

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ГЕОМОРФОЛОГИЯ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТРИСК)

2

МОСКВА · 1980

В. М. МОСКОВКИН, А. М. ТРОФИМОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
РАЗВИТИЯ ПОДРЕЗАЕМОГО СКЛОНА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ВОПРОСУ ЕГО УСТОЙЧИВОСТИ**

При анализе развития подрезаемых склонов К. Крикмей (Crickmay, 1959) исходил из неравноценности факторов боковой эрозии (или абразии) и денудации. Ведущую роль он отводил первому фактору, что и привело его к выводу о преобладании процесса параллельного отступления склона. В общем случае нужно учитывать совместное действие обоих факторов, что и определит в конечном итоге характер развития подрезаемого склона. А. Е. Шайдеггер (1964) при рассмотрении подрезаемой модели крутого денудационного склона учитывал фактор подрезания в численном алгоритме. В. Е. Каллинг (Culling, 1963), исследуя развитие склонов медленного течения материала, пришел к диффузионной модели отступающего всего целиком склона:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - C \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (1)$$

Аналогичное уравнение рассматривал Х. Масасиге (Masashige, 1972). В. Е. Каллинг решил это уравнение для конечной области $0 < x < l$, движущейся с постоянной скоростью C , при краевых условиях

$$y(0, t) = 0, y(l, t) = h, y(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

Правильнее учитывать только подрезание основания склона. Этот эффект следует учитывать через нулевое граничное условие на подвижной границе и тогда приходим к следующей краевой задаче (Trofimov, Moskovkin, 1976).

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad bt \leq x < +\infty, \quad y(bt, t) = 0, \quad y(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

где b — постоянная скорость отступления точки основания склона. Остановимся подробнее на уравнении диффузии, входящем в задачу (3). При его получении предполагается, что на склоне могут действовать процессы медленного течения материала или плоскостного смыва (а также капельно-дождевой эрозии) и при этом используется универсальное уравнение баланса материала (или взвесенесущего потока), которое выводится из рассмотрения баланса материала в элементарном объеме подвижной поверхностного слоя на склоне (Culling, 1963; Девдариани, 1967) $\frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$, где y — высота точки профиля склона, q — расход потока материала или твердого стока. В этом уравнении частная

производная по времени $\partial y/\partial t$ в зависимости от своего знака характеризует скорость деформации или аккумуляции на склоне. Так, если расход материала вниз по склону на некотором участке нарастает, то правая часть уравнения баланса отрицательная и, следовательно, происходит деформация коренной поверхности склона ($\frac{\partial y}{\partial t} < 0$). При этом предпола-

гается, что ось x направлена от водораздела к базису денудации склона.

Для замыкания уравнения баланса необходимо выразить расход q через уклон поверхности склона в каждой его точке. В. Е. Каллинг в качестве гипотезы брал зависимость $q = -K \frac{\partial y}{\partial x}$, $K = \text{const}$ и, включив

ее в уравнение баланса, пришел к диффузионному уравнению с постоянным коэффициентом. При этом подразумевается однородный по литологии склон, на который воздействует с постоянной интенсивностью во времени и пространстве внешний фактор. В общем случае литология и воздействующий на склон фактор (например, расход воды при выпадении осадков) не постоянны, а значит $K \neq \text{const}$. Для склонов, развивающихся под действием водного потока, коэффициент K можно записать в виде $K = \frac{\lambda(Q)}{r}$, где $\lambda(Q)$ — функция расхода воды, r —

некоторая прочностная характеристика, зависящая от литологии и характеризующая сопротивляемость пород размыву. Заметим, что линейная зависимость расхода материала от уклона для вязкого и вязко-пластичного течения грунта может обосновываться при некоторых допущениях (Девдариани, 1967).

Замкнутая система уравнений, состоящая из уравнения баланса и уравнения для расхода материала, приводящая к диффузионной модели, описывает взаимодействие форма склона — склоновые процессы, в результате которого происходит саморазвитие склона. Но кроме этого взаимодействия существует взаимодействие на границах склона в целом. Сюда относятся влияние изменения базиса денудации или влияние вышележащего склона. Это взаимодействие учитывается с помощью задания граничных условий. Обычно используются условия постоянства базиса денудации и расхода материала на границах (Culling, 1963; Девдариани, 1967). Например, нулевой расход материала на границе соответствует водоразделу, а отличный от нуля расход — поступлению материала с вышележащего склона. Наше граничное условие в модели (3) говорит о том, что основание склона (базис денудации) отступает в горизонтальном направлении (по оси x) с постоянной скоростью b . Отметим, что в диффузионной модели вторая частная производная по пространственной координате ($\partial^2 y/\partial x^2$) характеризует выпуклость или вогнутость профиля склона в зависимости от знака производной. При $\partial^2 y/\partial x^2 < 0$, соответствующей выпуклому профилю, имеем $\partial y/\partial t < 0$, т. е. на выпуклом склоне происходит денудация, а на вогнутом — соответственно аккумуляция. Область, где $\partial^2 y/\partial x^2 = 0$, а значит и $\partial y/\partial t = 0$, должна соответствовать области транзита на склоне.

Получим теперь одно важное частное автомодельное решение задачи (3). Для этого привлечем анализ инвариантности дифференциальных уравнений относительно группы непрерывных преобразований. Метод решения с помощью этого анализа называют методом отыскания симметричных решений, который состоит в отыскании решений, инвариантных относительно некоторой группы G , в предположении инвариантности относительно этой группы системы дифференциальных уравнений (Биркгоф, 1954). В качестве такой группы выберем группу непрерывных преобразований

$$t_1 = t + \alpha, \quad x_1 = x + \alpha, \quad y_1 = y, \quad (4)$$

состоящую из однопараметрической подгруппы переносов начала отсчета времени, однопараметрической подгруппы параллельного переноса и тождественного преобразования искомой функции. Легко видеть, что величины y и $x - bt$ инвариантны относительно этой группы, из чего следует, что любое решение задачи (3), инвариантное относительно группы (4), будет иметь вид (Биркгоф, 1954)

$$y = \varphi(x - bt). \quad (5)$$

Граничное условие, соответствующее продвижению точки основания склона с постоянной скоростью b , перепишем в виде

$$y = 0, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{y=0} = b, \quad (6)$$

откуда видим, что оно инвариантно относительно группы (4). Теперь, подставляя выражение (5) в исходное уравнение задачи (3), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$K\varphi''(v) + b\varphi'(v) = 0, \quad (7)$$

где $v = x - bt$. Решение уравнения (7), с учетом основного граничного условия $\varphi(0) = 0$ и дополнительного $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = \lim_{v \rightarrow \infty} \varphi(v) = h = \text{const}$,

соответствующего асимптотическому стремлению поверхности склона к горизонтальной плоскости по мере удаления от основания склона, получим в виде

$$y(x, t) = h \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{K}(x - bt)\right) \right]. \quad (8)$$

Если скорость подрезания основания склона зависит от времени, то инвариантности граничного условия (6) относительно второго преобразования группы (4) не будет, а значит не будет и частного автомодельного решения типа «бегущей волны», такого решения также не будет и для $b = \text{const}$ при переменном коэффициенте $K(x, t)$. Далее отметим, что не существует простого частного решения $y(x, t) = a(x - bt)$, которое является основным в модели А. Е. Шайдеггера (1964), так как это решение не удовлетворяет уравнению задачи (3) ни при каких a, b и K . Заметим, что группа преобразований (4) использовалась при исследовании уравнений почвенной влаги с граничным условием типа (6) в работе В. Я. Кулика (1972).

Поясним термин «автомодельное решение», о котором шла речь выше. Например, Л. И. Седов (1970), говоря об автомодельных решениях указывает, что важное значение имеют решения, в которых уменьшение числа аргументов искомым функциям достигается за счет существенности только некоторых комбинаций независимых переменных. Так, в нашем случае плоской задачи, имеющей две независимые переменные, найдена комбинация из этих переменных $(x - bt)$, позволяющая свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого намного проще, чем исходного. Полученное автомодельное решение (8) соответствует стадии стационарно-динамического режима развития подрезаемого склона (стадия параллельного отступления), из которого следует, что чем больше интенсивность подрезания склона по сравнению с денудацией, тем круче склон. Последнее следует из того, что уклон в основании склона определяется

выражением $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=bt}$, поэтому дифференцируя выражение (8) и взяв

производную в точке $x = bt$, получим $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=bt} = \frac{hb}{K}$, из чего и следует

вышеуказанное следствие. Последнее соотношение, при знании скорости

подрезания и морфометрии склона в предположении параллельного его отступления, позволит оценить коэффициент денудации K , что бывает очень трудно сделать в других случаях. Кроме того, это соотношение может быть полезно при анализе асимметрии склонов речных долин, где инсоляционные и другие причины асимметрии учтутся коэффициентом K , а влияние силы Кориолиса — скоростью подрезания b .

Полученное автомодельное решение (8) согласуется с теоретическими и натурными исследованиями (Scheidegger, 1970; Трофимов, Бабанов, 1968). Так, первые попытки математического анализа профилей склонов долин были сделаны Гербером (Scheidegger, 1970). Вывод уравнений профилей склонов основывался на представлении двумя различными способами элементарного объема снесенного материала через приращение высоты y и горизонтальной координаты x , что позволило записать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения профиля $y(x)$. Одно из наиболее совершенных решений такого подхода имело вид (Scheidegger, 1970)

$$y(x) = a_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right) \left[1 - \exp \left(- \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{a_1} x \right) \right] + x \operatorname{tg} \alpha_2, \quad (10)$$

которое показывает на асимптотическое стремление к прямой $y(x) = x \operatorname{tg} \alpha_2 + a_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)$. Причем при $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0$, т. е. когда кривая профиля асимптотически стремится к постоянной высоте $h = a_1$, приходим к следующему выражению для профиля склона:

$$y(x) = h \left[1 - \exp \left(- \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{h} x \right) \right], \quad (11)$$

которое полностью согласуется с полученным выше результатом (8) при фиксированном времени.

Кроме этого, массовое профилирование подрезаемых склонов долины р. Волги (Куйбышевское, Саратовское, Волгоградское водохранилища), долины рек Камы, Вятки и их притоков также привело к уравнению (11) (Трофимов, Бабанов, 1968).

Перейдем теперь к вопросу устойчивости развития подрезаемого склона. Под устойчивым режимом развития склона мы понимаем те состояния склона, при которых крутизна его не возрастает при дальнейшем развитии (другими словами, это режим выполаживания склона). Неустойчивый режим развития склона — это те состояния склона, когда его крутизна непрерывно нарастает, что в конечном итоге приведет к наступлению неустойчивого состояния. Стационарно-динамический режим соответствует параллельному отступанию склона и он разделяет два вышерассмотренных режима.

Для анализа устойчивости развития подрезаемого склона исследуем характер общего решения задачи (3) вблизи стационарно-динамического режима (8). Для решения поставленного вопроса зададим начальный профиль склона в виде, близком по структуре к частному автомодельному решению (8),

$$y(x, 0) = f(x) = h[1 - \exp(-cx)]. \quad (12)$$

Общее решение задачи (3) было получено нами в виде (Трофимов, Moskovkin, 1976)

$$y(x, t) = \frac{\exp \left(\frac{b^2}{4K} t - \frac{b}{2K} x \right) + \infty}{2 \sqrt{\pi K t}} \int_0^{\infty} f(z) \exp \left(\frac{bz}{2K} \right) \times \left\{ \exp \left[- \frac{(z-x+bt)^2}{4Kt} \right] - \exp \left[- \frac{(z+x-bt)^2}{4Kt} \right] \right\} dz. \quad (13)$$

Подставляя выражение (12) в общее решение (13) и вычисляя интегралы, получим

$$y(x, t) = \frac{h}{2} \left\{ 1 + \theta \left(\frac{x}{2 \sqrt{Kt}} \right) - \exp \left(- \frac{b}{K} (x - bt) \right) \left[1 - \theta \left(\frac{x - 2bt}{2 \sqrt{Kt}} \right) \right] + \exp \left[\frac{(cK - b)}{K} ((cK - b)t + x) \right] \left[1 - \theta \left(\frac{2t(cK - b) + x}{2 \sqrt{Kt}} \right) \right] - \exp(c(cKt - x)) \left[1 - \theta \left(\frac{2cKt - x}{2 \sqrt{Kt}} \right) \right] \right\},$$

где $\theta(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du.$ (14)

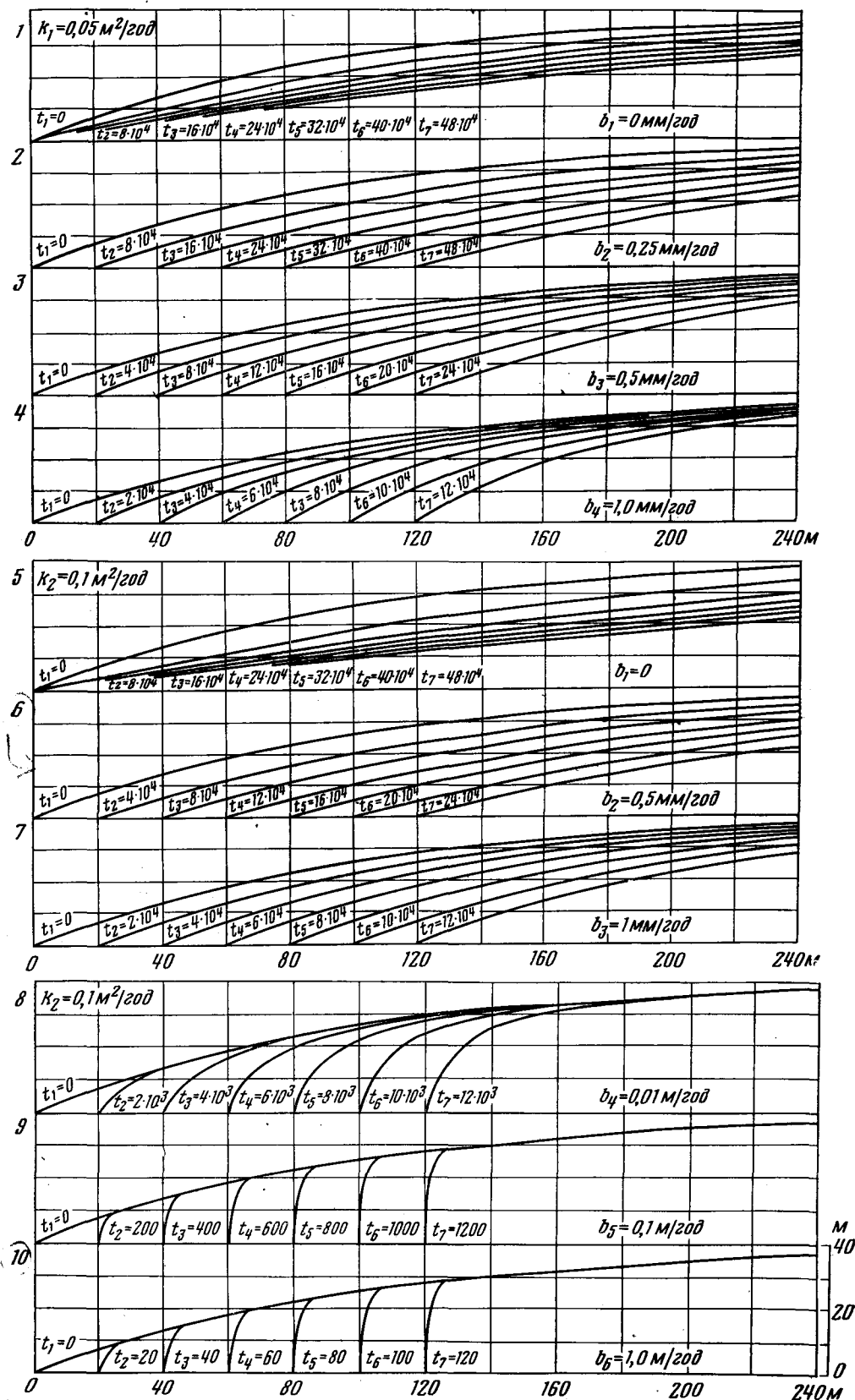
Важно тот факт, что при $c = b/K$ общее решение (14) переходит в автомодельное решение (8). Аналитический и численный анализы решения (14) показывают, что значение $b = cK$ является критерием, разделяющим два различных режима развития склона, т. е. при $b > cK$ происходит увеличение крутизны в основании склона, при $b < cK$ происходит выполаживание склона.

Перейдем к анализу численных результатов. При начальном профиле склона: $y(x, 0) = f(x) = 40 \left[1 - \exp \left(- \frac{x}{100} \right) \right]$ ($h = 40$ м, $c = \frac{1}{100}$), брались

следующие значения для коэффициента денудации и скорости подрезания склона: 1) $K_1 = 0,05$ м²/год, $b_1 = 0$, $b_2 = 0,00025$ м/год, $b_3 = 0,0005$ м/год (соответствует автомодельному режиму), $b_4 = 0,001$ м/год; 2) $K_2 = 0,1$ м²/год; $b_1 = 0$, $b_2 = 0,0005$ м/год, $b_3 = 0,001$ м/год (соответствует автомодельному режиму), $b_4 = 0,01$ м/год, $b_5 = 0,1$ м/год, $b_6 = 1$ м/год. Эти две серии расчетов по 4 и 6 вариантов в каждой были проделаны по аналитическому решению (14) на ЭВМ М-220 и представлены в виде графиков (рисунок). Видно, что при всех параметрах b , меньше критических (b_3), происходит выполаживание склона, а при всех b , больше критических, происходит нарастание уклонов, причем тем более интенсивное, чем больше b . При больших сверхкритических значениях (b_4, b_5 — во второй серии) крутизна склона очень быстро достигает больших величин, при которых возможно наступление неустойчивых состояний. Заметим, что когда крутизна достигает величин, при которых уже несправедливо линейное уравнение диффузии, то развитие склона пойдет по нелинейному уравнению диффузии, которое для склонов медленного течения материала принимает вид (Девдариани, 1967)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} / \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Можно видеть, что это уравнение по сравнению с линейным уравнением задачи (3) уменьшает интенсивность выполаживания склона (так как в знаменателе правой части уравнения (15) стоит величина, большая единицы), т. е. крутизна будет еще больше нарастать при сверхкритических значениях скорости подрезания по сравнению с рассчитанными профилями, и неустойчивые состояния склона будут возникать раньше. Анализ расчетов показывает, что при сверхкритических скоростях подрезания выполаживание не успевает приспособиться к подрезанию и происходит очень сильное увеличение крутизны у самого основания склона (первые несколько метров), а далее профиль склона близок к первоначальному. Таким образом, образуется перегиб склона, отделяющий крутую часть склона у его основания от более пологой привершинной части склона, на которой почти не сказывается эффект подрезания.



Развитие подрезаемого склона при различных параметрах модели (объяснения в тексте и на рисунке)

При развитии склона перегиб продвигается вверх по склону и он тем лучше выражен, чем сильнее скорость подрезания. Суммируя сказанное выше, процесс развития склона при постоянной скорости подрезания можно представить следующим образом: 1) при значениях скорости подрезания, менее критической ($b < cK$), происходит выполаживание склона; 2) при критическом значении скорости подрезания ($b = cK$) происходит параллельное отступление склона; 3) при сверхкритических значениях скорости подрезания дело обстоит сложнее. При небольших сверхкритических значениях скорости подрезания нарастание крутизны идет медленно и склон достаточно долго развивается по линейной диффузионной модели (3), а далее по нелинейной модели. Так, при $K_2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ и $b_4 = 0,01 \text{ м}/\text{год}$ (в десять раз большей критической скорости) крутизна склона у основания достигнет 47° через 2000 лет (начальная крутизна равнялась 22°). При достижении достаточной крутизны диффузионная модель перестает работать, и развитие склона начинает идти, например, по осыпной модели (модель типа Шайдегера), и если $b > K$, где K — теперь интенсивность денудации осыпного склона ($\text{м}/\text{год}$), то склон со временем теряет устойчивость и его развитие начинает идти по обвально-оползневому типу. В реальных случаях (например, при абразионном подрезании основания склона) скорость подрезания имеет тенденцию уменьшаться за счет увеличения ширины абразионной террасы, но часто неустойчивость возникает раньше, чем скорость подрезания успеет достаточно понизиться. Неустойчивость может иметь место также при локальном возрастании скорости подрезания, что связано с изменчивостью климатических факторов. При очень больших сверхкритических значениях крутизна основания склона нарастает очень быстро. Так, при $K_2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ и $b_6 = 1 \text{ м}/\text{год}$ (в тысячу раз большей критической скорости) крутизна у основания склона достигнет 50° уже через 10 лет и 67° через 20 лет, т. е. практически через несколько лет устойчивость склона может нарушиться (50° соответствуют 5 м высоты при заложении 4 м, при $x > 4 \text{ м}$ уклоны близки к уклону начального профиля).

Как видим, при скоростях подрезания порядка 1 м в год и довольно большом коэффициенте денудации $K_2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ неустойчивые состояния склона могут возникать очень быстро, что находит свое подтверждение при рассмотрении реальных быстро развивающихся склонов водохранилищ. Заметим, что зависимость $2K_1 = K_2$ в двух сериях расчетов при одинаковых b дала подобные профили (развитие склона при K_2 идет в 2 раза быстрее, чем при K_1). Это легко можно понять, приведя уравнение задачи (3) к безразмерному виду и выделив оттуда критерий подобия,

$$k = \frac{KT}{L^2}, \quad (16)$$

где L — характерный размер по горизонтали, T — характерный промежуток времени. При моделировании развития подрезаемых склонов в лабораторных условиях критерий подобия (16) целесообразно записать в виде

$$k = \frac{K}{Lb}. \quad (17)$$

Аналогичный критерий подобия был получен для уравнения (1) (Masashige, 1972).

Возможности экспериментального (лабораторного) моделирования развития рельефа при действии на него водного потока открываются в связи с работами Г. В. Бастракова. Так, им был получен критерий подобия $k = NT/RL$, где N — мощность водного потока, приведенная к единичной площади, R — устойчивость пород. Этот критерий исполь-

зовался (Бастраков, 1974) при экспериментальном моделировании развития рельефа. Сравнивая этот критерий с критерием (16), видим, что величина K/L в последнем соответствует величине N/R .

Экспериментальное моделирование развития рельефа под действием медленного течения материала осуществить намного сложнее. Некоторые предпосылки для этого рассмотрим ниже. Записывая коэффициент K для модели вязкого течения грунта (Девдариани, 1967)

$$K = \frac{g}{3\gamma} H^3, \quad (18)$$

где g — ускорение силы тяжести, $H\gamma$ — мощность (толщина) и кинематическая вязкость грунта, приведем критерий подобия (16) к виду

$$k_1 = \frac{g}{3\gamma} k_2^2 HT, \quad (19)$$

где $k_2 = H/L$ — морфометрический критерий подобия.

При моделировании требуется соблюдения равенства критериев подобия аналога и объекта, тогда из выражения (19) получим (Московкин, 1978)

$$\frac{H_o T_o}{\gamma_o} = \frac{H_a T_a}{\gamma_a}, \quad (20)$$

где индексы o и a относятся к аналогу и объекту.

Реальные предпосылки для экспериментального моделирования откроются при умении измерять и изменять кинематическую вязкость модельного материала в широких пределах. Из-за упрощенности диффузионной модели с коэффициентом денудации (18), не отражающим физические свойства коренной поверхности склона, по которой происходит смещение подвижного грунта, при экспериментальном моделировании необходимо дополнительно соблюдать равенства отношений прочностей материала коренной поверхности и подвижного слоя для аналога и объекта. При экспериментальном моделировании развития подрезаемого склона под воздействием на него процесса абразии необходимо соблюдать равенства отношений интенсивностей воздействия волнового и склонового потоков для аналога и объекта.

Возвращаясь к математической модели подрезаемого склона, следует сказать, что в целях приближения ее к действительности необходимо идти по пути совместного решения задач развития надводной и подводной частей берегового склона, где наиболее трудным будет моделирование условий сопряжения на границе этих частей. Можно также попытаться поставить задачу определения скорости подрезания b на основании расчета затухания придонных скоростей волн при прохождении их по волноприбойной террасе. В случае трудностей теоретического расчета следует обратиться к эксперименту.

ЛИТЕРАТУРА

- Бастраков Г. В. Экспериментальные исследования формирования разновозрастных поверхностей выравнивания и останцового рельефа. В сб. «Развитие склонов и выравнивание рельефа». Казань, 1974.
- Биркгоф Г. Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
- Девдариани А. С. Математический анализ в геоморфологии. М., «Недра», 1967.
- Кулик В. Я. Исследование уравнений почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований. В сб. «Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва — растение — воздух». Л., «Наука», 1972.
- Московкин В. М. Методы теории подобия и размерностей в моделировании склоновых процессов. «Изв. вузов. Геология и разведка», № 6, 1978; Деп. ВИНТИ № 1488-78, 1978.
- Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.

- Трофимов А. М., Бабанов Ю. В. Профиль склона при подмыве его основания. В сб. «Вопросы геоморфологии Среднего Поволжья», вып. 5, 6. Казань, 1968.
- Шайдеггер А. Е. Теоретическая геоморфология. М., «Прогресс», 1964.
- Crickmay C. H. A preliminary inquiry into formulation of the geological principle of uniformity. Calgary, 1959.
- Culling W. E. H. Soil creep and the development of hillside slopes. «J. Geol.», 71, 2, 1963.
- Masashige H. Quantitative morphometry of fault scarp with reference to the Hira mountains, Central Japan. «Japan J. Geol. and Geogr.», 42, 1—4, 1972.
- Trofimov A. M., Moskovkin V. M. On the problem of stable profiles of deluvial slopes. «Z. Geomorph.», Bd 25, Berlin — Stuttgart, Sept. 1976.
- Schidegger A. E. Theoretical geomorphology, 2nd edition. Springer. Berlin, 1970.

Укр. НИИПА
Казанский государственный
университет

Поступила в редакцию
14.II.1978