Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина

Певный А.Б., Ситник С.М.
Сыктывкарский государственный университет
Воронежский институт МВД России
pevnyi@syktsu.ru, pochtaname@gmail.com

Аннотация. При исследовании систем управления и автоматизированных систем разрабатываемые математические модели часто сводятся к конечномерным, для которых возникает необходимость обоснования их корректности, и, в частности, установлению однозначной разрешимости линейных систем с матрицами коэффициентов специального вида. В работе для решения этой задачи вводится класс вещественных положительно определённых функций. Рассматривается приложение техники положительно определённых функций к доказательству однозначной разрешимости конечномерных моделей, возникающих при разложении сигналов по целочисленным сдвигам Гауссианов.

Ключевые слова: положительно определённые функции, теорема Бохнера, неравенство М.Г. Крейна, Гауссиан, целочисленные сдвиги.

1 Вещественные положительно определённые функции

Теория положительно определённых функций (п.о.ф.) возникла в начале 20 века на стыке нескольких разделов математики: линейной алгебры, теории функций, преобразования и рядов Фурье, интегральных и дифференциальных уравнений, теории групп. Из литературы по п.о.ф. отметим монографию [Bhatia, 2007], обзор [Stewart, 1976], одну из первых оригинальных работ [Mathias, 1923], содержащую по существу современные определения.

В данной работе вводится понятие вещественной положительно определённой функции (в.п.о.ф.), определение для которых отличается от классического использованием только вещественных, а не комплексных последовательностей. Для этого класса функций доказываются варианты известных неравенств М.Г. Крейна и Е.А. Горина. В качестве приложения рассматривается доказательство однозначной разрешимости конечномерной линейной системы, возникающей в задаче о разложении сигнала по целочисленным сдвигам Гауссианов.

Отметим, что для авторов инициирующей послужила статья Е.А. Горина [Горин, 2012].

1.1 Два определения положительно определённых функций

Будем рассматривать действительные функции от действительного аргумента на всей оси: $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Дадим два определения вещественной положительно определённой функции (в.п.о.ф.) и классическое определение положительно определённой функции (п.о.ф.) и установим их эквивалентность.

Определение 1. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется вещественной положительно определённой функцией (в.п.о.ф.), если выполнены два условия:

1) функция f чётная, $f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}$;

2) для любого N, для любых точек $x_1, \dots x_N \in \mathbb{R}$ и любой *вещественной* последовательности $a_1, \dots a_N \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j) a_k a_j \ge 0. \qquad (1)$$

Определение 2 (классическое). Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется положительно определённой функцией (п.о.ф.), если для любого N, любых $x_1, \dots x_N \in \mathbb{R}$ и любой последовательности *комплексных* чисел $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j) z_k \overline{z_j} \ge 0. \qquad (2)$$

Покажем, что для вещественной функции $f(x)$ определения 1 и 2 равносильны.

Покажем, что $1 \Longrightarrow 2$. Пусть $z_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда сумма S в (2) в силу чётности функции равна

$$S = \sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j)(\xi_k \xi_j + \eta_k \eta_j)$$

и нужное неравенство $S \ge 0$ следует из (1).

Теперь покажем, что $2 \Longrightarrow 1$. Нужно проверить только чётность $f(x)$. Для этого положим в (2) $N = 2, x_1 = 0,\ x_2 = x > 0, z_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда сумма S в (2) равна

$$S = f(0)(|z_1|^2 + |z_2|^2) + f(-x) z_1 \overline{z_2} + f(x) z_2 \overline{z_1}.$$

Отсюда получаем для произвольных чисел $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$

$$Im\, S = (\eta_1 \xi_2 - \xi_1 \eta_2)[f(-x) - f(x)] = 0,$$

Отсюда $f(-x) = f(x)$.

Будем рассматривать вещественные *строго* п.о.ф., для которых неравенство (1) выполняется со знаком “строго больше”, если последовательность $a_1, \dots a_N$ ненулевая и точки $x_1, \dots x_N$ попарно различны.

1.2 Свойства в.п.о.ф.

Определение 1 накладывает на рост в.п.о.ф. существенные ограничения. Введём матрицу A с элементами $A_{kj} = f(x_k - x_j), 1 \le i, j \le N$. Эта матрица будет симметричной и неотрицательно определённой. По критерию Сильвестра все её главные миноры неотрицательны. В частности,

$$\Delta_1 = f(x_1 - x_1) = f(0) \ge 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f(0) & f(x_1 - x_2) \\ f(x_2 - x_1) & f(0) \end{vmatrix} = f^2(0) - f^2(x_1 - x_2) \geq 0.$$

Отсюда получаем важное свойство

$$|f(x)| \leq f(0), x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

График функции $f(x)$ находится в полосе $-f(0) \leq y \leq f(0)$, а если достигает верхней или нижней границы, то функция $f(x)$ будет периодической (см. далее).

1.3 Классическое неравенство для в.п.о.ф.

Следующее неравенство, которое мы перепишем для случая в.п.о.ф., в работах Е.А. Горина [Горин, 2012; Gorin&Norvidas, 2013] названо неравенством М.Г. Крейна:

$$[f(x) - f(y)]^2 \leq 2f(0)[f(0) - f(x - y)];\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Доказательство приведено в книге Бхатия [Bhatia, 2007, p. 142].

Следствие 1. Если $f(T) = f(0)$ при некотором $T > 0$, то функция $f(x)$ периодическая с периодом T.

Следующее утверждение, по-видимому, является новым.

Теорема 1. Для в.п.о.ф. $f(x)$ справедливо неравенство

$$[f(x) + f(y)]^2 \leq 2f(0)[f(0) + f(x - y)];\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доказательство. Можно считать, что $f(0) = 1$. Выберем в определении 1 значение N= 3 и три точки $0, x, y$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & f(x) & f(y) \\ f(x) & 1 & f(x-y) \\ f(y) & f(x-y) & 1 \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена, то есть $(Au, u) \geq 0$ для $u \in \mathbb{R}^3$. Возьмём $u = (a, -1, -1)^T$. Тогда получаем

$$a^2 + 2 - 2af(x) - 2af(y) + 2f(x - y) \geq 0,$$

$$2 + 2f(x - y) \geq -a^2 + 2a[f(x) + f(y)].$$

Отсюда при $a = f(x) + f(y)$ получим (5).

Продолжая следовать традиции Е.А. Горина в названиях, теперь логично назвать неравенство (4) первым неравенством М.Г. Крейна, а неравенство (5) – вторым неравенством М.Г. Крейна.

Отметим, что в статье М.Г. Крейна [Крейн, 1943] рассматривается проблема продолжения функции, положительно определенной на интервале $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$, на всю ось; при этом попутно устанавливается неравенство (4).

Следствие 2. Если $f(x)$ является в.п.о.ф. и дополнительно выполнено соотношение $f(T) = -f(0)$ для некоторого $T > 0$, то справедливы соотношения

$$f(x + T) = -f(x), \qquad f(x + 2T) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Действительно, при $y = x + T$ в (5) получаем
$[f(x) + f(x+T)]^2 \le 2f(0)[f(0) + f(T)] = 0.$

1.4 Неравенство Е.А. Горина и его модификация

Е.А. Горин доказал в [Горин, 2012, теорема 1] неравенство, которое для непрерывной в.п.о.ф. $f(x)$ принимает вид:

$$[f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)]^2 \le 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}[f(0) - f(x_k - y_k)]$$

для любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n$. Неравенство М.Г. Крейна получается отсюда как частный случай при n= 1.

Приведённое неравенство Е.А. Горина допускает модификацию, которая является обобщением второго неравенства М.Г. Крейна (5).

Теорема 2. Пусть n – нечётное число. Тогда для любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n \in \mathbb{R}$ для непрерывной в.п.о.ф. $f(x)$ справедливо неравенство

$$[f(\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k) + f(\sum_{k=1}^{n} y_k)]^2 \le 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}[f(0) + f(x_k - y_k)]. \quad (6)$$

Замечание. При чётном n неравенство (6) может не выполняться. Для примера выберем $f(x) = cosx, x_1 = x_2 = 2\pi, y_1 = y_2 = \pi.$ Тогда неравенство (6) принимает вид $4 \le 0$, что неверно.

Доказательство теоремы 2 в основном повторяет доказательство Е.А. Горина из [Горин, 2012]. Не умаляя общности, можно считать, что $f(0) = 1$. По теореме Бохнера [Горин, 2012]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, m(dt),$$

где m – вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Введём обозначения

$$a_k = e^{itx_k}, \qquad b_k = e^{ity_k}, \qquad c_k = \frac{b_k}{a_k} = e^{it(y_k - x_k)}.$$

Тогда левая часть L неравенства (6) равна

$$L = [\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k\right)m(dt)]^2 =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_1 \cdots a_n(1 + c_1 \cdots c_n)m(dt)\right]^2.$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$L \le \int_{-\infty}^{\infty} |1 + c_1 \cdots c_n|^2\, m(dt).$$

Воспользуемся тождеством

$$1 + c_1 \cdots c_n = 1 + c_1 - c_1(1 + c_2) + c_1 c_2 (1 + c_3) - \cdots + c_1 \cdots c_{n-1}(1 + c_n).$$

Знаки чередуются, но перед последним слагаемым знак + в силу нечётности *n*.

Применим неравенство Коши-Буняковского для конечной суммы

$$L \le n \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |1 + c_k|^2 \, m(dt).$$

Аналогично преобразуется правая часть *R* неравенства (6):

$$R \le 2n \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} Re\,(1 + c_k)\, m(dt).$$

Поскольку $c_k = e^{ip}$, где $p = t(y_k - x_k)$, то нетрудно проверить, что $|1 + c_k|^2 = 2Re\,(1 + c_k)$.
Поэтому получаем $L \le R$, что и требовалось доказать.

2 Приложение теории в.п.о.ф. к разрешимости конечномерных приближений для интерполяционной задачи

2.1 Строгая положительная определённость функций и интерполяционные задачи

Вещественные строго п.о.ф. могут быть использованы для доказательства однозначной разрешимости конечномерных линейных систем уравнений. Такие задачи возникают при решении различных интерполяционных задач. Рассмотрим приложение к одной из таких задач – разложению произвольного сигнала по целочисленным сдвигам Гауссианов.

Пусть даны попарно различные узлы $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ и набор измеренных значений цифрового сигнала $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}$ в этих узлах. Пусть выбрана вещественная строго п.о.ф. $f(x)$. Будем интерполировать данные линейными комбинациями вида

$$S(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k f(x - x_k).$$

Требуется найти вектор коэффициентов вида $a = (a_1, \dots, a_N)$ так, чтобы обрабатываемый сигнал без ошибок восстанавливался на заданной системе узлов:

$$S(x_m) = \sum_{k=1}^{N} a_k f(x_m - x_k) = y_m, 1 \le m \le N. \tag{7}$$

Систему (7) можно записать в виде $Aa = y$, где A- матрица с элементами $A_{mk} = f(x_m - x_k)$. В силу того, что $f(x)$ является вещественной строго п.о.ф., эта матрица положительно определена, то есть

$$(\mathrm{Aa}, \mathrm{a}) = \sum_{k,m=1}^{N} f(x_m - x_k) a_m a_k > 0, a \in \mathbb{R}^N, a \neq 0.$$

У положительно определённой матрицы определитель $\det(A)$ строго положителен. Поэтому система (7) однозначно разрешима.

2.2 Приложение к интерполяционной задаче о разложении сигнала по целочисленным сдвигам Гауссианов

Восстановление непрерывного цифрового сигнала по системе дискретных отсчётов сводится к классической математической задаче об интерполяции функции по некоторому набору её значений. Для решения этой задачи разработано множество подходов: приближение полиномами, ортогональными системами, всплесками, сплайнами, фреймами, разложениями по синк-функциям и т.д., см., например, [Чуи, 2001; Малозёмов & Машарский, 2012; Игнатов & Певный, 1991].

Рассмотрим задачу об интерполяции сигналов при помощи системы целочисленных сдвигов функции Гаусса

$$f(x) = e^{-ax^2}, a > 0. \tag{8}$$

Несмотря на то, что данная система сдвигов не является ни фреймом, ни полной системой в $L_2(\mathbb{R})$, существует плодотворная теория для разложений этого класса, которые также находят важные практические приложения [Maz'ya & Schmidt, 2007; Журавлёв и др., 2010; Киселёв и др., 2014].

Для нас важно, что квадратичная экспонента или функция Гаусса (8) – это один из классических примеров функции из класса в.п.о.ф. В перечисленных работах рассматривается интерполяционная задача по бесконечной системе целочисленных сдвигов функции (8), в связи с чем строится узловая функция со свойством

$$d(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-a(x-k)^2}, \ d(m) = \delta_{0m}, m \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

где δ_{0m} –символ Кронекера.

График узловой функции напоминает график sinc – функции. Поэтому возникает такая

Гипотеза. Узловая функция (9) принадлежит классу вещественных строго п.о.ф.

Явная формула для коэффициентов d_k получена в [Maz'ya & Schmidt, 2007], они выражаются через тета-функции Якоби. Однако подобные формулы неприменимы при практических вычислениях, потому, что как показано в [Минин и др., 2009], они связаны с делением на чрезвычайно малые знаменатели, что приводит к неприемлемым ошибкам.

В связи с перечисленными трудностями в работе [Ситник & Тимашов , 2013] был предложен другой подход к нахождению узловой функции, при котором решение бесконечной системы уравнений сводится к конечной. В результате получается усечённая система

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k q^{(m-k)^2} = \delta_{0m}, -n \le m \le n, \tag{10}$$

где обозначено $q = e^{-a} < 1$. Систему (10) можно записать в виде

$$Ac = \delta, \text{где } c = \{c_k\}_{k=-n}^{n}, \delta = \{\delta_{m0}\}_{m=-n}^{n},$$

A – матрица с элементами $A_{mk} = q^{(m-k)^2}, -n \le m, k \le n$.

Например, при $n = 2$ матрица A коэффициентов системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & q & q^4 & q^9 & q^{16} \\ q & 1 & q & q^4 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 1 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & q & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 3. Матрица A положительно определена при любом $q \in [0,1)$.

Доказательство. При $q = 0$ матрица сводится к единичной, требуемое очевидно, поэтому пусть $q \in (0,1)$. Напомним, что $q = e^{-a}, a > 0$. Тогда элементы рассматриваемой матрицы выражаются через функцию Гаусса

$$A_{mk} = f(m-k), f(x) = e^{-ax^2}.$$

В силу принадлежности функции Гаусса классу строго п.о.ф. матрица A положительна определена.

Следствие 1. Система (10) однозначно разрешима.

Действительно, в силу положительной определённости $\det(A) > 0$.

Отметим, что система (10) имеет вид свёртки, поэтому её можно решать при помощи ДПФ, аналогично методу, применённому в [Минин и др., 2009].

Следствие 2. Решение системы (10) симметрично, то есть $c_{-k} = c_k$ при фиксированном *n*.

Действительно, рассмотрим произвольное решение *с*. Нетрудно видеть, что если распространить по симметрии значения компонент с положительными индексами на компоненты с отрицательными индексами, то получится другое решение той же системы. Тогда, если исходное решение было бы несимметричным, то мы получили бы два различных решения, что невозможно в силу доказанной единственности. Следовательно, все решения симметричны.

На основании следствия 2 можно оставить в системе только половину уравнений, сократив размеры матрицы коэффициентов задачи вдвое, это даст существенное упрощение при вычислениях.

Заметим, что похожая матрица *B* с элементами

$B_{mk} = (-q)^{(m-k)^2}, -n \le m, k \le n,$

при $0 < q < 1$ также положительно определена. Для доказательства достаточно заметить, что

$$B_{mk} = g(m-k), g(x) = e^{-ax^2} \cos(\pi x), a = -\ln(q),$$

и показать, что функция $g(x)$ принадлежит классу строго п.о.ф.

Список литературы

[Горин, 2012] Горин Е.А. Положительно определённые функции как инструмент математического анализа // Фундамент. и прикл. матем.- 2012, Т. 17, вып. 7.- С. 67–95.

[Журавлёв и др., 2010] Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных.- 2010. - С. 107-116.

[Киселёв и др., 2014] Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Математические заметки.- 2014.- Т. 96, вып. 2.- С. 239-250.

[Крейн, 1943] Крейн М.Г. О представлении функций интегралами Фурье-Стилтьеса // Учёные записки Куйбышевского государственного педагогического и учительского института им. В.В. Куйбышева.- 1943.- Вып. 7. (Цитируется по изданию: Крейн М.Г. Избранные труды. Киев, 1993. Том 1, С. 16-48.)

[Игнатов и др., 1991] Игнатов М.И., Певный А.Б. Натуральные сплайны многих переменных. Л.: Наука, 1991.

[Малозёмов и др., 2012] Малозёмов В.Н., Машарский С.М. Основы дискретного гармонического анализа. СПб.: Лань, 2012.

[Минин и др., 2009] Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета.- 2009.- № 13 (68), Выпуск 17/2. -С. 89-99.

[Ситник и др., 2013] Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика.- 2013.- №19 (162), Вып. 32.- С. 184-186.

[Чуи, 2001] Чуи К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.

[Bhatia, 2007] Bhatia R. Positive Definite Matrices. Princeton University Press, 2007.

[Gorin et al, 2013] Gorin E. A., Norvidas S. Universal Symbols on Locally Compact Abelian Groups // Functional Analysis and Its Applications. – 2013, Vol. 47, № 1.- pp. 1–13.

[Mathias, 1923] Mathias M. Über positive Fourier-Integrale // Math. Zeit.- 1923, Vol. 16.- pp. 103-125.

[Maz'ya et al, 2007] Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. University of Linköping, 2007.

[Stewart, 1976] Stewart J. Positive Definite Functions And Generalizations, An Historical Survey // Rocky Mountain Journal Of Mathematics.- 1976, Vol. 6, № 3.- pp. 409-434.

[Zhuravlev et al, 2011] Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., S. M. Sitnik. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer.- 2011, Vol. 173, № 2. - pp. 231-241.