(t,s) Y_k(s) u_0 \, ds. \tag{14}$$

Дважды дифференцируя (14) по t, получим

$$\varphi'(t) = t^{-k/2} \int_0^t s^{k/2} \left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} - \frac{k}{2t} Q(t,s) \right) Y_k(s) u_0 \, ds + Q(t,t) Y_k(t) u_0,$$

$$\varphi''(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}\left(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k}{t}\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} + \frac{2k+k^2}{4t^2}Q(t,s)\right)Y_k(s)u_0\,ds +$$

$$+\left(\left.\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\right|_{s=t} + \frac{dQ(t,t)}{dt} - \frac{k}{2t}Q(t,t)\right)Y_k(t)u_0 + Q(t,t)Y_k'(t)u_0,$$

$$\varphi''(t) + \frac{k}{t}\varphi'(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}\left(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2-2k}{4t^2}Q(t,s)\right)Y_k(s)u_0\,ds +$$

$$+\left(\left.\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\right|_{s=t} + \frac{dQ(t,t)}{dt} + \frac{k}{2t}Q(t,t)\right)Y_k(t)u_0 + Q(t,t)Y_k'(t)u_0. \tag{15}$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части (15) через $\psi(t)$ и упростим его, используя уравнение (9) и граничное условие (10). После двукратного интегрирования по частям будем иметь

$$\psi(t) = \int\limits_0^t s^{k/2}\left(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2-2k}{4t^2}Q(t,s)\right)Y_k(s)u_0\,ds =$$

$$= \int\limits_0^t s^{k/2}\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial s^2}Y_k(s)u_0\,ds + \int\limits_0^t s^{k/2}\left(B(t) - \frac{k^2-2k}{4s^2}I\right)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds =$$

$$= t^{k/2}\left.\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t}Y_k(t)u_0 - \int\limits_0^t \frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\left(\frac{k}{2}s^{k/2-1}Y_k(s) + s^{k/2}Y_k'(s)\right)u_0\,ds +$$

$$+\int\limits_0^t s^{k/2}\left(B(t) - \frac{k^2-2k}{4s^2}I\right)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds =$$

$$= t^{k/2}\left.\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t}Y_k(t)u_0 - \frac{kt^{k/2-1}}{2}Q(t,t)Y_k(t)u_0 - t^{k/2}Q(t,t)Y_k'(t)u_0 +$$

$$+\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)\left(Y_k''(s) + \frac{k}{s}Y_k'(s)\right)u_0\,ds + \int\limits_0^t s^{k/2}B(t)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), в силу граничного условия (10), приходим к представлению

$$\varphi''(t) + \frac{k}{t}\varphi'(t) = t^{-k/2}(A + B(t))\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds +$$

$$+\left(\left.\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t} + \left.\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\right|_{s=t} + \frac{dQ(t,t)}{dt}\right)Y_k(t)u_0 =$$

$$= (A + B(t))\varphi(t) + 2\frac{dQ(t,t)}{dt}Y_k(t)u_0 = (A + B(t))\varphi(t) + B(t)Y_k(t)u_0. \tag{17}$$

Из (13) – (17) окончательно получим

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = AY_k(t)u_0 + (A + B(t))\varphi(t) + B(t)Y_k(t)u_0 = (A + B(t))v(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (11) функция $v(t)$, которую в дальнейшем удобно обозначить

$$v(t) = \tilde{Y}_k(t)u_0 \equiv Y_k(t)u_0 + t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds, \tag{18}$$

является решением уравнения (12).

Записав функцию $v(t)$ в виде

$$v(t) = Y_k(t)u_0 + t\int\limits_0^1 \xi^{k/2}Q(t,t\xi)Y_k(t\xi)u_0\,d\xi,$$

и учитывая свойства ОФБ $Y_k(0) = I$, $Y_k'(0) = 0$, а также вытекающее из уравнения (9) равенство

$$\lim_{t\to 0+} Q(t,t\xi) = 0,$$

легко убедиться, что эта функция удовлетворяет условиям (2).

Доказательство единственности решения задачи (9), (10) будем вести от противного. Пусть $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — два решения задачи (9), (10). Рассмотрим функцию двух переменных $V(t,s) = f\left(\tilde{Y}_k(s)\,(v_1(t) - v_2(t))\right)$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, s \geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{k}{s}\frac{\partial V}{\partial s}, \quad t, s > 0$$

и начальным условиям

$$V(0,s) = \frac{\partial V(0,s)}{\partial t} = 0.$$

Эта задача для уравнения в частных производных заменой $t_1 = (t+s)^2/4$, $s_1 = (t-s)^2/4$ сводится (см. [15], §5, п. 3) к задаче, единственность которой в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t, s \geq 0$ функций установлена в [15] (§5, п. 2). Кроме того, требуемое нам утверждение о единственности содержится также в теореме 6.1 работы [16], в которой рассматривается даже более общее уравнение.

Из полученной в статье [15] явной формулы для решения указанной задачи следует $V(t,s) \equiv 0$. В силу произвольности $f \in E^*$ при $s = 0$ получаем $v_1(t) \equiv v_2(t)$, и единственность решения установлена. Теорема доказана.

Как было доказано в теореме 1, разрешимость начальной задачи для уравнения (12) зависит от разрешимости граничной задачи (9), (10) для операторного дифференциального уравнения, которая фактически установлена в работе [17].

Теорема 2. Операторное дифференциальное уравнение (9) с граничными условиями (10) имеет решение, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Если $B \in \mathbb{R}$, то разрешимость граничной задачи для скалярного уравнения (9) установлена в [17]. Нетрудно проследить, что наличие непрерывного операторного коэффициента $B(t) = (t/\nu)^{\nu\beta}B$ не мешает повторить рассуждения §2, §3 работы [17]. Отметим также, что случай $k = 0$ содержится в работе [18].

Укажем еще, что если $\beta = 0,\ k = 2n,\ n \in \mathbb{N}$, то, как следует из теоремы 3 [13], в этом частном случае можно явно выписать $Q(t,s)$:

$$Q(t,s) = \frac{s^n B}{2^{n+1}\ n!\ t^{n-1}} \left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n \left(\left(s^2 - t^2\right)^n\ {}_1F_2\left(1; n+1, 2; \frac{t^2 - s^2}{4} B\right)\right),$$

где ${}_1F_2(\cdot)$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Установив результаты о разрешимости начальной задачи для возмущенного уравнения ЭПД (12), сформулируем теперь результаты о разрешимости начальных задач для слабо вырождающегося уравнения (4).

Пусть $b\nu - \nu + 1 \geq 0,\ \nu = 2/(2-\gamma)$ или, что тоже самое, $2b \geq \gamma$. Возвращаясь к исходной переменной t и неизвестной функции $u(t)$, отметим что уравнение (6) превратится в уравнение (4), а, в силу равенств (5), начальные условия (7) — в условия

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} t^{1-1/\nu} u'(t) = 0. \tag{19}$$

Из теорем 1, 2 вытекает утверждение о разрешимости начальной задачи (4), (19).

Теорема 3. Пусть $0 < \gamma < 2,\ 2b \geq \gamma,\ \beta \geq 0,\ A \in G_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)},\ B \in L(E),\ u_0 \in D(A)$. Тогда функция $u(t) = \tilde{Y}_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}(\nu t^{1/\nu}) u_0$, где $\nu = 2/(2-\gamma)$, а $\tilde{Y}_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}(\cdot)$ определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям (19).

Пусть теперь $b\nu - \nu + 1 < 0$ или $2b < \gamma$. В этом случае для уравнения (6) следует задавать начальные условия (8), которые для исходной функции $u(t)$ превращаются в условия

$$u(0) = 0, \quad \nu^{b\nu-\nu+1} \lim_{t\to 0+} t^b u'(t) = u_1. \tag{20}$$

Учитывая результаты работы [11] о разрешимости весовой задачи Коши для уравнения ЭПД, приходим к утверждению.

Теорема 4. Пусть $0 < \gamma < 2,\ 2b < \gamma,\ \beta \geq 0,\ A \in G_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)},\ B \in L(E),\ u_1 \in D(A)$. Тогда функция

$$u(t) = \frac{\nu^{\nu - b\nu - 1} t^{1-b}}{1-b} \tilde{Y}_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}(\nu t^{1/\nu}) u_1,$$

где $\nu = 2/(2-\gamma)$, а $\tilde{Y}_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}(\cdot)$ определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям (20).

В частности, при $b = 0,\ B = 0$ и операторе $A \in G_{\nu+1}$ из более широкого чем в [6] множества $G_{\nu+1} \supset G_0$, решение задачи (4), (20) имеет вид

$$u(t) = \nu^{\nu-1} t Y_{\nu+1}\left(\nu t^{1/\nu}\right) u_1.$$

Утверждения теорем 3 и 4, очевидно, справедливы и при $\gamma = 0$, поскольку в этом случае уравнение (4) сразу превращается в уравнение ЭПД. В этих теоремах не только указана постановка начальных условий и доказана однозначная разрешимость соответствующих начальных задач для уравнения (4), но и установлена связь между порядком вырождения γ, коэффициентом b при первой производной $u'(t)$ и множеством операторов A, образующим класс корректной разрешимости.

Элементарный анализ утверждений теоремы 3 приводит к следующим выводам. Если $0 \leq \gamma \leq 2b$ и $0 \leq b < 1$, то индекс класса корректной разрешимости при фиксированном b убывает по переменной γ от значения b до значения 0, при этом сам класс корректной разрешимости сужается с G_b до G_0. Если $0 \le \gamma < 2$ и $b = 1$, то класс корректной разрешимости постоянный при всех γ и совпадает с G_1. Если $0 \le \gamma < 2$ и $b > 1$, то индекс класса корректной разрешимости возрастает по переменной γ от значения b до $+\infty$. При выполнении условия $2b = \gamma,\ 0 \le \gamma < 2$ класс корректной разрешимости постоянный и совпадает с G_0.

При фиксированном значении $\gamma,\ 0 \le \gamma < 2$ индекс класса корректной разрешимости возрастает по переменной b от значения $\gamma/2$ до $+\infty$.

Если выполнено условие $2b = \gamma,\ 0 \le \gamma < 2,\ B = 0$, то класс корректной разрешимости постоянный и совпадает с G_0. Предельный случай $b = \gamma = 0$ соответствует абстрактному волновому уравнению

$$u''(t) = Au(t), \quad t \ge 0, \quad A \in G_0,$$

которое не является вырождающимся. Как известно, единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \quad u_0,\ u_1 \in D(A),$$

является функция $u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1$, где $C(t)$ — операторная косинус-функция и

$$S(t) = \int\limits_0^t C(\tau)\ d\tau$$

— операторная синус-функция.

В другом предельном случае $\gamma = 2,\ b = 1$, который при используемой в п. 2 замене не сводится к уравнению ЭПД и который не исследован в п. 2, получается вырождающееся абстрактное уравнение Эйлера

$$t^2u''(t) + tu'(t) = Au(t), \quad t > 0,$$

которое при $A \in G_0$ имеет единственное решение $u(t) = C(\ln t)u_0 + S(\ln t)u_1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(1) = u_0,\ u'(1) = u_1, \quad u_0,\ u_1 \in D(A).$$

В книге [19] ограниченное в точке вырождения решение неоднородного абстрактного уравнения Эйлера с операторными коэффициентами находится методом малых стабилизирующих возмущений.

Аналогичный анализ можно произвести, используя теорему 4.

3 Абстрактное уравнение Шарпа

Рассмотрим далее частный случай уравнения (4) при $b = \gamma = \beta = 1,\ B = -I$. Уравнение

$$tu''(t) + u'(t) - tu(t) = A_0u(t) \tag{21}$$

называется уравнением Шарпа (см. [20], с. 118) и для него при $A_0 \in G_1$ справедлива теорема 3. Покажем, что в случае уравнения Шарпа можно указать явную формулу для некоторого его решения и в случае, если $A_0 \notin G_1$. Естественно, задача (4), (19) с таким оператором не будет корректной, поскольку принадлежность $A_0 \in G_1$ является необходимым и достаточным условием корректности.

Пусть далее оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t;A_0)$, тогда $A_0^2 \in G_0$ и $C(t;A_0^2) = 1/2(T(t;A_0)+T(-t;A_0))$ — порождаемая им равномерно ограниченная операторная косинус-функция.

При $u_2 \in D(A_0^2)$ введем в рассмотрение функцию

$$u(t) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi) C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2\, d\varphi + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi) A_0 S\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2\, d\varphi, \qquad (22)$$

где $S(t;A_0^2)$ — операторная синус-функция.

В силу равномерной ограниченности операторной косинус-функции $C(t;A_0^2)$ сходимость первого интеграла в (22) очевидна, а сходимость второго интеграла вытекает из конечности интеграла (см. 2.6.34.3 [21])

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Покажем, что определяемая равенством (22) функция $u(t)$ является ограниченным в нуле решением уравнения (21), и с этой целью вычислим производные функции $u(t)$. После интегрирования по частям, с учетом равномерной ограниченности операторной косинус-функции, будем иметь

$$u'(t) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\cos\varphi\, C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 d\varphi + \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\cos\varphi\, A_0 S\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 d\varphi =$$

$$= t\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\sin^2\varphi\, C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2\, d\varphi + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\, C'\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2\, d\varphi +$$

$$+t\int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\sin^2\varphi\, A_0 S\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2\, d\varphi + \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\, A_0 C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2\, d\varphi,$$

$$u''(t) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\cos^2\varphi\, C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 d\varphi + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\cos^2\varphi\, A_0 S\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 d\varphi,$$

$$tu''(t) + u'(t) = tu(t) + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\, A_0^2 S\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 d\varphi +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\, A_0 C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 d\varphi = tu(t) + A_0 u(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (22) ограниченная функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (21), а при $t=0$ условию

$$u(0) = \int_0^{\pi/2} C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2\, d\varphi.$$

Если поставить задачу о нахождении ограниченного решения уравнения (21), удовлетворяющего начальному условию

$$u(0) = u_0, \tag{23}$$

то относительно элемента $u_2 \in D(A_0^2)$ возникает операторное уравнение первого рода

$$\int\limits_0^{\pi/2} C\left(\ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 \, d\varphi = u_0, \tag{24}$$

для решения которого предстоит наложить дополнительные условия гладкости на начальный элемент u_0.

Учитывая представление операторной косинус-функции $C(t; A_0^2)$ через резольвенту

$$C(t; A_0^2)u_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2 \, d\lambda, \quad \sigma > 0, \quad u_2 \in E,$$

левую часть операторного уравнения (24) перепишем в виде

$$\int\limits_0^{\pi/2} C\left(\ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right) u_2 \, d\varphi = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}} C\left(t; A_0^2\right) u_2 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{t(\lambda+1)}dt}{1+e^{2t}}\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2 \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2 \, d\lambda, \tag{25}$$

при этом мы использовали интеграл 2.3.12.6 [21], где $\beta(\cdot)$ — бета-функция Дирихле (см., например, [21], с. 775 и [22], с. 536).

Используя представление (25), операторное уравнение (24) относительно $u_2 \in D(A_0^2)$ запишем в виде

$$Pu_2 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2 \, d\lambda = u_0. \tag{26}$$

Таким образом, разрешимость операторного уравнения (24) сводится к задаче о существовании у заданного левой частью уравнения (26) и продолженного по непрерывности на E ограниченного оператора $P : D(A_0^2) \to E$ обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из $D(A_0^2)$. Важную роль при этом будет играть функция

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{2}\right), \tag{27}$$

с помощью которой уравнение (26) запишем в виде

$$Pu_2 \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi\; \chi(\xi^2)\; R(\xi^2; A_0^2)u_2 \, d\xi = u_0. \tag{28}$$

Оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t;A_0)$, следовательно, спектр оператора A_0^2 лежит на отрицательной полуоси и поэтому, как будет видно из дальнейшего доказательства, нам будет важен факт отсутствия ([22], с. 536) действительных нулей функции $\chi(\lambda)$.

Пусть Υ_1 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\mathrm{Re}\, z = \sigma_1 > 0$, Υ_1^2 — парабола, образ Υ_1 при отображении $w = z^2$ ($z \in \Upsilon_1,\ w \in \Upsilon_1^2$). Поскольку спектр оператора A_0^2 лежит на отрицательной полуоси, то контур интегрирования Υ_1 можно стянуть к отрицательной полуоси так, чтобы он не охватывал нулей $\mu_j = (4j+3)^2,\ j = 0,1,2,...$ функции $\chi(z)$. Полученный таким образом контур обозначим через Ξ.

Возьмём λ_0 из регулярного множества $\rho(A_0^2)$ так, чтобы $\mathrm{Re}\ \lambda_0 > \sigma_1 > 0$ и введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$Hv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi} \frac{R\left(z;A_0^2\right)v\ dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)}, \quad H: E \to E, \tag{29}$$

абсолютная сходимость которого вытекает из известного неравенства для резольвенты генератора операторной косинус-функции $C(t;A_0^2)$

$$\|\lambda R(\lambda^2;A_0^2)\| \le \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega.$$

Покажем теперь, что оператор P имеет обратный оператор $P^{-1} : D\left(A_0^2\right) \to E$. Пусть $v \in D\left(A_0^2\right)$, $\sigma_1 < \sigma_2 < \mathrm{Re}\lambda$. Тогда, применяя определяемый равенством (29) оператор H к Pv и учитывая тождество Гильберта

$$R(z;A_0^2)R(\xi^2;A_0^2) = \frac{R(z;A_0^2) - R(\xi^2;A_0^2)}{\xi^2 - z},$$

получим равенство

$$HPv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi} \frac{R\left(z;A_0^2\right)}{\chi(z)\ (z-\lambda_0)}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \xi\ \chi(\xi^2)\ R(\xi^2;A_0^2)v\ d\xi =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\left(\frac{\xi\chi(\xi^2)\ R(z;A_0^2)v}{\chi(z)\ (z-\lambda_0)\ (\xi^2-z)} - \frac{\xi\chi(\xi^2)\ R(\xi^2;A_0^2)v}{\chi(z)\ (z-\lambda_0)\ (\xi^2-z)}\right) d\xi dz. \tag{30}$$

Интеграл в (30) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HPv = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{\xi\chi(\xi^2)\ R(z;A_0^2)v\ d\xi dz}{\chi(z)\ (z-\lambda_0)\ (\xi^2-z)} -$$

$$-\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \xi\chi(\xi^2)\ R(\xi^2;A_0^2)v \int\limits_{\Xi} \frac{dz}{\chi(z)\ (z-\lambda_0)\ (\xi^2-z)}\ d\xi. \tag{31}$$

Если контур интегрирования Ξ замкнуть влево, то внутренний интеграл во втором слагаемом (31) обратится в нуль в силу теоремы Коши. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (31), используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$HPv = \frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Xi} \int\limits_{\Upsilon_2} \frac{\xi \chi(\xi^2)\ R(z; A_0^2) v\ d\xi dz}{\chi(z)\ (z-\lambda_0)\ (\xi^2 - z)} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Xi} \int\limits_{\Upsilon_2^2} \frac{\chi_k(\lambda)\ R(z; A_0^2) v\ d\lambda dz}{\chi(z)\ (z-\lambda_0)\ (\lambda - z)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} \frac{R(z; A_0^2) v\ dz}{z - \lambda_0} = -R(\lambda_0; A_0^2) v.$$

Коммутирующие операторы $H,\ P,\ R(\lambda_0; A_0^2)$ ограничены и область определения $D(A_0^2)$ плотна в E, поэтому равенство $HPv = -R(\lambda_0; A_0^2)v$ справедливо и для $v \in E$, и при этом $HP : E \to D\,(A_0^2)$. Отсюда следует, что оператор $P^{-1}v = -(\lambda_0 I - A_0^2)Hv$ при $v \in D\,(A_0^2)$ является обратным по отношению к P, $P^{-1} : D\,(A_0^2) \to E$. Действительно,

$$PP^{-1}v = -P(\lambda_0 I - A_0^2)Hv = -PH(\lambda_0 I - A_0^2)v = R(\lambda_0; A_0^2)(\lambda_0 I - A_0^2)v = v, \quad v \in D\left(A_0^2\right),$$

$$P^{-1}Pv = -(\lambda_0 I - A_0^2)HPv = (\lambda_0 I - A_0^2)R(\lambda_0; A_0^2)v = v, \quad v \in E.$$

Возвращаясь к операторному уравнению (26) и потребовав дополнительно, чтобы $u_0 \in D\,(A_0^4)$, определим принадлежащий $D(A_0^2)$ начальный элемент $u_2 = (A_0^2 - \lambda_0 I)Hu_0$, где оператор H задан равенством (29), $\lambda_0 \in \rho(A_0^2)$, $\mathrm{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$. Тогда определяемая равенством (22) функция $u(t)$ будет ограниченным решением уравнения (21), удовлетворяющим начальному условию (23). Заметим, что вырождающееся уравнение (21) может иметь второе неограниченное в нуле решение. Таким образом установлена теорема.

Теорема 5. Пусть оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t; A_0)$ и $u_0 \in D\,(A_0^4)$. Тогда определяемая равенством (22) функция $u(t)$, где $u_2 = (A_0^2 - \lambda_0 I)Hu_0$, оператор H задан равенством (29), $\lambda_0 \in \rho(A_0^2)$, $\mathrm{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$, является ограниченным решением уравнения (21), удовлетворяющим начальному условию (23).

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{C} = D(A),\ A = iA_1,\ A_1 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $T(t; A_0) = e^{itA_1}$, $C(t; A_0^2) = \cos(tA_1)$ и решение задачи (21), (23) имеет вид

$$u(t) = u_2 \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{ch}\left(t\cos\varphi + iA_1 \ln \mathrm{ctg}\, \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi,$$

где u_2 находится из условия

$$u_2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos\left(A_1 \ln \mathrm{ctg}\, \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = u_0.$$

Пример 2. Пусть $E = BUC(\mathbb{R})$ — пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$ (или $E = L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < \infty$), оператор $A_0 u(x) = u'(x)$ с областью определения $D(A_0) =\{u(x) \in E :\ u(x)$ — абсолютно непрерывна, $u'(x) \in E\}$. Тогда $T(t; A_0)u(x) = u(x+t),\ C(t; A_0^2)u(x) = 1/2\,(u(x+t) + u(x-t))$ и, если $u_2(x) \in D(A_0^2)$, то функция

$$u(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (\mathrm{ch}(t\cos\varphi) + \mathrm{sh}(t\cos\varphi))\, u_2\left(x + \ln \mathrm{ctg}\, \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\operatorname{ch}(t\cos\varphi)-\operatorname{sh}(t\cos\varphi)\right) u_2\left(x-\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

является ограниченным решением уравнения (21).

4 Сильно вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения

Рассмотрим уравнение (4) в случае сильного вырождения, когда параметр $\gamma > 2$. Замена независимой переменной $t = (-\tau/\nu)^{-\nu}$, $\nu = 2/(2-\gamma)$ и неизвестной функции $u(t) = u\left((-\tau/\nu)^{-\nu}\right) = w(\tau)$, приводит сильно вырождающееся уравнение (4) к уравнению ЭПД

$$w''(\tau) + \frac{1+\nu-b\nu}{\tau} w'(\tau) = \left(A + \left(-\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu\beta} B\right) w(\tau), \quad \tau > 0.$$

Аналогично теоремам 3 и 4 устанавливаются следующие теоремы 6 и 7, в которых в случае сильного вырождения указана постановка начальных условий, доказывается однозначная разрешимость соответствующих начальных задач для уравнения (4), а также устанавливается связь между порядком вырождения γ, коэффициентом b при первой производной $u'(t)$ и множеством операторов A, образующим класс корректной разрешимости.

Теорема 6. Пусть $\gamma > 2$, $2b \geq 4-\gamma$, $\beta \geq 0$, $A \in G_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}$, $B \in L(E)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда функция $u(t) = \tilde{Y}_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}(-\nu t^{-1/\nu})u_0$, где $\nu = 2/(2-\gamma)$, а $\tilde{Y}_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}(\cdot)$ определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} t^{1+1/\nu} u'(t) = 0.$$

Теорема 7. Пусть $\gamma > 2$, $2b < 4-\gamma$, $\beta \geq 0$, $A \in G_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}$, $B \in L(E)$, $u_1 \in D(A)$. Тогда функция

$$u(t) = \frac{(-\nu)^{b\nu-\nu-1} t^{1-b}}{1-b} \tilde{Y}_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}(-\nu t^{-1/\nu}) u_1,$$

где $\nu = 2/(2-\gamma)$, а $\tilde{Y}_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}(\cdot)$ определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = 0, \quad (-\nu)^{1+\nu-b\nu} \lim_{t\to 0+} t^b u'(t) = u_1.$$

5 Абстрактный аналог вырождающегося по пространственной переменной дифференциального уравнения со степенным характером вырождения

При $\alpha > 0$ рассмотрим уравнение

$$u''(t) = t^\alpha A u(t), \quad t \geq 0. \tag{32}$$

Если A — оператор дифференцирования по пространственной переменной x, например, $Au(t,x) = u''_{xx}(t,x)$, то уравнение (32) является вырождающимся гиперболическим, обобщающим уравнение Трикоми, но имеет другой характер вырождения по сравнению с уравнениями предыдущих пунктов. Поэтому абстрактное уравнение (32) естественно также называть вырождающимся.

Замена переменной $t=(\tau/\mu)^{\mu}$, $\mu=2/(\alpha+2)$ и неизвестной функции $u(t)=(\tau/\mu)^{\mu}w(\tau)$ приводит вырождающееся уравнение (32) к уравнению ЭПД вида

$$w''(\tau)+\frac{\mu+1}{\tau}w'(\tau)=Aw(\tau),\quad \tau>0. \tag{33}$$

Поскольку $0<\mu<1$, то по теореме 1 из [12] при $A\in G_{1-\mu}\subset G_{\mu+1}$ функция

$$w(\tau)=\mu^{\mu}\tau^{-\mu}Y_{1-\mu}(\tau)u_0+Y_{\mu+1}(\tau)u_1 \tag{34}$$

будет единственным решением уравнения (33), удовлетворяющим двум ненулевым начальным условиям

$$\lim_{\tau\to 0+}\left(w(\tau)-\mu^{\mu}\tau^{-\mu}Y_{1-\mu}(\tau)u_0\right)=u_1,\quad \lim_{\tau\to 0+}\tau^{\mu+1}w'(\tau)=-\mu^{\mu+1}u_0. \tag{35}$$

Возвращаясь в (34), (35) к исходной переменной, получим представление решения уравнения (32)

$$u(t)=Y_{1-\mu}\left(\mu t^{1/\mu}\right)u_0+tY_{\mu+1}\left(\mu t^{1/\mu}\right)u_1 \tag{36}$$

и начальные условия

$$u(0)=u_0,\qquad u'(0)=u_1. \tag{37}$$

Теорема 8. Пусть $\alpha>0$, $\mu=2/(\alpha+2)$, $A\in G_{1-\mu}$, $u_0,u_1\in D(A)$. Тогда определяемая равенством (36) функция $u(t)$ является единственным решением уравнения (32), удовлетворяющим начальным условиям (37).

Заметим, что в рассматриваемом в [4] частном случае $A=A_0^2$, A_0 — генератор C_0-группы, отсутствует утверждение о единственности, а доказательство утверждения о разрешимости состоит в проверке путем дифференцирования под знаком интеграла представления вида (3) для ОФБ. Имея решение (36) и используя свойство ОФБ определять решение уравнения ЭПД, эту проверку можно произвести намного проще.

Следует отметить, что добавление в уравнение (32) "младших" слагаемых требует, вообще говоря, дополнительной гладкости от начальных условий по сравнению с задачей (32), (37), и начальная задача для измененного уравнения может оказаться некорректной. Приведем соответствующий пример.

Пример 3. Пусть $u_0\in D(A_0^n)$, $n=\max\{2,m\}$, $m\in\mathbb{N}_0$, A_0 — генератор C_0-группы $T(t;A_0)$. Тогда функция

$$u(t)=\sum_{j=0}^{m}\frac{m!\sqrt{\pi}\ t^{2j}}{j!\ (m-j)!\ \Gamma(j+1/2)}T(t^2/2)A_0^j u_0 \tag{38}$$

является решением уравнения

$$u''(t)=t^2A_0^2u(t)+(4m+1)A_0u(t),\quad t\geq 0, \tag{39}$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=0. \tag{40}$$

Этот факт нетрудно проверить, сравнивая, после подстановки определяемой равенством (38) функции в уравнение (39), коэффициенты при $t^{2j}A_0^{j+1}u_0,\ 0 \le j \le m$ в левой и правой частях получившегося соотношения.

Равенство (38) показывает наличие зависимости между коэффициентом при $A_0u(t)$ в уравнении (39) и гладкостью начального элемента u_0 в начальных условиях (40) (ср. со случаем вырождающегося гиперболического уравнения в частных производных [3], с. 255).

6 Вырожденное гипергеометрическое операторное уравнение

В заключение покажем, как с помощью дробного интегродифференцирования (см. [23], §2) можно исследовать вырожденное гипергеометрическое операторное уравнение

$$tu''(t) + (bI - tA)u'(t) - cAu(t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{41}$$

где параметры $b > c > 0$.

Будем искать ограниченное в нуле решение уравнения (41) и вначале предположим, что $b > 1,\ c = \alpha,\ 0 < \alpha < 1$. Учитывая равенство (см. формулу (15.11) [23])

$$D_{0+}^{\alpha}(tu(t)) = tD_{0+}^{\alpha}u(t) + \alpha D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$$

для дробной производной Римана-Лиувилля D_{0+}^{α}, это уравнение запишем в виде

$$D_{0+}^{\alpha}\left(t(D_{0+}^{1-\alpha}u(t))' + ((b-\alpha)I - tA)\, D_{0+}^{1-\alpha}u(t)\right) = 0.$$

Обозначив $v(t) = D_{0+}^{1-\alpha}u(t)$, относительно функции $v(t)$ получим уравнение

$$tv'(t) + (b-\alpha)v(t) = tAv(t) + t^{\alpha-1}v_0 \tag{42}$$

с некоторым элементом $v_0 \in E$.

Чтобы существовало решение дифференциального уравнения первого порядка, естественно предположить, что оператор A является генератором C_0-полугруппы $U(t;A)$. Тогда в качестве решения уравнения (39) возьмем функцию

$$v(t) = t^{\alpha-1}\int_0^1 (1-s)^{b-2}U(ts;A)v_0\, ds. \tag{43}$$

Учитывая представление (43), найдем ограниченное решение уравнения (41). После элементарных преобразований получим

$$u(t) = I_{0+}^{1-\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{(t-\tau)^{\alpha}}\int_0^1 (1-s)^{b-2}U(\tau s;A)v_0\, dsd\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-b}}{(t-\tau)^\alpha} \int\limits_0^\tau (\tau-x)^{b-2} U(x;A) v_0 \, dx d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t U(x;A) v_0 \int\limits_x^t \frac{\tau^{\alpha-b}(\tau-x)^{b-2}}{(t-\tau)^\alpha} \, d\tau dx =$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(b-\alpha) t^{b-1}} \int\limits_0^t x^{\alpha-1}(t-x)^{b-\alpha-1} U(x;A) v_0 \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 s^{c-1}(1-s)^{b-c-1} U(ts;A) v_0 \, ds, \tag{44}$$

при этом мы использовали интеграл 2.2.6.2 [21], $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Наконец, чтобы найденное решение удовлетворяло начальному условию

$$u(0) = u_0 \in D(A), \tag{45}$$

в представлении (44) положим $v_0 = \dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-1)\Gamma(c)} u_0$, и тогда

$$u(t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 s^{c-1}(1-s)^{b-c-1} U(ts;A) u_0 \, ds. \tag{46}$$

Равенство (46), установленное для $b > 1,\ 0 < c < 1$, в силу принципа аналитического продолжения справедливо и для $b > c > 0$. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 9. Пусть оператор A порождает C_0-полугруппу $U(t;A)$, $b > c > 0$ и $u_0 \in D(A)$. Тогда определяемая равенством (46) функция $u(t)$, является ограниченным решением вырожденного гипергеометрического операторного уравнения (41), удовлетворяющим начальному условию (45).

Список литературы

[1] *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука. 1966.

[2] *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука. 1970.

[3] *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. МГУ. Москва. 2010.

[4] *Favini A.* Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1976. V. 55. P. 227 – 242.

[5] *Вайнерман Л.И.* Гиперболические уравнения с вырождением в гильбертовом пространстве. Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 4. С. 736 – 746.

[6] *Орлов В.П.* О слабо вырождающихся гиперболических уравнениях // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1409 – 1419.

[7] *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, Выща школа. 1989.

[8] *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // ДАН. 1997. Т. 352. № 5. С. 587 – 589.

[9] *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. №1. С. 41 – 59.

[10] *Brezis H., Rosenkrantz W., Singer B.* On a degenerat elliptic-parabolic equation occurring in the theory of probability. Comm. pur appl. math., 24 (1971), 395 – 416.

[11] *Глушак А.В.* Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, №5. С. 627 — 637.

[12] *Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Матем. 1986. №6. С. 55 – 56.

[13] *Глушак А.В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 363 – 369.

[14] *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 128 – 130.

[15] *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т.1, вып. 2(42). С. 102 – 143.

[16] *Bragg L.R.* Fundamental solutions and properties of solutions of the initial value radial Euler-Poisson-Darboux // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 607 – 616.

[17] *Волк В.Я.* О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при x=0 // Успехи математических наук. 1953, Т. VIII № 4 (56) № 6. С. 141 – 151.

[18] *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15, вып. 4. С. 309 – 360.

[19] *Фомин В.И.* Векторное уравнение Эйлера второго порядка в банаховом пространстве. М.: Издательский дом «Спектр», 2012.

[20] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ. 1949.

[21] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981.

[22] *Дунаев А.С., Шлычков В.И.* Специальные функции. Часть 2. Екатеринбург, Уральский университет. 2015.

[23] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987.