ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ФОРМИРОВАНИЕ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика
заочной формы обучения,
группы 02041660
Мишустин А.И.

Научный руководитель к.п.н., доцент кафедры математики Остапенко С.И.

Рецензент директор МБОУ «Корочанская СОШ им.Д.К.Кромского» Создана Л.Н.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Приоритетной целью российского образования на современном этапе развития является создание условий для получения учащимися качественного образования на основе формирования ключевых компетенций как целостной системы универсальных знаний, умений и навыков, опыта самостоятельной деятельности и личной ответственности. Основным результатом деятельности образовательного учреждения становится способность человека действовать в конкретной жизненной, профессиональной, социальной ситуации, проявляя самостоятельность, мобильность, креативность, компетентность. Учитывая, что компетентность – это владение, обладание учеником соответствующей компетенцией, включающее его личностное отношение к ней и предмету деятельности, в своем исследовании будем опираться на перечень ключевых компетенций, обозначенных в ФГОС НОО: ценностно-смысловая, общекультурная, учебно-познавательная, информационная, коммуникативная, социально-трудовая и компетенции личностного самосовершенствования. Согласно Болонской конвенции [17], которую подписала Россия, специалист, закончивший российский вуз, должен соответствовать общеевропейскому уровню требований, т.е. быть интеллектуально и профессионально компетентен в процессе непрерывного образования.

В настоящий момент проблема формирования учебно-познавательной компетенции рассматривается в связи с необходимостью подготовки нового поколения молодых специалистов, способных решать быстро, качественно и творчески сложные задачи; мыслящих достаточно универсально, обладающих фундаментальными знаниями, конкурентоспособных. Одной из наиболее значимых компетенций личности школьника, необходимой для продолжения образования, ученые и педагоги считают учебно-познавательную компетенцию. Поскольку одним из важных результатов является умение учиться на протяжении всей жизни, очевидна необходимость изучения вопроса формирования и диагностирования учебно-познавательной компетенции учащихся в процессе изучения тригонометрических функций.

По мнению А. В. Хуторского, «учебно познавательная компетенция это совокупность компетенций в сфере самостоятельной познавательной деятельности, включающей элементы логической, методологической, общеучебной деятельности, соотнесённой с реальными познаваемыми объектами. Сюда входят знания и умения организации целеполагания, планирования, анализа, рефлексии, самооценки учебно познавательной деятельности, также овладение креативными навыками продуктивной деятельности: добыванием знаний непосредственно из реальности, владением приемами действий в нестандартных ситуациях, эвристическими методами решения проблем» [5, с. 135].

Тригонометрия – существенная и значимая составляющая школьного курса алгебры; данный материал традиционно применяется в математических олимпиадах, играя роль своего рода инструмента отбора. В нашей работе мы рассмотрим формирование учебно-познавательных компетенций в процессе изучения тригонометрических функций.

Тригонометрии в школе традиционно уделяется много внимания: сначала – в курсе геометрии, затем – в курсе алгебры и начал анализа. Поскольку в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ тригонометрический материал (тождества, уравнения, неравенства) представлен достаточно широко, учителя математики не жалеют ни сил, ни времени на то, что, по их мнению, особенно важно учащимся, – на отработку формул. Но, к сожалению, результат такого преподавания не всегда оправдывает себя. По мнению вузовских преподавателей, выпускники школ тригонометрию знают плохо.

В школьном курсе математики в разные годы использовались разные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной окружности. При этом большинству учебников присущ один и тот же недостаток – недооценка важности изучения самой модели «числовая окружность» (точнее, модели «числовая окружность на координатной плоскости») и слишком поспешное (чуть ли не на первом уроке) введение понятий синуса и косинуса «по окружности». Это приводит к наложению двух трудностей: непривычная модель (числовая окружность) и непривычный способ введения функций (синус как ордината, косинус как абсцисса точки числовой окружности). При этом в качестве опоры используется геометрический материал о вычислении длин дуг окружностей, который, как показывает практика, не дорабатывается в курсе геометрии.

Теоретический анализ литературных источников свидетельствует, что разработаны следующие аспекты данного подхода: выделены понятия «компетентность», «компетенция», «виды компетенций» (А.Л. Андреев, А.М. Аронов, Д.А. Иванов, Д.И. Иванов, В.А. Кальней, Т.М. Ковалевская, К.Г. Митрофонова, Дж. Равен, О.В. Соколова, И.Д. Фрумин, А.В. Хуторской, С.Е. Шимов, Б.Г. Щедровицкий); сформирована структура основных компетенций (И.А. Зимняя, В.И. Загвязинского, Г.К. Селевко, А.В. Хуторской); разработкой методики изучения тригонометрических функций занимались многие математики и методисты (В. С. Крамор, А. Г. Мордкович, М. С. Мацкин, Р. Ю. Мацкина, И. Ф. Шарыгин, С. В. Королев, В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин и др.).

Таким образом, определена проблема исследования, связанная с недостаточной изученностью формирования учебно-познавательной компетенции школьника на материале тригонометрических функций.

Цель исследования: выявить методические особенности формирования учебно-познавательных компетенций в процессе изучения тригонометрических функций.

Объект исследования: процесс формирования учебно-познавательной компетенции учащихся в процессе изучения тригонометрических функций.

Предмет исследования: система задач по теме «Тригонометрические функции», реализуемых в образовательном пространстве школы, как условие эффективного формирования учебно-познавательной компетенции учащихся.

Задачи исследования:

- на основе анализа научно-педагогической и методической литературы раскрыть и конкретизировать сущность понятия «учебно-познавательная компетенция», определить структуру учебно-познавательной компетенции;
- определить роль изучения тригонометрических функций в процессе формирования учебно-познавательной компетенции учащихся;
- разработать систему задач, направленную на формирование учебно-познавательных компетенций учащихся в процессе изучения тригонометрических функций.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта учителей математики по данной теме исследования; сравнительный анализ учебников и учебных пособий; систематизация и обобщение материала по теме.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по обучению тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в курсе алгебры основной школы, которые могут быть использованы учителями математики основной школы и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики в школе.

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы была определена её структура: ведение, теоретическая и практическая часть, заключение, список литературы.

Во введении обоснована актуальность, поставлены цели и задачи выпускной работы, перечислены методы для их решения.

В первой главе изложен весь теоретический материал по теме «Формирование учебно-познавательных компетенций в процессе изучения тригонометрических функций». Описана характеристика учебно-познавательных компетенций старшеклассников. Обозначены формы, методы и средства обучения тригонометрическим функциям в курсе алгебры основной школы, а также Особенности формирования учебно-познавательных компетенций при изучении темы: «Тригонометрические функции».

Во второй главе представлена практическая область исследования по теме. А именно, разработана система задач, направленная на формирование учебно-познавательных компетенций учащихся в процессе изучения тригонометрических функций; выявлены плюсы и минусы методик изучения тригонометрических функций в различных школьных учебниках.

В заключении приводятся итоги проделанной работы.

Апробация представленного занятия проводилась в период педагогической практики в МБОУ «Корочанская СОШ им. Д.К. Кромского» г. Короча, Белгородская область.

Материалы исследования представлены в публикациях:

1) Публикация в сборнике материалов конференции, ISBN, elibrary.ru (РИНЦ) 16-я международная научно-практическая конференция наука и образование: отечественный и зарубежный опыт г. Белгород, 21 декабря 2018 г. «Формы, методы и средства обучения тригонометрическим функциям в курсе алгебры основной школы»

2) **Международная научно-практическая конференция**: ***Вопросы образования и науки*** (*Тамбов, 30 ноября 2018 г.*). «Формирование учебно-познавательных компетенций в процессе изучения тригонометрических функций».

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1.1. Характеристика учебно-познавательных компетенций старшеклассников

В Стратегии модернизации общего образования под учебно-познавательной компетенцией понимается владение:
– умениями в сфере самостоятельной самоуправляемой познавательной деятельности, включающей элементы логической, методологической, общеучебной деятельности; – креативными умениями продуктивной деятельности – добывание знаний непосредственно из реальности, владение эвристическим методом решения проблем; – соответствующей функциональной грамотностью – умение отличать факты от домыслов; – измерительными навыками по использованию вероятностных, то совокупность компетенций ученика в сфере самостоятельной познавательной деятельности, включающей элементы логической, методологической, общеучебной деятельности, соотнесенной с реальными познаваемыми объектами. Сюда входят знания и умения организации целеполагания, планирования, анализа, рефлексии, самооценки учебно-познавательной деятельности. По отношению к изучаемым объектам ученик овладевает креативными навыками продуктивной деятельности: добыванием знаний непосредственно из реальности, владением приемами действий в нестандартных ситуациях, эвристическими методами решения проблем. В рамках данных компетенций определяются требования соответствующей функциональной грамотности: умение отличать факты от домыслов, владение измерительными навыками, использование вероятностных, статистических и иных методов познания. Учебно-познавательные компетенции должны стать устойчивой чертой личности школьника, оказывать влияние на его развитие, приобрести для

него социальную и личностную значимость для использования не только в будущей, но и в реальной жизни.

Поскольку процессы формирования и развития учебно-познавательной компетентности у школьников находятся на стадии разработки, во всех исследованиях отведено значительное место изучению ее сущности и структуры, знание которых обусловливает успешность осуществления этого процесса. Несмотря на то, что этот вид компетентности называется в работах по-разному («познавательная», «учебно-познавательная», «интеллектуально-познавательная», «учебно-исследовательская», «когнитивная»), все исследователи имеют в виду компетентность, реализуемую и формируемую в познавательной деятельности. Сущность и специфические признаки этой компетентности, с точки зрения исследователей, определяются совокупностью знаний, умений, навыков, опыта и смысловых ориентаций познавательной деятельности; способностью к ней; готовностью осуществлять ее самостоятельно. К явлениям, раскрывающим сущность учебно-познавательной компетентности, по мнению А. В. Хуторского, следует отнести элементы логической, методологической, общеучебной деятельности, соотнесенной с реальными познаваемыми объектами; теоретическую и практическую готовность к самостоятельной познавательной деятельности и др. [9]. Проанализировав представленные в исследованиях вышеназванных авторов определения компетентности в познавательной деятельности, мы пришли к выводу, что ее сущность заключается в знаниях о способах осуществления познавательной деятельности, в стремлении и готовности самостоятельно эффективно осуществлять данный вид деятельности. Принимая во внимание принцип единства содержания и формы, мы решили соотнести представления о сущности компетентности с ее компетентным составом и выделить составляющие учебно-познавательной компетентности на основе предложенных исследователями вариантов структуры компетентности вообще и компетентности в познавательной деятельности. «Понятие компетентности», – согласно разработчикам «Стратегии модернизации содержания общего образования, – «…включает не только когнитивную и операционально-технологическую составляющие, но и мотивационную, этическую, социальную и поведенческую. Оно включает результаты обучения (знания и умения), систему ценностных ориентаций, привычки и т. д.». С точки зрения Дж. Равенна, компетентность включает такие характеристики, как: • готовность к проявлению компетентности (т. е. мотивационный аспект); • владение знанием содержания компетентности (т. е. когнитивный аспект); • опыт проявления компетентности в разнообразных стандартных и нестандартных ситуациях (т. е. поведенческий аспект); • отношение к содержанию компетентности.

Анализируя близкие по содержанию, с нашей точки зрения, представления ученых о составе компетентности, мы заключили, что любая компетентность включает: • мотивационный компонент как готовность к определенному виду деятельности; • когнитивный компонент, включающий знание о способах осуществления именного этого вида деятельности; • деятельностный, отражающий опыт осуществления данного вида деятельности; • ценностно-смысловой, характеризующий отношение к содержанию деятельности и объекту ее приложения; • эмоционально-волевой, регулирующий проявление компетентности. В настоящее время исследователи, в частности И. А. Зимняя, поднимают проблему ограничения компонентного состава компетентности, увеличение объема которого затрудняет и разработку подходов к их оценке как результату образования [4], с чем мы полностью согласны.

Рассмотрим компонентный состав учебно-познавательной компетентности, которая, по мнению исследователей, включает: • постановку и решение познавательных задач; нестандартные решения, проблемные ситуации – их создание и разрешение; продуктивное и репродуктивное познание, исследование, интеллектуальная деятельность (И. А. Зимняя) [4]; • «совокупность компетенций в сфере самостоятельной познавательной деятельности, включающей элементы логической, методологической, общеучебной деятельности, соотнесенной с реальными познаваемыми объектами. Сюда входят знания и умения организации целеполагания, планирования, анализа, рефлексии, самооценки учебно-познавательной деятельности, а также овладение креативными навыками продуктивной деятельности: добыванием знаний непосредственно из реальности, владение приемами действий в нестандартных ситуациях, эвристическими методами решения проблем» (А. В. Хуторской) [9];• накопленные знания, умения обучающегося в организации данного вида деятельности, владение способами (навыками, приемами, алгоритмами и т. д.) решения учебно-познавательных задач, опыт самостоятельной познавательной деятельности (Н. М. Комиссарова) [5]; • общие (интеллектуальные, управленческие и информационные умения, формируемые на базе всех дисциплин) и специальные (умения, которые формируются как в процессе овладения иностранным языком, так и в процессе овладения конкретным элективным курсом) учебно-познавательные умения; а также знания о способах осуществления самостоятельной учебно-познавательной деятельности (С. И. Константинова) [6];• когнитивный, деятельностный и ценностно-мотивационный компоненты, при этом деятельностный компонент первостепенен при решении компетентностных задач (О. В. Харитонова); • основы теоретических знаний и интеллектуальных умений, обусловленную смыслоценностными ориентациями способность познавать, логически мыслить, анализировать, • триединство деятельностных характеристик учащихся и в модель содержания познавательной компетентности включает: а) владение умениями и навыками, обобщенными способами учебно-познавательной деятельности; б) способность учащихся применять познавательные умения и навыки для получения и создания нового знания,

для самообразования и самосовершенствования; в) готовность использовать полученные знания, умения и способы познавательной деятельности в решении профессиональных задач (М. М. Шаламова) [11];
• единство теоретической и практической готовности старшеклассника к осуществлению самостоятельной познавательной деятельности (Т. В. Шамардина) [10]; • когнитивный, содержащий систему представлений, взглядов, знаний, отражающих индивидуально своеобразные активные способы познавательного отношения ученика к происходящему; операционально-деятельностный, включающий систему учебно-логических, учебно-информационных и учебно-управленческих умений, а также способов учебно-познавательной деятельности, усвоенных личностью и обеспечивающих возможность присвоения, «сохранения и переработки информации в целостную картину мира», и ценностно-смысловой, определяющийся суммой мотивов, интересов, ценностей – показателей учебно-познавательной компетентности, обеспечивающих применение знаний, опираясь на которые ученику удается осуществлять иную деятельность, компоненты (Т. В. Шамардина) [10].
Особо хочется выделить образно-концептуальную модель учебно-познавательной компетентности С. Г. Воровщикова [3], представляющую собой трехъярусную пирамиду, венцом которой является:
• ценностно-ориентирующий уровень (убеждения, эмоционально-ценностные установки, знание высших образцов познавательной деятельности);
• «плотью» – теоретико-информационный уровень (знание о законах, теориях, способах и приемах познания, учения);
• основанием – технико-технологический уровень (общеучебные умения, готовность применить различные техники и технологии познания в стандартных и нестандартных ситуациях).
В пирамиде С. Г. Воровщиков отводит ключевую роль технико-технологическому уровню, поскольку составляющие его общеучебные умения как универсальные для многих школьных предметов способы

получения и применения знаний, с одной стороны, являются компонентом основания пирамиды, а с другой – в них в снятом виде представлены соответствующие требования учебно-познавательной компетентности. Оценивая представленные в работах варианты структуры учебно-познавательной компетентности, мы выделили следующие подходы в ее раскрытии: 1) через теоретическую и практическую готовность к осуществлению самостоятельной познавательной деятельности; 2) посредством единения мотивационного, ценностного, когнитивного, операционально-деятельностного, личностно-преобразующего, эмоционально-волевого, рефлексивного в различные комбинации; 3) просто через знания, умения и опыт самостоятельной познавательной деятельности; 4) через совокупность компетенций в сфере самостоятельной познавательной деятельности; 5) посредством уровневого подхода, где компетентность – пирамида, в основании которой лежит технико-технологический уровень, плотью является теоретико-информационный уровень, а венцом – ценностно-ориентирующий. С нашей точки зрения, наиболее точным и всеобъемлющим представлением структуры учебно-познавательной компетентности является модель С. Г. Воровщикова, хотя с точки зрения оценки сформированности данных составляющих компетентности у учащихся данная модель может создать трудности. Если говорить о том, сформирована развита ли учебно-познавательная компетентность, то лучше четко выделить те показатели, соответственно и компоненты компетентности, которые свидетельствуют о ее наличии. С нашей точки зрения, это: 1) мотивы, интересы, ценности познания (мотивационно-аксиологический компонент); 2) знание образцов познавательной деятельности и знание о законах, теориях, способах и приемах познания, учения (когнитивный компонент); 3) управленческие, информационные, логические умения, технологии познания и опыт самостоятельной познавательной деятельности (конативный компонент); 4) самоуправление познавательной деятельностью, саморегуляция (эмоционально-волевой компонент). Кроме того, нам показался интересным и верным подход к представлению компетентности как совокупности потенциальной и реализованной структур. Этот подход связан с обоснованием зависимости компетентности от реализованной (потенциальной) и нереализованной активности.

Сущность данной точки зрения заключается в том, что понятие «компетенция» исследователи соотносят с потенциальной активностью (готовность и стремление к деятельности), а «компетентность» – с реальной активностью – качеством, определяющим успешность процесса и результата деятельности. Мы согласны с тем, что компетенции как нереализованная готовность и стремление к познавательной деятельности, входящие в структуру учебно-познавательной компетентности, успешно могут быть реализованы лишь при проявлении старшими школьниками познавательной активности в рамках изучаемого предмета, которая «запускает в действие» потенциальную структуру компетентности – познавательные компетенции. Следовательно, познавательную активность мы рассматриваем как источник формирования и реализации учебно-познавательной компетентности, без которого эта компетентность не появится и не проявится. Таким образом, учебно-познавательная компетентность старшеклассника применительно к предмету – это составляющая компетентностной модели выпускника общеобразовательной школы; совокупность компетенций обучающегося в познавательной сфере, объединяющая учебную, проектно-исследовательскую, медийную и информационную деятельности, в т. ч. операции по поиску, систематизации, обобщению и применению информации по объектам химической науки и исследуемым химическим явлениям. Подводя итог о структуре учебно-познавательной компетентности, отметим, что: 1) ее основные компоненты соотносятся с компонентами компетентности вообще, специфика связана с особенностями познавательной деятельности, в которой реализуется и формируется учебно-познавательная компетентность; 2) компонентный состав включает мотивы и ценности познавательной деятельности, знание этой деятельности; умения и опыт эту деятельность осуществлять, а также эмоциональные и волевые качества; 3) структура учебно-познавательной компетентности может быть представлена потенциальными составляющими – компетенциями, которые могут стать компетентностью только при наличии познавательной активности, являющейся источником превращения потенциальной составляющей структуры в реализованную, т. е. учебно-познавательную компетентность. В процессе развития учебно-познавательной компетентности у старших школьников в предметном обучении встают вопросы, как научного, так и методического плана: 1. Каким образом можно у обучающегося развить учебно-познавательную компетентность? Ответ на данные вопросы предполагает определение условий и разработку модели развития учебно-познавательной компетентности в рамках конкретной дисциплины. 2. При изучении какого материала возможно развить учебно-познавательную компетентность? Для чего необходимо осуществить отбор содержания образования и технологий обучения. 3. По каким критериям можно оценить уровень проявления учебно-познавательной компетентности у старших школьников? Что предполагает выделение критериев и уровней проявления учебно-познавательной компетентности в рамках конкретной дисциплины. Большинство ученых ставят оценку формирования и развития учебно-познавательной компетентности учащегося в зависимость от учебной дисциплины, которая характеризуется мерой участия педагога в учебном процессе и мерой самостоятельности обучающегося. Уровни проявления учебно-познавательной компетентности учащегося, по нашему мнению, можно оценить с учетом имеющегося отношения его к познавательной деятельности и мотивацией к обучению. На основе исследований А. Т. Кулахметовой сформулируем критерии уровня проявления учебно-познавательной компетентности с учетом мотивации к познавательной деятельности (см. табл. 2). Выделенные критерии уровня проявления учебно-познавательной компетентности у обучающихся могут быть соотнесены, а, следовательно, и адаптированы к конкретной учебной дисциплине. Учитывая универсальность критериев оценки уровней проявления учебно-познавательной компетентности обучающихся, реализующих познавательную деятельность, можно говорить о группах общих компетенций, в которых отражается содержание этой деятельности. К ним отнесем: • умение работать с источниками и документами; • умение работать со справочной литературой; • умение работать с медиаисточниками информации и использовать медиатехнологии для презентации результатов; • умение работать с компьютерными поисковыми системами; • умения осуществлять основные логические операции; • умение проводить наблюдения; • умение проводить различного вида исследования; • умение различными способами организовывать данные; • умение грамотно выражать свои мысли (формулировать суждения); • умение представлять результаты исследования. Кроме общих компетенций существуют специфические, которые проявляются в рамках дисциплин или предметных областей, среди которых: • умение устанавливать непротиворечивость свойств нового объекта построенной теории (умение устанавливать существование объекта); • умение воспроизводить события, явления и реакции; • описывать объекты с помощью различных медиатехнологий. Можно привести еще много примеров таких компетенций. Они обусловлены особенностями объектов определенной предметной области и методами, используемыми для их изучения. Для осуществления познавательной деятельности на основе определенного предметного содержания необходимо владеть этим содержанием. Это означает знать особенности объектов этой предметной

области, представлять и уметь использовать ее методы, знать содержание важнейших понятий области и уметь ими оперировать. В связи со сказанным целесообразно выделить базовые предметные умения, без которых не может осуществляться познавательная деятельность в соответствующей области. В связи с необходимостью осуществлять в ходе познавательной деятельности поиск информации и эксперименты с помощью различного оборудования (теле- и видеотехника, аудиоустройства, компьютерная и организационная, проекционная техника) учащиеся должны владеть умениями работы с оборудованием, или инструментальными (операционными) компетенциями. Исходя из высказанного, формируя перечень компетенций, составляющих учебно-познавательную компетентность школьника, выделим следующие, представленные на схеме, и их связь между собой.
Таким образом, составляющие учебно-познавательную компетентность компетенции (общие, специфические, инструментальные) рассматриваются в нашем исследовании как совокупность умственных операций и прикладных действий, осуществляемых обучающимся при сопровождении педагога, позволяющую мотивированно выполнить учебную и внеучебную деятельность или их
отдельные этапы, с помощью которых в познавательной деятельности происходит их развитие.

1.2 Формы, методы и средства обучения тригонометрическим функциям в курсе алгебры основной школы

Б.Т. Лихачев[12] рассматривает *формы обучения* как некую систему с определенными целями, четкой организацией, а также содержанием и методикой познавательного и воспитательного взаимодействия, общения и отношений между обучающим и обучаемыми.

Форма организации учебного процесса - это какой-либо определенный вид учебного занятия. Например, это может быть урок, факультатив, лекция, семинар, кружок, экскурсия, и т.д. Если форма обучения несет в себе единичный и изолированный характер (как отдельно взятый урок, лекция, лабораторная работа, семинарское занятие и др.), то чаще всего она имеет частный обучающе-воспитательный смысл, и ее главной целью становится обеспечение усвоения учащимися заранее определенного набора фактов, выводов, положений, а также отработка конкретных навыков и умений.

Система, которая использует различные формы обучения и позволяет раскрыть целостные разделы, темы, теории, концепции, использовать связанные между собой умения и навыки, имеет общее обучающе-воспитательное значение и способствует формированию у обучающихся системных знаний и личностных качеств. Система, состоящая из разнообразных форм обучения, пронизанная и скрепленная основными идеями изучаемого раздела, темы и взаимосвязанными видами деятельности, гарантирует усвоение изучаемого предмета, формирование и развитие учебных умений и навыков, а также влияет на миропонимание окружающего мира.

Метод обучения - система последовательно взаимосвязанных действий учителя и учащихся, обеспечивающих усвоение учебного материала. В педагогике пока не существует единственно верного способа выделения методов. Различными авторами выделяются следующие методы обучения:

- рассказ;

- объяснение; беседа; лекция; дискуссия; видеометод; лабораторный метод, практический метод; контрольная работа; - опрос (устный и письменный, индивидуальный, фронтальный, уплотнённый) и др.

Кроме этого, при практическом применении каждый из методов имеет разновидности и может быть использован для решения различных дидактических задач.

Приёмы обучения обычно определяются как составные части методов. Приём - это элемент метода, однако именно через него идет достижение практической реализации метода.

Так, например, в методе, когда используется работа с книгой, мы можем выделить такие приёмы как: составление логической схемы прочитанного, составление плана текста; чтение вслух; заполнение таблицы по прочитанному материалу; создание конспектов и заметок; выборка цитат. Одной из интересных особенностей является тот факт, что один и тот же метод обучения в зависимости от ситуации может быть реализован через различные приёмы. Таким образом, при работе с книгой можно рассмотреть несколько случаев. В одном варианте это может включать в себя составление плана и чтение вслух, в другом случае - подбор цитат и выделение основных тем, затронутых в тексте, в третьем случае - заполнение таблиц и конспект.

Как видно один и тот же приём обучения может быть включен в различные методы. Так, составление таблицы или наглядной схемы может быть частью объяснительно-иллюстративного метода (например, при объяснении нового материала, учитель чертит какой-либо пояснительный рисунок на доске), а может применяться и в виде элемента исследовательского метода (например, учениками самостоятельно составляется схема, отражающая содержание материала, изучаемого ими в данный момент). Применение методов и приёмов обучения на практике становится возможным только при наличии всех необходимых для этого средств. Так, к примеру, очевидно, что для работы с книгой необходимо само наличие книги, а для работы в лаборатории - соответствующее лабораторное оборудование и т.д.

Средства обучения - это предметная составляющая любого учебного процесса, т.е. некие материальные и материализованные объекты, которые педагог может использовать в качестве инструментов своей деятельности, а также в роли носителей информации в учебном процессе.

К таким средствам обучения относятся, прежде всего, учебники, наглядные пособия (муляжи, коллекции минералов, иллюстрации и др.), какой-либо дидактический материал, технические средства обучения (ТСО) и прочее оборудование, которое применяется в процессе обучения [22]. Материализованные средства включают в себя речь (тон, громкость, четкость), мимику, жесты, а также различную деятельность, например, трудовую, познавательную, коммуникативная и др.

В современных школах форма обучения имеет преимущественно классно-урочный или лекционно-практический характер.

Согласно учебной программе, разработанной В.В. Морушкиной [19] на основе учебника Ш.А. Алимова, при изучении темы «Тригонометрические функции» целесообразно использовать такие типы уроков как уроки-лекции (ЛК) и уроки-практикумы (ПР). В качестве контроля уровня знаний используются такие методы как фронтальный опрос (ФО) и самостоятельная работа (СР) (Таблица 1). На каждую из новых тем выделяется один обучающий урок и один или несколько уроков - практикумов.

Первый урок по теме правильно было бы охарактеризовать уроком объяснения нового материала. В средних классах он проводится способом повествования - объяснения, сочетающегося с беседой и демонстрацией учебно-наглядных пособий.

Таблица 1. Типы уроков при изучении темы «Тригонометрические функции»

Тема урока	**Планируемые результаты**	**Тип и форма урока**	**Вид контроля**
Зависимость между синусом,	Знать осн. триг. тождество и	ЛК ПР	ФО

косинусом и тангенсом одного и того же угла	зависимость между функциями одного и того же угла		
Тригонометрические тождества	Знать определение тождества, уметь применять способы доказательства тождества	ПР	ФО СР
Синус, косинус и тангенс углов a и -a	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР	
Формулы сложения	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР	ФО СР
Синус, косинус и тангенс двойного угла	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР ПР	ФО СР
Синус, косинус и тангенс половинного угла			
Формулы приведения	Знать формулы приведения и уметь применять их	ЛК ПР	ФО СР
Сумма и разность косинусов Сумма и разность синусов	Знать формулы и уметь применять их	ЛК ПР	ФО СР
Обобщение по теме «Тригонометрические функции»	Обобщить ЗУН по теме «Тригонометрические формулы»	ПР	

Этот урок обладает собственными характерными чертами. Задача урока - обобщенный анализ темы. В начале педагог весьма коротко знакомит обучающихся с простым планом содержания темы, планом ее изложения, главным комплектом задач, что, безусловно, увеличивает мотивацию обучающихся к её исследованию, педагог дает ученикам советы, как конспектировать, акцентировать суть, закреплять возникающие у них вопросы по мере изложения педагогом темы. Форма проведения уроков в виде *лекции* целесообразна при знакомстве учащихся с новым материалом, который мало связан с уже изученными ранее темами. В этом случае, в плане реализации теории укрупнения дидактических единиц в обучении, информация подается крупными блоками [20].

При данном изложении материала преподаватель использует такие методы обучения как рассказ, объяснение, лекция, дискуссия, работа с учебником. Для актуализации опорных знаний при коллективной форме проведения урока большую роль играет фронтальный опрос. Например, «дайте определение синуса и косинуса», «как они обозначаются на числовой окружности», «как знак синуса (косинуса) зависит от той четверти, где находится точка» и т.д.

В качестве проверки знания формул могут проводиться «пятиминутки», т.е. письменный опрос вначале урока.

В отличие от уроков-лекций *семинар* позволяет осуществлять активную самостоятельную проработку учебного материала всему коллективу класса. Работа в данном случае осуществляется через непосредственное руководство преподавателя и основывается на тщательно проработанных им программах, содержание которых носит дифференцированный характер.

Организовывать уроки в форме семинаров предпочтительно в таких случаях как: изучение нового материала, при условии, что он доступен для самостоятельной проработки учащимися; при систематизации и обобщении уже имеющихся знаний и умений учеников по изучаемой теме; после проведения вводных уроков-лекций; при проведении уроков, которые посвящены различным способам и методам решения задач, выполнения заданий и упражнений и т.д.

Для проверки усвоения изученного материала в процессе решения задач используются математический диктант, проверочная самостоятельная работа.

На сегодняшний день в практике обучения особенно распространены три подхода к разработке, конструированию и использованию *средств обучения.* Поочередно рассмотрим их.

В *первом* случае, средства определяются как нечто, никак не влияющее на качество усвоения знаний учащимися, а значит и их использование является необязательным, достаточно будет доски, мела, ясного и четкого объяснения учителя. Однако, в данном подходе очевидно прослеживается недооценка роли практической деятельности в усвоении знаний, и наоборот, преувеличение значения механического заучивания, т.н. «зазубривания». В основу берется умственная деятельность, а речь учащихся фигурирует лишь в качестве средства выражения мыслей. Такой подход имеет широкое распространения, но его следует считать морально устаревшим и потерявшим свою актуальность.

Второй подход, напротив, возводит в абсолют роль средств обучения. В данном случае они рассматриваются как главенствующие, единственно способные обеспечить достижение цели, в то время как все остальные элементы (методы, организация, формы и т.п.) должны лишь соответствовать средствам обучения и обуславливаться их спецификой. Такое преувеличение роли средств обучения в образовании можно рассматривать как следствие негативной реакции на предыдущий подход. Учителя, следующие данному принципу, обычно проявляют наибольшее внимание к оборудованию учебного кабинета, постоянно находятся в процессе разработки и изготовления новых средств (приборов, наглядных пособий, лабораторных работ, демонстрационных опытов и т.д.) вместе со своими учениками. Они заслуженно считаются мастерами своего дела, образцами для подражания и при этом гарантируют высокое качество знаний учащихся.

Третья позиция состоит в том, что средства обучения в данном случае рассматриваются, прежде всего, в системе взаимодействия между учителем и учащимися. Они выполняют определенные функции и обеспечивают (вместе с другими элементами) качество знаний и развитие умственных способностей учащихся. Конструирование и использование новых средств обучения обязательно влекут за собой изменение состава действий и операций, осознание нового средства и его объективных свойств, что влечет за собой улучшение качества знаний и повышение умственного развития учащихся [20].

1.3 Особенности формирования учебно-познавательных компетенций при изучении темы: «Тригонометрические функции» в курсе алгебры и начал анализа

В изучении тригонометрических функций в школе можно выделить два основных этапа:

- ✓ Первоначальное знакомство с тригонометрическими функциями углового аргумента в курсе геометрии (8-9 класс).

✓ Систематизация и расширение знаний о тригонометрических функциях в курсе алгебры и начал анализа (10-11 класс).

На первом этапе не доказывается и не уточняется, что изучаемые зависимости являются функциями. Изменение синуса и косинуса при изменении угла доказываются на основе свойств наклонной. Эти понятия достаточно абстрактны для курса геометрии, поэтому усваиваются довольно плохо. Но еще большие трудности вызывает переход к аргументу, большему 90^0. Ведь мы определяли тригонометрические функции через отношение сторон прямоугольного треугольника, а, как известно, в прямоугольном треугольнике не может быть угла с градусной мерой, большей 90^0. Для объяснения этого факта уже на этом этапе приходится рассматривать окружность, и это является своеобразной пропедевтической работой для введения тригонометрических функций числового аргумента с помощью окружности в курсе алгебры и начал анализа.

На втором этапе происходит переход от углового аргумента к числовому. С самого начала курса мы должны рассматривать тригонометрические функции углов любой величины – значит предварительно нужно познакомить учеников с углом как с величиной, способной изменятся от $-\infty$ до $+\infty$. В курсе геометрии такое понятие не фигурировало, следовательно, это необходимо восполнить на втором этапе. Таким образом, возникает необходимость введения числовой окружности, работу с которой целесообразно провести также на втором этапе.

В качестве пропедевтической работы для изучения модели числовой окружности желательно рассмотреть геометрические задачи на нахождение длины дуг четверти окружности данного радиуса, ее трети и половины. Обобщая полученные результаты, необходимо подвести учащихся к тому факту, что для дальнейшей работы выгоднее выбирать окружности именно единичного, а не произвольного радиуса.

В процессе работы с числовой окружностью у учащихся должны быть сформированы следующие умения:

- находить на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженным в долях числа π и выраженным не в долях числа π;

- составлять аналитические записи для дуг числовой окружности;

- определять принадлежность точки какой-либо координатной четверти;

- работать одновременно в двух системах координат – в криволинейной и прямоугольно-декартовой и осуществлять переход от одной системы координат к другой;

- находить координаты точек числовой окружности и отыскивать на числовой окружности точки по заданным координатам;

Для этого целесообразно рассматривать задания следующих типов:

1) Найти на числовой окружности точки $\frac{\pi}{2}, 9\pi, \frac{26\pi}{3}, \frac{-5\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4}$

2) Найти на числовой окружности точки 1, 2, -7, 4.5, -31 ….

3) Определить, каким четвертям принадлежат точки $\frac{21\pi}{4}, \frac{-37\pi}{6}, 10, -95$

4) Отметить на числовой окружности точки t, удовлетворяющие неравенствам: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le t \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

б) $\frac{-\pi}{3} + 2\pi k \le t \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

5) Найти декартовы координаты точек, соответствующих числам $\frac{\pi}{4}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{23\pi}{6}, \frac{-13\pi}{3}$.

6) Найти положительные и отрицательные числа, которым соответствуют точки с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}\right), (-1; 0)$

7) Найти на числовой окружности точки с ординатами (абсциссами) равными $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$, $\frac{-\sqrt{2}}{2}$, 0, -1- абсциссы (ординаты) которых отрицательны, и записать, каким числам они соответствуют.

8) Найти на числовой окружности точки с ординатой (абсциссой) $\frac{\sqrt{2}}{2}$и записать, каким числам они соответствуют.

В процессе работы с числовой окружностью следует обратить внимание на следующие моменты.

В арсенале учителя должно находится как минимум два макета с числовыми окружностями. На первом из них отсчет ведется в положительном направлении с указанием расположения точек 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ …, на втором - в отрицательном с указанием точек -0, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{-2\pi}{3}$ …, причем второй макет желательно вывесить после того, как учащиеся ответят или попытаются ответить на вопрос: «Что будет, если точка будет двигаться не положительном, а в отрицательном направлении?».

Эта мотивационная задача позволяет еще раз провести связь между числовой окружностью и числовой прямой. Ведь на числовой прямой можно было откладывать не только положительные, но и отрицательные значения, причем сколь угодно большие. На числовой окружности можно делать то же самое, но следует учитывать тот факт, что на прямой соответствие между точками и числами взаимно-однозначное, а на окружности у каждой точки бесконечно много имен, отличающихся друг от друга на $2\pi k$, где $k \in Z$.

Это главное отличие учащиеся должны четко понимать и осознавать. Для этого числовую окружность можно сравнить с колесом, а числовую прямую с бесконечной нитью, на которой отмечены точки. Наматывая нитку на колесо, предварительно совместив соответствующие нулевые точки, можно заметить, что точки, отличающиеся на 2π, попадут в одно и тоже место на колесе, благодаря тому, что длина числовой окружности единичного радиуса составляет именно 2π.

Больше всего проблем, связанных с неоднозначностью соответствия между точками и числами на окружности возникает при решении задач вида:

«Найти на числовой окружности точки с ординатой (абсциссой) большей √3/2 и записать, каким числам они соответствуют».

9) Такие неравенства, характеризующие дугу, рекомендуется на начальном этапе составлять в два шага. На первом шаге составить так называемое «ядро» аналитической записи $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$, и только на втором составить общую запись $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$ По этому поводу осмелюсь не согласиться с статьей [10], в который автор пишет, что уточнение «где $k \in Z$» можно опускать, записывая его только в парадных случаях – на контрольных или экзаменационных работах. В большинстве случаев это действительно можно делать совершенно безболезненно, но как быть, если при отборе корней уравнения или неравенства, или при наложении определенных ограничений на функцию, параметр к сможет принимать не все а, например, только положительные или только четные значения?

Учащиеся, привыкшие писать +2πk, не задумываясь над тем, какие значения может принимать параметр к, и в этом случае напишут +2πk, что автоматически сделает их решение неверным.

Это приведет к недопониманию того факта, что, например, множества «4πk, где k∈ Z» и «2πk, где k ∈ 2Z» совпадают. Это, в свою очередь, может породить затруднения при рассмотрении функций с периодом, равным 4π. А ведь таким функциям уделяется немало времени при изучении темы «Тригонометрические функции».

Таким образом, нельзя оставлять недоработанными никакие, даже самые маленькие детали, ведь незначительные с виду недоработки, возникающие при изучении числовой окружности, в процессе изучения самих тригонометрических функций могут стать причиной возникновения больших пробелов в знаниях.

Теперь, когда мы научились работать с числовой окружностью как самостоятельным объектом, можно приступать к введению самих тригонометрических функций.

Не стоит забывать, что определения тригонометрических функций с помощью числовой окружности плохо укладываются в сознании ребят по одной простой причине: на первом этапе определения были даны в геометрической трактовке – как отношения сторон прямоугольного треугольника.

Из психологии известно: «если какое-нибудь важное понятие вводится в первый раз, то ассоциации, сопутствующие ему, врезаются в сознание учащегося чрезвычайно прочно. Последующие впечатления бывают слабее и не могут стереть того обличия, в котором это понятие явилось впервые». [5]

Несмотря на то, что мы уже использовали окружность для введения «новых» определений синуса и косинуса на этапе расширения множества значений, принимаемых углом необходимо еще раз провести взаимосвязь между прямоугольным треугольником и числовой окружностью.

Напомним, что в школьных учебниках этому факту почему-то не уделяется должного внимания, поэтому учителю стоит обратить внимание на то, чтобы при введении тригонометрических функций на этом этапе были озвучены следующие моменты. Рассмотрим числовую окружность единичного радиуса, расположенную в прямоугольно декартовых координатах.

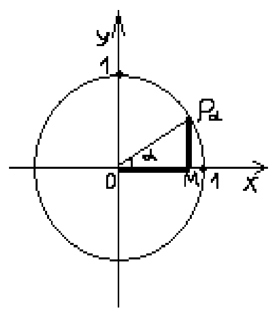


Рис.1 Числовая окружность единичного радиуса, расположенная в прямоугольно декартовых координатах

В положительном направлении от оси OX отложим угол α такой, что $0 < \alpha < 90^0$. Обозначим полученную на окружности точку как P_α. Опустим из точки P_α перпендикуляр на ось OX, получим точку M. Рассмотрим получившийся прямоугольный треугольник OMP_α. $\text{Sin}\alpha$ по определению равен отношению $\frac{MP\alpha}{OP\alpha}$, но радиус окружности OP_α равен единице, следовательно, $\text{Sin}\alpha = MP_\alpha$. Аналогичным образом, $\cos\alpha = OM$. Заметим, что длина OM - это абсцисса точки P_α в прямоугольно-декартовой системе координат, а длина MP_α - ее ордината. Таким образом, синус и косинус угла α определяются через ординату и абсциссу точки P_α, что является более удобным при работе в прямоугольно-декартовой системе координат.

Работая с числовой окружностью, мы уже усвоили тот факт, что так как длина дуги единичной окружности легко выражается через центральный угол, на нее опирающийся, то точку P_α, можно построить и другим способом - откладывая дугу заданной длины. А так как длина дуги – всегда действительное число, значит, от тригонометрических функций углового аргумента легко можно перейти к тригонометрическим функциям числового аргумента.

Сейчас вернемся к наложенным на угол α ограничениям. Угол α принадлежит промежутку от 0^0 до 90^0, а значит и длина дуги лежит между нулем и $\pi/2$. Используя все ту же геометрическую интерпретацию, легко показать, что эти определения можно распространить и на любые углы и числа.

Понятия тангенса и котангенса можно вводить двояко: как отношение синуса к косинусу (косинуса к синусу) и как ординату (абсциссу) точки пересечения касательной к окружности в точке (1;0) ((0;1)) и прямой OP_α.

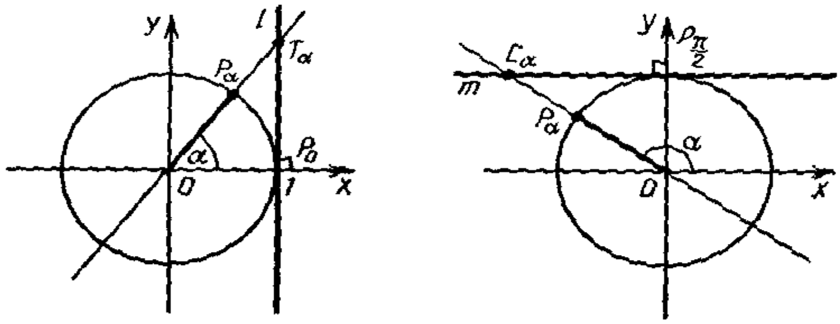


Рис.2

Вообще говоря, определив функции синус и косинус, мы уже не нуждаемся в числовой окружности как средстве для введения понятий тангенса и котангенса. Но раз уж мы взялись работать с этой моделью, то неплохо бы показать, как определить функции тангенс и котангенс, используя только их геометрическое определения (заметим, что выражения «тангенс угла α – это отношение синуса α к косинусу α» и « котангенс угла α – это отношение косинуса α к синусу α» не являются определениями – это уже свойства).

Использование второго подхода поможет нам не только на этапе изучения самих тригонометрических функций, но и на этапе решения тригонометрических уравнений и неравенств. Поэтому целесообразнее использовать именно второй подход, а определение тангенса α как отношение синуса α к косинусу α рассматривать как свойство.

Итак, мы ввели понятия всех тригонометрических функций (которые предусмотрены программой). Но перед тем, как перейти к их исследованию и построению графиков, необходимо проследить, чтобы у учащихся были отработаны следующие навыки:

✓ Нахождение значений всех тригонометрических функций в «главных» точках.

(Для лучшего запоминания значений тригонометрических функций можно использовать следующую вспомогательную таблицу:

α	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin (α)	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos (α)	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Здесь значения синуса и косинуса представлены в наиболее удобной для восприятия и запоминания форме.)

✓ Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

✓ Определение знаков тригонометрических функций в заданных точках.

✓ Упрощение выражений с использованием основного тригонометрического тождества и формул приведения.

✓ Нахождение по заданному значению одной из тригонометрических функций значений всех остальных тригонометрических функций.

Приобретая вышеперечисленные навыки, учащиеся тем самым получают арсенал средств, достаточный для более основательного исследования и построения графиков тригонометрических функций.

Работа по построению графиков и исследованию функций может проводиться двумя способами:

1) Сначала по точкам строится график, а затем с помощью графической интерпретации исследуются все свойства функции

2) Построение графика происходит после исследования функции, а наглядные представления о свойствах учащиеся получают, анализируя поведение функций на числовой окружности.

Наиболее целесообразно применять второй подход, так как при этом подходе, во-первых, все свойства тригонометрических функций иллюстрируются на обеих моделях (на числовой окружности и на графике), а, во-вторых, это является хорошей подготовительной работой для дальнейшего обучения исследованию функций и построению графиков с помощью производной.

Несмотря на то, что анализируя поведение функции на числовой окружности, мы всего лишь иллюстрируем некоторое свойство, не стоит забывать, что иногда «доказательство» с помощью окружности является единственным доступным для школьников способом обоснования некоторых фактов. Хотя некоторые случаи все-таки требуют более четкого обоснования формулируемых утверждений.

Остановимся подробнее на исследовании тригонометрических функций.

1) Область определения.

«Областью определения функции действительного переменного называется множество действительных значений аргумента, при которых функция принимает действительные же значения».

Область определения функций y=sin x и y=cos x – множество всех действительных чисел. Этот факт достаточно легко обосновывается с помощью окружности: каждому действительному числу x соответствует точка на окружности P_x. Каждой точке P_x соответствуют ее абсцисса и ордината, каждая из них - это действительное число. Значит, значения функций y=sin(x) и y=cos(x) для любого действительного x будут действительными числами.

У функций y=tg x и y=ctg x область определения имеет некоторые ограничения. Обосновать это свойство можно исходя из того факта, что

$tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. Тогда областью определения функции $y = tg(x)$ будут все действительные числа, за исключением нулей функции y=$\cos x$. Этот же самый факт можно обосновать и с помощью окружности:

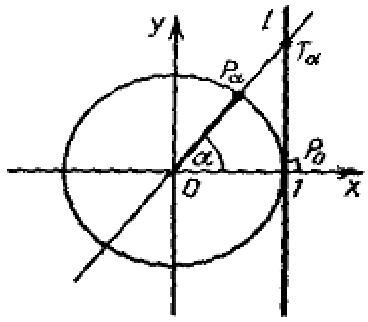


Рис.3

любому действительному числу x соответствует точка на окружности P_x. Если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, то эта точка имеет координаты, отличные от (0;1) и (0;-1), тогда через точки O и P_x. можно провести прямую, которая пересекает касательную к окружности, проходящую через точку (1;0), в некоторой точке T_x. Эта точка имеет ординату, которая является действительным числом. То есть в таких точках функция y=tg x будет принимать действительные значения. Если же x = π/2+πк, к∈Z, то прямая OP_x. будет совпадать с осью ОУ, а, следовательно, будет параллельна касательной к окружности. В этом случае мы не сможем найти точку T_x и ее ординату, а, значит, в этих точках функция y=tg x будет не определена. Таким образом, делаем вывод , что $T_{tg\ x}$ =R/{π/2+πк }, к∈Z. Для функции y=ctg x рассуждения аналогичны, а, значит, учащиеся вполне могут провести их самостоятельно.

Область определения как свойство функций является ко времени изучения тригонометрии уже достаточно хорошо изученным, а процесс ее нахождения уже перешедшим из разряда умений в разряд навыков. Тем не менее, при изучении тригонометрических функций стоит еще раз обратить внимание на отыскание области определения в особенности функций типа:

$y = ctg(x) \cdot tg(x); y = \frac{\sin x \cdot \cos x}{ctg(x)}$, а также кусочно-заданных функций

$$y = \begin{cases} ctg\left(x + \frac{\pi}{2}\right), x < \pi, \\ \frac{1}{(\sin x + 1)}, x \geq \pi \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \sin x, x < \frac{-\pi}{2}, \\ \frac{tg(x)}{(x-7)}, x \geq 2\pi \end{cases}$$

2) Область значений функции.

«Областью значений функции f называется множество, состоящее из всех чисел f(x), таких, что x принадлежит области определения функции f». Четкого обоснования того факта, что областью значений функций y=$\sin x$ и y=$\cos x$ является отрезок [-1;1] ни в одном из действующих школьных учебников не приводится, а вместо этого рассматриваются неравенства -1 $\leq \sin x \leq$ 1 и -1 $\leq \cos x \leq$ 1, которые выполняются для всех значений x. Однако, отсюда совершенно не следует то, что в область значений данных функций входят все точки отрезка [-1;1]. На этот момент стоит обратить особое внимание, дабы разграничить в умах учащихся два совершенно различных свойства: ограниченность и область значений. Рассмотрим пример.

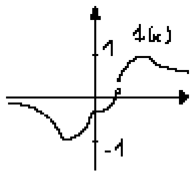


Рис.4

Функция f(x) в данном случае является ограниченной (выполняются неравенства -1 ≤ f(x) ≤ 1), но отрезок [-1;1] не является множеством значений данной функции. Поэтому необходимо все-таки показать тот факт, что любое число из отрезка [-1;1] является значением функции y=sin x (y=cos x) в некоторой точке. Показать это можно хотя бы следующим образом.

Возьмем произвольное действительное число x_1 такое, что -1 $\leq x_1 \leq$ 1. Рассмотрим отрезок [-1;1] принадлежащий оси OX и возьмем точку этого отрезка соответствующую x_1, восстановим из нее перпендикуляр к оси OX. Он пересечет единичную окружность в некоторой точке P_{x_1} Заметим, что x_1 – это абсцисса точки P_{x_1}, а, значит, число x_1 является значением функции y=cos x для точки P_{x_1}. (Аналогично для функции y=$\sin$ x.)

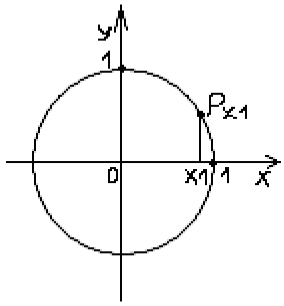


Рис.5

После изучения области значений целесообразно рассмотреть свойство ограниченности функций y=cos x и y=sin x и провести взаимосвязь между этими свойствами не только для тригонометрических, но и для других классов функций.

3) Четность и нечетность.

При изучении свойств четности и нечетности тригонометрических функций необходимо четко обосновать тот факт, что sin(-x) = -sin(x), а cos(-x) = cos(x) для любых действительных значений x. Чаще всего обоснование этого факта сводится к симметричности точек окружности, соответствующих числам или углам t и – t в зависимости от того, на каком этапе происходит обоснование. «Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу –t соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности (то есть относительно оси абсцисс). У таких точек одна и та же абсцисса, а ординаты равны по модулю, но отличаются знаком. Следовательно, sin(-t) = -sin(t), а cos(-t) = cos(t)» [16].

Заметим, что факт симметричности точек t и – t не является очевидным, а значит, сам нуждается в обосновании, провести которое можно, например, рассмотрев треугольник MOP. Обозначим точку пересечения отрезка MP с осью OX за B. Тогда треугольник MOP равнобедренный (OM = OP как радиусы одной окружности), луч OB является биссектрисой угла MOP, а, следовательно, и высотой и медианой треугольника MOP. Тогда точки M и P действительно будут симметричными относительно оси OX по определению. Это и позволяет сделать вывод о значениях синуса и косинуса противоположных углов. После этого обоснование равенств tg (-t) =-tg (t) и ctg (-t) = -ctg (t) не составит никакой трудности.

Далее следует еще раз обратить внимание учащихся на следующий факт. В определениях четных и нечетных функций в явном виде не указано то, что такие функции имеют область определения, симметричную относительно начала координат, но этот факт часто оказывается полезным при решении задач типа «Докажите, что функция y= sin $\sqrt{x}$, не является ни четной, ни нечетной». Используя вышеупомянутый факт и определив, что область определения данной функции не является симметричной относительно начала координат, сразу можно сделать вывод о том, что функция y=sin$\sqrt{x}$, действительно, не является ни четной, ни нечетной, не рассматривая соответствующих уравнений.

Так же полезно определять четность функций, заданных кусочно. Например, определить являются ли следующие функции четными или нечетными:

3) Монотонность.

При рассмотрении свойства монотонности тригонометрических функций в большинстве действующих учебников (кроме [11]) не приводится четкого доказательства возрастания функций y=sin x и y=cos x на промежутках [-π/2;π/2] и [-π;0] соответственно, а обоснование этих фактов проводится с опорой на числовую окружность: «При движении точки по четвертой и по первой четвертям окружности в положительном направлении (от -π/2 до π/2) ее ордината постепенно увеличивается (от -1 до 1), значит, функция y=sin x является возрастающей на этом промежутке» [16]. Более строгое доказательство этого факта приводится с опорой на формулу разности синусов и применимо в случае, когда тригонометрические преобразования изучаются раньше тригонометрических функций, то есть когда формула разности синусов к моменту исследования тригонометрических функций является уже известной (см. [11]). «Пусть -

$\pi/2 \le x_1 < x_2 \le \pi/2$, применяя формулу разности синусов находим $\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos[(x_1 + x_2)/2]*\sin[(x_2 - x_1)/2]$. Из неравенства $-\pi/2 \le x_1 < x_2 \le \pi/2$ следует, что $-\pi/2 < (x_1 + x_2)/2 < \pi/2$ и $0 < (x_2 - x_1)/2 < \pi/2$, поэтому $\cos(x_1+x_2)/2 > 0$ и $\sin(x_2-x_1)/2 > 0$, а следовательно, $\sin x_2 - \sin x_1 > 0$ то есть $\sin x_2 > \sin x_1$» [11]. При этом учителю следует обратить внимание на пояснение того, как из неравенства $-\pi/2 \le x_1 < x_2 \le \pi/2$ получаются неравенства $-\pi/2 < (x_1+x_2)/2 < \pi/2$ и $0 < (x_2-x_1)/2 < \pi/2$.

Это целесообразно проиллюстрировать, изобразив отрезок $[-\pi/2;\pi/2]$. Заметим, что $(x_1+x_2)/2$ не что иное, как среднее арифметическое чисел x_1 и x_2, а, следовательно, принадлежит отрезку $[x_1;x_2]$, который, в свою очередь, целиком лежит в отрезке $[-\pi/2;\pi/2]$, то есть первое неравенство имеет место. Гораздо большую трудность вызывает обоснование второго неравенства. Заметим, что модуль разности $|x_2-x_1|$ - это расстояние между точками x_1 и x_2, а так как обе точки принадлежат одному отрезку $[-\pi/2;\pi/2]$, то расстояние между ними не может превышать длины этого отрезка, то есть π. С другой стороны модуль – функция неотрицательная, более того, в данном случае положительная, так как x_1 и x_2 различны. Имеем $0 < |x_2-x_1| \le \pi$, но так как $x_1 < x_2$, то $|x_2-x_1| = (x_2-x_1)$. Разделив все части неравенства на 2, получим доказываемое неравенство.

Доказательство возрастания функции $y=\text{tg } x$ на интервале $(-\pi/2;\pi/2)$, целесообразнее всего проводить аналогичным образом, используя формулу разности тангенсов (см [11]). В случае же, когда преподавание ведется по учебникам, в которых тригонометрические преобразования изучаются после функций, то есть формула разности тангенсов к моменту исследования функций еще не известна, доказательство лучше проводить, разбив интервал $(-\pi/2;\pi/2)$ на два полуинтервала $[0;\pi/2)$ и $(-\pi/2;0]$. Обоснование возрастания функции $y=\text{tg } x$ на полуинтервале $[0;\pi/2)$ не сложно и приведено во всех учебниках, а доказательство монотонности на втором интервале авторы учебников [16] и [2] почему-то считают сложным и опускают вовсе. Поэтому учителю следует обратиться к учебнику [3], в котором дано довольно строгое, но вместе с тем несложное доказательство: Пусть $-\pi/2 < x_1 < x_2 \leq 0$, тогда $0 \leq -x_2 < -x_1 < \pi/2$. Теперь числа $-x_1$ и $-x_2$ лежат в первой четверти, в которой тангенс возрастает, следовательно $tg(-x_2) < tg(-x_1)$. Так как y=tg x нечетная функция, то $tg(-x_2) < tg(-x_1) \Leftrightarrow -tg(x_2) < -tg(x_1)$, а следовательно $tg(x_1) < tg(x_2)$. Что и означает, что функция y=tg x возрастает на промежутке (-π/2;0], а значит и на интервале (-π/2;π/2). Доказательство монотонности функции y=ctg x целесообразно предложить в качестве задания для самостоятельного выполнения.

5) Нули функции и промежутки знакопостоянства.

Нахождение нулей функций и промежутков знакопостоянства сводится к решению простейших тригонометрических уравнений и неравенств, которые учащиеся рассматривали при изучении числовой окружности и не вызывает затруднений.

6) Периодичность.

Изучению этого свойства необходимо уделить особое внимание, так как учащиеся впервые сталкиваются с периодическими функциями. Для отработки понятия периодичности функции целесообразно использовать следующие упражнения.

1. На рисунке изображена часть графика периодической функции на отрезке [-2;2], длина которого равна периоду функции. Постройте график функции на отрезках [-6;-2], [2;3].

2. Постройте график периодической функции y=f(x), с периодом равным 2, если известно, что $f(x)=x^2/2$ на отрезке [-1;1].

3. Является ли число 16π периодом функции y=sin x? А ее основным периодом?

4. Найти основные периоды функций y=sin(6x), y=cos(x/2), y=sin(kx).

5. Докажите, что если функция y=f(x) является периодической, то и y=k·f(x)+b тоже периодическая.

6. Пусть функция f периодическая, T_1 и T_2 – ее периоды. Докажите, что любое число вида $nT_1 + mT2$, где n, m∈N, также является периодом функции f.

7. Докажите, что функции f(x) = sin x^2 и $\cos x \cdot \cos\sqrt{x}$ не являются периодическими.

8. Докажите, что возрастающая функция не может быть периодической.

Следует обратить внимание учащихся на тот факт, что периодическая функция имеет бесконечное множество периодов, среди которых стараются выделить, если это возможно, наименьший положительный период, который называют основным.

После этого все свойства тригонометрических функций желательно проиллюстрировать на графике и свести в одну таблицу.

Таблица 2. Свойства тригонометрических функций

Свойства	**y=sin(x)**	**y=cos(x)**	**y=tg(x)**	**y=ctg(x)**
Область определения				
Область значений				
Нули функции				
…				

Для дальнейшей отработки навыков по исследованию тригонометрических функций и построению их графиков используют гармонические колебания, которые имеют вид y $=arcsin$(wt+a) и y =arcccos(wt+a). Основной целью введения гармонических колебаний является наглядная демонстрация того, как изменяются свойства функций в зависимости от значения коэффициентов w,t и a. При этом целесообразно использовать задания вида:

1. По графику функций определите задающую ее формулу:

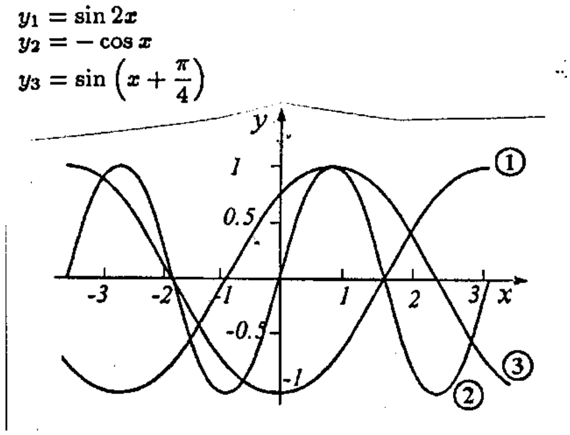


Рис.6

2. Какими свойствами обладают данные функции на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, а на отрезке $[0; \pi]$?

Таблица 3. Свойства тригонометрических функций

	Возрастает	Имеет ровно один корень	Пробегает всё множество значений	Убывает	Не меняет знак
y=cos(x)					
y=cos($\frac{\pi}{2}$)					
y=3cos(2x)					
y=cos(x+$\frac{\pi}{4}$)					
y=2cos($\frac{\pi}{2}$-x)					

Какими свойствами обладают данные функции на данных промежутках?

Таблица 4. Свойства тригонометрических функций

	[$-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]	[0; π]	[-2π;0]	[$-\frac{3\pi}{2}$;- π]	[-π; π]
y=cos(x)					
y=cos(2x)					
y=2cos($\frac{x}{2}$)					
y=cos(x+$\frac{\pi}{2}$)					
y=3cos($\frac{\pi}{4}$-x)					

После того, как мы в достаточной мере хорошо научились оперировать свойствами тригонометрических функций, можно переходить к решению тригонометрических уравнений и к тригонометрическим преобразованиям. Но не стоит центр тяжести при изучении тригонометрических функций смещать в сторону алгебры, то есть не нужно выдвигать на первое место умения, связанные с выполнением тригонометрических преобразований. Эти умения, безусловно, важны и развивают у учащихся комбинаторные, логические и алгоритмические навыки, однако главное в изучении тригонометрических функций уходит при этом в тень. Таким образом, не следует забывать, что основная задача учителя математики – все-таки развитие умственных способностей школьника.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2.1 Плюсы и минусы методик изучения тригонометрических функций в различных школьных учебниках

В настоящее время вопросы тригонометрии изучаются в 10-11 классах в рамках 85 - часового курса «Алгебра и начала анализа». В разных вариантах тематических планов, опирающихся на учебники разных авторов, отводится от 15 до 28 часов, при этом в основном ставятся следующие цели:

- ввести понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса для произвольного угла;

- систематизировать, обобщить и расширить уже имеющиеся у учащихся знания о тригонометрических функциях углового аргумента;

- изучить свойства тригонометрических функций;

- научить учащихся строить графики тригонометрических функций и выполнять некоторые преобразования этих графиков.

Проанализируем с точки зрения реализации вышеперечисленных целей те учебники, которые наиболее распространены в общеобразовательных школах, а именно учебники [16], [2], [3], [11].

Прежде всего, отметим некоторые особенности этих учебников как методических пособий в целом, а не по данной теме. Вообще, данные учебники дают цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начала анализа, отвечают требованиям обязательного минимума содержания образования. Но каждый из них имеет свои особенности. Учебник [16], например, отличается более доступным для школьников, по сравнению с остальными учебниками, изложением теоретического материала, которое ведется очень подробно, обстоятельно и достаточно живым литературным языком, наличием большого числа примеров с подробными решениями. Построение всего курса осуществляется на основе приоритетности функционально-графической линии. Учебник [11] имеет прикладную направленность, содержание отличается большей научностью и близостью к математическому анализу, язык изложения в большей мере научен, чем доступен. Теоретический материал изложен достаточно кратко и лаконично. Учебник [3] также имеет прикладную направленность, но в отличие от [11] ориентирован на физические приложения математических знаний и умений. В конце учебника представлены несколько лабораторных работ, например, «Построение математической модели механического движения». В конце учебника весь изученный материал представлен в виде схем и таблиц, что удобно не только ученику при подготовке к какому-либо контрольному мероприятию, но и учителю при подготовке к уроку или к системе уроков. Также среди достоинств этого учебника стоит отметить и тот факт, что каждая глава открывается вводной беседой, подготавливающей появление новых основных понятий, и заключительной беседой, которая включает в себя сведения, полезные для учащихся, интересующихся математикой.

Ну, а учебник [2] по сравнению с другими изобилует большим количеством цитат и шуточных математических рисунков. Это, несомненно, развивает математический кругозор учащихся, но, что касается содержательной стороны этого учебника, то, по моему мнению, он больше подойдет для обучения математике в профильных (не математических) классах.

Перейдем к анализу изложения конкретной темы «Тригонометрические функции» в данных учебниках. Напомним, что в школьном курсе математики в разные годы использовались разные варианты введения тригонометрических функций: при помощи тригонометрического круга, при помощи проекции и некоторые другие.

В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной окружности. При этом только в [16] уделено достаточное внимание работе с числовой окружностью как с самостоятельным объектом изучения, и это является одним из достоинств этого учебника.

Слишком поспешное введение понятий синуса и косинуса «по окружности» приводит к трудностям при дальнейшем обучении: многие учащиеся испытывают затруднения с геометрическим истолкованием «тригонометрического языка». Таким образом, не получается создать надежный фундамент для успешного изучения материала.

В учебнике [16] на работу с числовой окружностью отводится 5 часов, что составляет почти 20% от 28 запланированных часов на изучение всей темы «Тригонометрические функции». Вообще говоря, здесь рассматриваются две математические модели: «числовая окружность» и «числовая окружность на координатной плоскости». То есть учащиеся обучаются работать одновременно в двух системах координат: в прямоугольной декартовой и криволинейной. Это поможет им в дальнейшем, когда понятия синуса и косинуса угла будут вводиться через координаты.

Здесь не только четко выделяется алгоритм построения точки на числовой окружности, но и проводится аналогия с числовой прямой, с указанием основных сходств и различий в построении точки на окружности и на прямой. Неплохо в учебнике [16] мотивируется и само введение числовой окружности: «В реальной жизни двигаться приходится не только по прямой, но и по окружности. Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью...». К тому же, уже на этапе изучения числовой окружности в неявном виде происходит подготовка к решению простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

Например, рассматриваются задания типа: «Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют», «Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют».

Итак, в учебнике [16], в отличие от остальных учебников, проводится достаточно хорошая пропедевтическая работа для введения тригонометрических функций.

В учебнике [3] также присутствуют элементы работы с числовой окружностью, но не в таком количестве как в [16]. Здесь выделяется отдельный параграф «Вращательное движение и его свойства», в котором рассматриваются такие вопросы как построение точки по заданной мере угла и свойства вращательного движения.

В учебнике [11] в качестве подготовительной работы для введения тригонометрических функций выступает лишь повторение следующих вопросов:

- радианная мера угла (измерение углов в радианах, таблица значений тригонометрических функций (рассматривается исходя из геометрических соображений)),
- основные формулы тригонометрии (основное тригонометрическое тождество, формулы суммы и разности двух аргументов, формулы приведения, формулы суммы и разности синусов и косинусов, формулы двойного и половинного аргументов).

Вообще вопросы тригонометрии в этом учебнике рассматриваются в следующем порядке: тригонометрические преобразования, тригонометрические функции, тригонометрические уравнения и неравенства, в отличие от учебника [16], по которому сначала изучаются функции, затем уравнения и неравенства, а только потом преобразования (как свойства функций).

Обучение же по учебникам [2] и [3] предполагает изучение тригонометрических функций не в начале 10 класса (как это представлено в учебниках [11] и [16]), а в конце него. Авторы учебника [2] предлагают приступить к изучению тригонометрии после изучения показательной и логарифмической функций. Причем, сначала изучаются тригонометрические преобразования, затем - тригонометрические уравнения и только после этого - тригонометрические функции. Такое расположение темы имеет ряд особенностей:

- изучение тригонометрических уравнений подразумевает изучение обратных тригонометрических функций. Таким образом, сначала учащиеся детально прорабатывают понятия арксинуса, арккосинуса и арктангенса, а затем только приступают к работе с синусом, косинусом и тангенсом, хотя с точки зрения логики, целесообразнее сделать наоборот;

- изучение тригонометрических функций после тригонометрических уравнений выкидывает из рассмотрения один из немаловажных методов решения тригонометрических уравнений - а именно графический метод (к тому времени мы ещё не умеем строить графики тригонометрических функций).

В учебнике же [3] же вообще предлагается изучать тригонометрию уже после изучения производной. Это позволяет вычислять приближенные значения тригонометрических функций в точках, тем самым облегчая их исследование, помогая при построении графиков и решении тригонометрических уравнений.

Что касается введения самих тригонометрических функций, то и здесь

каждый из учебников имеет свои особенности. Начнем с определения синуса и косинуса. В учебнике [2] дается следующее определение: «cos x – это абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки P (1;0) вокруг начала координат на угол x, а sin x - ее ордината». В [16]: «Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют косинусом числа t, а ординату точки M называют синусом числа t». Эти два определения, в общем-то, принципиально не различаются, за исключением только того, что в учебнике [2] тригонометрические функции определяются как функции углового аргумента, а в [16] как функции числового аргумента, да еще присутствуют различия в обозначении переменной (заметим, что при работе с числовой окружностью лучше употреблять символы sin (t), cos (t), tg (t), ctg (t), учитывая, что знак x в сознании школьников ассоциируется с абсциссой в декартовой прямоугольной системе координат, а не с длиной пройденного по числовой окружности пути).

Благодаря этому, у учащихся не возникает недоумения по поводу того, почему раньше синусом называли отношение длин катета и гипотенузы, а сейчас откуда-то выплыли какие-то абсциссы и ординаты. В учебнике [16] этот факт хорошо пояснен, но с опозданием в три параграфа, а в учебнике [3] пояснение отсутствует вовсе.

Тангенс же во всех учебниках, за исключением [11], определяется как отношение синуса к косинусу. В учебнике же [11] опять не дается четкого определения тангенса, а приводится лишь геометрическая интерпретация «ордината точки пересечения прямой OP (P - точка на единичной окружности) и касательной к окружности в точке (1;0) равна тангенсу угла».

Определения котангенса авторы дают аналогично определениям тангенса за исключением учебника [2], в котором котангенс почему-то совсем игнорируется и не рассматривается как функция.

Остановимся подробнее на вопросах исследования и построения графиков тригонометрических функций.

В учебнике [16] процесс построения графика и исследования функции происходит следующим образом: уже известные ребятам факты обобщаются и формулируются как свойства функций. Сначала рассматриваются такие свойства функции y=sin(x), как область определения, множество значений, нечетность, возрастание на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ и убывание на отрезке $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, ограниченность сверху и снизу, наибольшее и наименьшее значение. Затем составляется таблица основных значений функции на отрезке $[0;\pi]$, строятся соответствующие точки и плавно соединяются.

Используя свойство нечетности синуса, полученный график отображается относительно начала координат на отрезок $[-\pi;0]$, используя свойство периодичности, график функции достраивается на остальных отрезках длиной 2π. С опорой на построенный график, выделяется свойство непрерывности функции синус и область ее значений. Исследование функции cos ()x и построение ее графика, как и во всех остальных учебниках основывается на том факте, что cos (x) = sin ($x+\frac{\pi}{2}$).

В учебнике [3] построение синусоиды происходит при помощи единичной окружности переносом значения синуса к соответствующим точкам оси ОХ. А затем, после построения графика, еще раз происходит возвращение к свойствам и к тому, как они проявляются на графике. В учебнике [11] синусоида строится подобно тому, как она строится в [3], но все свойства функций за исключением области определения и множества значений рассматриваются в следующей теме «Основные свойства функций», а затем только переносятся на тригонометрические.

Отметим, что в учебниках [16] и [11] не обоснован тот факт, что областью определения функций sin (x) и cos (x) является множество всех действительных чисел. Конечно, этот факт достаточно очевиден, но, тем не менее, учебник пишется не для учителя, а для учеников, а «мера очевидности», как известно, у всех разная. Поэтому не стоит забывать об обосновании даже очевидных фактов, ведь это приучает ребят к столь необходимой при изучении математики логической четкости и аккуратности мысли.

Что касается области значений тригонометрических функций, то ни в одном из учебников нет четкого обоснования данного свойства. Все «попытки» обоснования этого свойства сводятся к рассмотрению двойных неравенств: $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$, которые выполняются для всех значений x. Однако, отсюда совершенно не следует то, что в область значений данных функций входят все точки отрезка [-1;1].

При обосновании свойств четности и нечетности тригонометрических функций доказательство тождества sin (x) = -sin (x) сводится в основном к симметричности точек x и -x, которая также четко не обоснована ни в одном из учебников. Монотонность же тригонометрических функций во всех учебниках, за исключением [11], иллюстрируется с помощью числовой окружности. В учебнике [11] в силу того, что тригонометрические преобразования изучаются перед тригонометрическими функциями, монотонность функции y= sin (x) обоснована более доказательно, но все же некоторые недочеты имеются.

При изучении свойства периодичности авторы учебников [16], [2] и [11] дают следующее определение периодичности: «Функция f(x) называется периодической, если существует такое число T_0, что для любого x из области определения данной функции выполняется равенство *f(x-T)=f(x)=f(x+T).* Число T называется периодом функции *f(x)».* В учебнике [3] равенство *f(x-T)=f(x)=f(x+T)* заменяется менее сильным равенством *f(x)=f(x+T),* но зато снимаются ограничения на x. Здесь *x* может быть любым, а не только из области определения. Заметим, что для функций, областью определения которых является все множество R, эти два определения будут не только равносильными, но и одинаково корректными. Но если применять второе определение к функции y=sin (x), то у учащихся может вызвать затруднения сравнение значений данной функции в точках. Поэтому более целесообразным является использование первого определения.

Проанализируем теперь системы задач, направленные на отработку умений и навыков, которые предусмотрены программой по теме «Тригонометрические функции».

Система задач в учебнике [3] содержит в себе задания на перевод из градусной меры в радианную и наоборот, построение углов на единичной окружности, движение точки по окружности, определение тригонометрических функций, исследование и построение графиков комбинаций тригонометрических функций, нахождение значений тригонометрических функций в некоторых точках и их знаков на некоторых промежутках, нахождение производных комбинаций тригонометрических функций и вычисление приближенных значений тригонометрических функций.

В учебниках [2] и [11] работе со свойствами комбинаций тригонометрических функций уделяется уже гораздо большее внимание, чем в учебнике [3], присутствуют задачи теоретического плана, например, «Докажите, что если функция $y=f(x)$ является периодической, то и $y=kf(x)+b$ тоже периодическая», не остаются без практической отработки и гармонические колебания. В учебнике [2] присутствует еще одна особенность: здесь подобрано большое количество задач с ограничением на переменную *x,* что помогает учащимся в осознании того факта, что «не всякие свойства функции, рассматриваемой на множестве всех действительных чисел, сохраняются при наложении ограничений на область определения этой функции».

Наиболее же полноценной из всех является система задач в учебнике [16]. Здесь, кроме всего уже вышеперечисленного, большое внимание уделено отработке навыков и умений работы с числовой окружностью, присутствуют задачи для работы с тригонометрическими функциями как числового, так и углового аргументов, используются функции, заданные кусочно, отрабатываются умения решать уравнения, содержащие тригонометрические функции, графическим методом.

Вообще, говоря о системе задач этих учебников, следует отметить некоторые недостатки учебника [3]. В идеале, решение каждой последующей задачи должно не только опираться на предыдущую, но и содержать какие-то дополнительные идеи. Здесь же не везде четко прослеживается система, да и по уровню сложности задачи не столь уж разнообразны.

Зато наличие отдельного задачника к учебнику [16] позволило дать в нем полноценную по объему систему упражнений, достаточную для работы в классе, для домашних заданий и повторения. Все задания дифференцированы по блокам, отдельно выделены даже устные и полуустные упражнения, что дает возможность более рационального использования учебного времени.

Таким образом, наиболее удачным учебным пособием в плане изучения темы «Тригонометрические функции» в курсе алгебры и начала анализа является учебно-методический комплект под редакцией А.Г. Мордковича, хотя оставлять без внимания остальные учебники тоже не стоит.

Примеры задач из учебника Мордковича А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11, 2003. 1. (стр. 198) Найти область определения функции. Найдем значения x, при которых выражение $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ не имеет смысла, т.е. значение *x,* при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение sin x + cos x = 0, находим tg x = -1, $x \neq \frac{-\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$ Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $\neq \frac{-\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$

3. Найти все корни уравнения cos (x) = $\frac{-1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leq -x \leq 2\pi.$

Построим графики функций y = cos (x) и y = $\frac{-1}{2}$ на данном отрезке (см. рис.) Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3, являются корнями уравнения cos x = $\frac{-1}{2}$.На отрезке [0; п] корнем уравнения cos$x$= $\frac{-1}{2}$, является число $x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ из рисунка видно, что точки x_2 и симметричны относительно оси Oy, т.е. $x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, а $x_3 = x_2 = 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

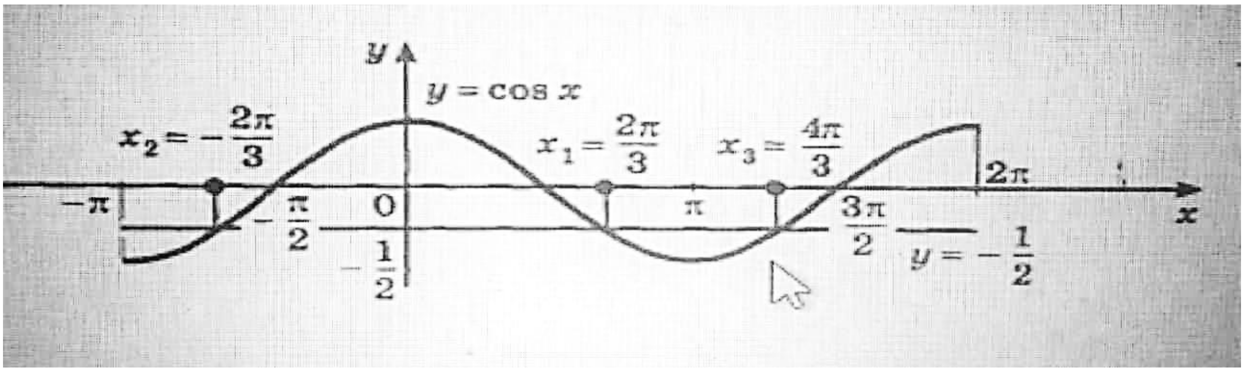


Рис. 7

4. Найти все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

Из рисунка видно, что график функции y = sin (x) лежит ниже графика функции y = $\frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$ и$(\frac{5\pi}{6}; 2\pi]$.

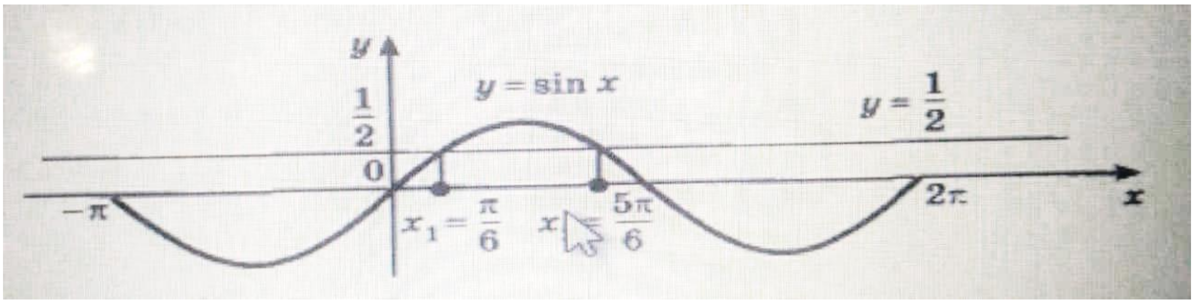


Рис. 8

2.2 Система задач, направленная на формирование учебно-познавательных компетенций учащихся в процессе изучения тригонометрических функций

Представим систему задач по теме «Тригонометрические функции».

Тригонометрические функции. Свойства.	**Тригонометрические функции. Свойства.**
Вариант 2. **1)** Период функции y = sin $\frac{x}{2}$ равен: A) $\frac{\pi}{2}$; B) π; C) 2π; D) 4π; E) 8π **3)** Укажите область определения функции y = 6 + 5cosx. A) D(y) =(-∞; ∞); B) D(y) = [-2π; 2π]; C) D(y) =(-6π+2πn; 6π+2πn), n∈Z; D) D(y) = [-1; 1]. **4)** Найдите множество значений функции: y = 1 + 2 cos 3x A) [-1; 6]; B) [-1; 3]; C) [-1; 5]; D) [1; 3]; E) [-5; 7] **5)** Укажите наименьшее значение функции y = - sinx – 6	**Вариант 1.** **1)** Период функции y = cos $\frac{x}{3}$ равен: A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{2\pi}{3}$; C) 2π; D) 6π; E) 9π **3)** Укажите область определения функции y = 1 – 4sinx A) D(y) = [-4π; 4π]; B) D(y) =(-∞; ∞); C) D(y) =(-4π+2πn; 4π+2πn), n∈Z; D) D(y) = [-1; 1]. **4)** Найдите область значений функции: y = 3 + 4 sin 5x. A) $[-1;6]$; B) $[-1;5]$; C) $[1;7]$; D) $[-1;7]$ E) [-2; 8]. **5)** Укажите наибольшее значение функции y = 7 - cosx
Каждое задание оценивается в 1 балл Критерий оценивания теста: 5 баллов – «5», 4 балла – «4», 3 балла – «3», менее 3 баллов – «2».	**Каждое задание оценивается в 1 балл** Критерий оценивания теста: 5 баллов – «5», 4 балла – «4», 3 балла – «3», менее 3 баллов – «2».

Задание 1. Найдите наибольшее значение функции y=12x−12tgx−18y=12x-12tgx-18y=12x−12tgx−18 на отрезке $[0;\frac{\pi}{4}]$.

Решение:

Найдём производную исходной функции:$y` = (12x)` - 12(\text{tg}\,x)` - (18)` = 12 - \frac{12}{cos^2(x)} = \frac{12cos^2(x) - 12}{cos^2(x)} \leq 0$. Значит, исходная функция является невозрастающей на рассматриваемом промежутке и принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, то есть при x=0. Наибольшее значение равно y(0)=$12 \cdot 0 - 12tg(0) - 18 = -18$.

Ответ: -18

Задание 2. Найдём производную исходной функции: y′=$(0{,}7 - \mathrm{x})' \cos(x) + (0{,}7 - x)(\cos(x))' + (\sin(\mathrm{x})' + (2)' = -\cos(\mathrm{x}) + (0{,}7 - \mathrm{x}) \cdot (-\sin(\mathrm{x})) + +\cos(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - 0{,}7)\sin(\mathrm{x}))$. Найдём нули производной на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$, учитывая, что на этом множестве sin(x)>0. Имеем $(x - 0{,}7)\sin(x) = 0$

$$x - 0{,}7 = 0$$

$$x = 0{,}7$$

Значение x=0,7 принадлежит интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$. При $\mathrm{x} \in (0; 0{,}7)$ выполняется неравенство y′ <0. При этом $\mathrm{x} \in (0{,}7; \frac{\pi}{2})$ выполняется неравенство y′ >0.

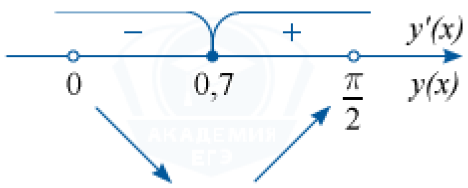


Рис. 9

Отсюда x=0,7 является единственной точкой минимума на рассматриваемом интервале.

Ответ: 0,7

Задание 3. Изобразите на единичной окружности угол поворота, равный 150^0, 210^0, 390^0, 60^0, 145^0, - 45^0, - 90^0, - 180^0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, - $\frac{\pi}{6}$, - $\frac{3\pi}{4}$, - $\frac{7\pi}{6}$.

Задание 4. В какой четверти лежит угол α, если:

$\alpha = 179^0$, $\alpha = 325^0$, $\alpha = -150^0$, $\alpha = -10^0$,

$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, $\alpha = -\frac{10\pi}{3}$.

Задание 5. Выразите в радианной мере углы 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 190^0, 250^0, 320^0, 450^0. Какой формулой необходимо воспользоваться при переводе градусной меры угла в радианную?

Задание 6. Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α. Для каких значений α имеет смысл каждое из выражений: sin α, cos α, tq α, ctq α?

Задание 7. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс угла α в каждой из координатных четвертей?

sin 179^0, cos 410^0, tq 145^0, ctq 288^0, sin $\frac{5\pi}{6}$, cos $\frac{3\pi}{4}$, ctq $\frac{2\pi}{3}$, tq $\frac{\pi}{4}$?

Задание 8. Найдите значение выражения:

а) $2 \sin\pi - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\,\mathrm{tq}\,\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctq}\frac{\pi}{2}$

б) $\sin(-\frac{\pi}{4}) + 3\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{tq}\,\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctq}\,\frac{\pi}{3}$

в) $2\sin\frac{\pi}{4} - 3\,\mathrm{tq}\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctq}\,(-\frac{3\pi}{2}) – \mathrm{tq}\,\pi$

г) $3\,\mathrm{tq}\,(-\frac{\pi}{4}) + 2\sin\frac{\pi}{4} - 3\,\mathrm{tq}\,0 – 2\,\mathrm{ctq}\,\frac{\pi}{4}$

д) $5\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos 0 – 3\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi$

е) $\sin(-\pi) – \cos(-\frac{3\pi}{2}) + 2\sin 2\pi - \mathrm{tq}\,\pi$

ё) $3 – \sin^2\frac{\pi}{2} + 2\cos^2\frac{\pi}{2} - 5\,\mathrm{tq}^2\,\frac{\pi}{4}$

ж) $3\sin^2\frac{\pi}{3} - 4\,\mathrm{tq}^2\,\frac{\pi}{4} - 3\cos^2\frac{\pi}{6} + 3\,\mathrm{ctq}^2\,\frac{\pi}{2}$

Задание 9. Используя определения синуса и косинуса с помощью единичной окружности, выведите основные тригонометрические тождества.

Задание 10. Известно, $\frac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \pi$. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha$ = - 0,6

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

в) $\mathrm{tq}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$

г) $\sin\alpha$, если $\mathrm{ctq}\,\alpha$ = -2

Задание 11. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $0 \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2}$

б) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ и α - угол I четверти

в) $\mathrm{tq}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \pi$

г) $\mathrm{ctq}\,\alpha$ = - 2,5 и α - угол IV четверти

Задание 12. Упростить выражения:

а) $1 - \cos^2\alpha$

б) $\sin^2\alpha - 1$

в) $\cos^2\alpha + (1 - \sin^2\alpha)$

г) $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$

д) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$

е) $(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)$

ё) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

ж) $\cos^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)$

з) $\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tq}\,\alpha$

и) $\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctq}\,\alpha - 1$

к) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \mathrm{tq}^2\alpha$

л) $\mathrm{tq}\,\alpha\,\mathrm{ctq}\,\alpha + \mathrm{ctq}^2\alpha$

м) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + tq\alpha$

н) $\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}$

Задание 13. Докажите, что при всех допустимых значениях β значение выражения не зависит от β:

а) $\frac{1+2\cos\beta\sin\beta}{(\sin\beta+\cos\beta)^2}$

б) $\frac{\sin^2\beta - \cos^2\beta + 1}{\sin^2\beta}$

в) $\frac{1}{1+tq^2\beta}+\frac{1}{1+ctq^2\beta}$ г) $\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\bullet\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$

д) $(\sin\beta+\cos\beta)^2 - 2\sin\beta\cos\beta$ е) $\sin^4\beta+\cos^4\beta+2\sin^2\beta\cos^2\beta$

ё) $\frac{2-\sin^2\beta-\cos^2\beta}{3\sin^2\beta+3\cos^2\beta}$ ж) $\frac{\sin^4\beta-\cos^4\beta}{\sin^2\beta-\cos^2\beta}$

Задание 14. Докажите тождество:

а) $(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\alpha - \sin\beta) - (\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta - \cos\alpha) = 0$

б) $\mathrm{ctq}^2\alpha - \cos^2\alpha = \mathrm{ctq}^2\alpha \cos^2\alpha$

в) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{ctq^2\alpha-tq^2\alpha} = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$ г) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin\alpha$

$\cos\alpha = 1$

д) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$ е) $(1+\mathrm{tq}\alpha)^2 + (1 - \mathrm{tq}\alpha)^2 =$

$\frac{2}{\cos^2\alpha}$

ё) $\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta} = 2\mathrm{tq}\beta$ ж) $\frac{tq\alpha+tq\beta}{ctq\alpha+ctq\beta} = \mathrm{tq}\alpha\,\mathrm{tq}\beta$

Задание 15. Запишите формулы приведения:

а) $\frac{\pi}{2}+\alpha$ б) $\pi-\alpha$ в) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ г) $2\pi-\alpha$

Задание 16. Опишите построение и постройте графики функций:

а) $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})-1$ б) $y = -\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+2$

в) $y = \mathrm{tq}(x - \frac{\pi}{2}) + 1$ г) $y = \mathrm{ctq}(x+\frac{\pi}{3})$

Задание 17. Постройте и прочитайте график функции y = f(x):

а) $f(x) = \begin{cases}\sin x, x\le 0\\ \sqrt{x}, x\succ 0\end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases}-x^2, x\le 0\\ tqx, x\succ 0\end{cases}$

в) f(x) = $\begin{cases} \cos x, x \prec 0 \\ 2x, x \geq 0 \end{cases}$ г) f(x) = $\begin{cases} ctqx, x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, x \succ \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Также разработаны вопросы по теме: «Тригонометрические функции», помогающие сформировать учебно-познавательные компетенции у учащихся.

Вопросы по теме: «Тригонометрические функции».

Стол А

1. Перечислить основные свойства функции *y = sin x.*

2. Что такое числовая функция. Ее область определения, область значений.

Найти область определения функций $y = \dfrac{1}{\cos x}$; $y = \sqrt{2-x}$; $y = tgx \cdot ctgx$.

3. Дать определение точки максимума.

4. Что такое периодическая функция, период функций.

5. Множество значений функции $y = 2 + \sqrt{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}$ является промежуток

а). (–1;1); б). (2;3); в). [–1;1]; г). [2;3].

Стол Б

1. Перечислить основные свойства функции *y = cos x.*

2. Определение убывающей функции на множестве Р. Найти участки убывания на графике функции.

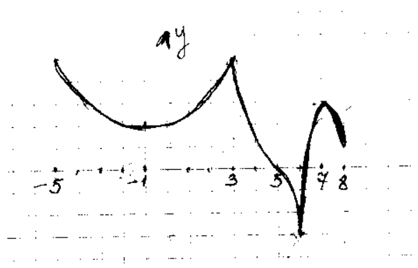


Рис. 10

3. Дать определение четной и нечетной функции. Каким свойством обладают графики этих функций?

4. Записать точку максимума функции $y = \sin x$ на отрезке $[0;2\pi]$.

5. Четной является функция:

а) $y = x \cos x$; б) $y = x^2 \operatorname{tg} x$; в) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; г) $y = \sin x$.

Стол В

1. Перечислить основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x2$. Определение возрастающей функции на множестве Р. Указать участки возрастания на графике функции.

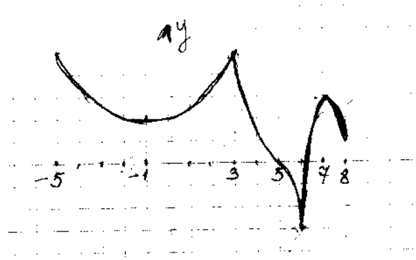


Рис.11

3. Выяснить, какая из этих функций четная, какая нечетная?

а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; б) $y = x \cos x$; в) $y = x + x^5$; г) $y = 3x^2 + x^6$.

4. Наименьшим положительным периодом функции $y = 3\operatorname{tg} x$ является:

а) $y = \pi$; б) $y = 2\pi$; в) $\dfrac{\pi}{5}$; г) $y = 5\pi$.

5. График функции $y = \cos 2x$ получается из графика функции $y = \cos x$

а) сжатием к оси x в 2 раза;

б) сжатием к оси y в 2 раза;

в) растяжением к оси x в 2 раза;

г) растяжением к оси y в 2 раза.

Стол Г

1. Перечислить основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

2. Как построить графики функций y = f(x) + b; y = f(x + a); y = 2f(x);

y = f(2x); $y = |f(x)|$.

3. Дать определение точки минимума.

4. Какой наименьший положительный период имеет функция y = cos x,

y = sin x, y = tg x, y = ctg x.

5. графики функций $y = x^?$, $y = x^?$ имеют вид:

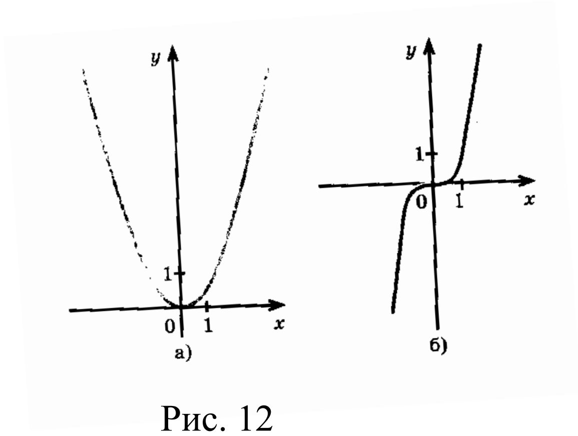


Рис. 12

Стол Д

1. Перечислить основные свойства функции *y = sin x.*

2. Что такое график функции? Преобразование графиков функций на примерах.

3. Что такое экстремум функции? Указать максимум и минимум функции на рисунке:

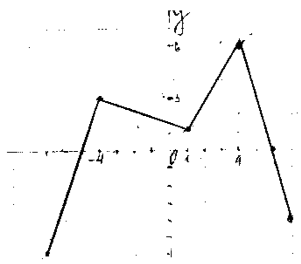


Рис. 13

4. Найти наименьший положительный период функции $y = \sin\frac{x}{2}$;

y = cos (4x + 1); y = tg2x.

5. Множество значений функции $y = \cos x$,

$y = \sin x$, $y = tg\ x$, $y = ctg\ x$.

2.3 Диагностика уровня сформированности учебно-познавательных компетенций учащихся в процессе изучения тригонометрических функций

Подготовленная система заданий была апробирована на занятиях 10 класса МБОУ «Корочанская СОШ им. Д.К. Кромского» г. Короча, Белгородская области в период прохождения педагогической практики. Было разработано и проведено по одному занятию (1 час) в классах базового и профильного уровней обучения на тему: «Тригонометрические функции. Решение задач».

Этапы формирования учебно-познавательной компетенции.

- **1-й этап** – вводно-мотивационный.

  Эффективными являются методические приемы, достаточно впечатляющие для привлечения непроизвольного внимания учащихся, возбуждения у них положительного эмоционального отношения к изучаемому материалу по тригонометрическим функциям и внутренней потребности его познаний. На этом этапе ученики должны осознать, почему и для чего им нужно изучать данную тему «Тригонометрические функции», и изучить какова основная учебная задача предстоящей работы.

- **2-й этап** – открытие математических знаний по тригонометрическим функциям.

  На данном этапе решающее значение имеют приемы, требующие концентрации внимания, проведения, самостоятельных исследований, стимулирующие рост познавательной потребности.

- **3-й этап** – формализация знаний по тригонометрическим функциям.

Основное назначение приемов на этом этапе – организация деятельности учащихся, направленной на всестороннее изучение установленного математического факта, на применение аналитико-систематического метода поиска.

- **4-й этап** – приложения математических знаний тригонометрическим функциям.

Приемы созданий проблемных ситуаций на данном этапе должны активизировать исследовательскую деятельность учащихся и способствовать глубокому усвоению учебного материала.

- **5-й этап** – обобщение и систематизация.

Приемы должны установить связь между изученными математическими фактами, привести знания в систему, осуществить управление самообразованием учащихся.

Экспериментальная работа была направлена на организацию в образовательном процессе системы тригонометрических задач по формированию учебно-познавательной компетенции учащихся.

Учебно-познавательная компетенция реализуется в современной школе, она имеет практическую направленность в творчестве учащихся, в исследовательской деятельности. Во внеурочное время организуется работа по созданию научных проектов по математике. Подводя итог работы можно сделать следующий вывод - учебно-познавательная компетенция может реализовываться силами математики.

Карта самооценки отношения учащихся к учебе.

Предполагаются однозначные ответы – «да» или «нет»

1. Свойства ума:
    - Стремление вникать в суть проблемы,
    - Самостоятельность,
    - Сообразительность

- Изобретательность

2. Отношение к учебе:
   - Ответственное,
   - Избирательное,
   - Равнодушное,
   - Отрицательное.
3. Умение мыслить:
   - Нахожу причины явлений,
   - Делаю самостоятельно выводы из фактов,
   - Хорошо усваиваю теорию,
   - Стремлюсь применять знания на практике.
4. Познавательные трудности:
   - Не всегда понимаю материал по предмету,
   - Трудно применять теорию на практике,
   - Нет усидчивости, терпения,
   - Нет упорства при неудачах,
   - Не в состоянии оценить свои знания,
   - Повторяю одни и те же или схожие ошибки.
5. Умение учиться:
   - Знаю особенности своей памяти,
   - Разумно использую учебное и свободное время,
   - Умею самостоятельно работать с книгой.

Анкета для учителя

Значимость формирования и развития учебно-познавательных компетенций ученика.

1.Необходимо ли современной школе развивать учебно-познавательные компетенции ученика?

2.Ваш теоретический уровень по данной проблеме?

Низкий. Средний. Высокий

3.Ведется ли вами работа по установлению с учеником целей и задач обучения на определенном этапе урока.

4.Предоставляете ли вы право ученику выбрать задания разного уровня?

5.Какие виды деятельности обучающихся используете для активизации их самостоятельной деятельности?

6.На каком этапе урока вы проводите рефлексию?

7.Предлагает ли вы методические рекомендации по выполнению и проверке домашней работы.

8.Каким наработанным материалом по данной проблеме можете поделиться с коллегами?

Как Вы думаете, ученики относятся к вам:

- Как к гению;
- Как к талантливому учителю;
- Как к хорошему учителю и хорошему человеку;
- Как к веселому, доброму другу;
- Как к требовательному и жесткому учителю;
- Как к прохожему;
- Как к человеку, который научить не может;
- Как к грубому, крикливому, самодовольному человеку.

Количество учащихся в классе с базовым уровнем изучения математики: 7. Количество учащихся в классе с базовым уровнем изучения математики: 20. Количество присутствующих на занятии: 27. Учащиеся класса с базовым уровнем изучения математики самостоятельную работу по теме «Тригонометрические функции» написали на:

- «отлично» - 2 человека.
- «хорошо» - 4 человека.
- «удовлетворительно» - 1 человек.

- «неудовлетворительно» - 0 человек.

Результат выполнения самостоятельной работы:

Рис. 14 Выполнение самостоятельной работы (база)

Учащиеся класса с профильным уровнем изучения математики самостоятельную работу написали на:

- «отлично» - 11 человек.
- «хорошо» - 6 человек.
- «удовлетворительно» - 3 человека.
- «неудовлетворительно» - 0 человек.

Результат выполнения самостоятельной работы:

Рис. 15 Выполнение самостоятельной работы (профиль)

Результат работы учащихся определяется не тем, что мы пытались им дать, а тем, что они сами взяли в процессе обучения. Об этом свидетельствуют высокий уровень самостоятельности, самодеятельности учащихся на занятии; наблюдались навыки выполнения работы через организацию коллективной деятельности, отмечалось дружелюбие в отношении друг к другу, взаимопомощь, поддержка; учащиеся продемонстрировали умение применять полученные теоретические знания на практике.

Итоги самостоятельных работ показали, что теоретический материал доступен для понимания и успешного выполнения учащимися подготовленной системы заданий как профильного, так и базового уровней изучения математики. Это доказывается полученными учащимися оценками за самостоятельные работы - большая часть класса выполнила задания на 4 и 5, неудовлетворительных оценок не было.

В ходе исследования было выявлено, что значительная часть учащихся в экспериментальной группе имели низкий, ниже среднего и средний уровень сформированности учебно-познавательной компетенции по теме: «Тригонометрические функции». В связи с этим была поставлена задача - организовать деятельность учащихся по освоению содержания учебного материала, направленную на формирование умений у учащихся осуществлять целеполагание, планирование, классификацию, конструирование нового способа действия, моделирование, проявлять креативные навыки продуктивной деятельности, контрольно-оценочные и рефлексивные умения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существующие традиционные формы организации учебно-познавательной деятельности не отвечают новым требованиям, установленным ФГОС НОО, так как не учитывают необходимости формирования и развития у обучающихся навыков учебной деятельности, а именно они способствуют личностному развитию ученика, формируя личность, способную к самостоятельной познавательной деятельности. Наличие разработанной системы заданий по теме: «Тригонометрические функции» для формирования учебно-познавательной компетенции школьника в урочное и внеурочное время значительно облегчает работу учителя-предметника, помогая ему методологически выстраивать образовательный процесс так, чтобы осуществлять диагностику и коррекцию при индивидуальном подходе по формированию универсальных учебных действий, которые в совокупности составляют учебно-познавательную компетенцию. Поскольку каждый этап решения системы тригонометрических задач в образовательный процесс предполагает постепенное увеличение объема самостоятельной работы учащихся в рамках учебной деятельности, мы можем говорить о постепенном продвижении качественного формирования учебно-познавательной компетенции школьника.

Таким образом, теоретический анализ формирования учебно-познавательной компетенции школьника в процессе решения заданий по теме: «Тригонометрические функции» в условиях образовательного пространства школы находит свои частные подтверждения в результатах нашего диагностического исследования.

Также были проанализированы наиболее распространенные учебники с точки зрения изложения данной темы и обобщили полученные результаты.

Тригонометрические функции являются наиболее удобным и наглядный средством для формирования учебно-познавательной компетенции учащихся.

Преподавание темы «Тригонометрические функции» требует тщательного подбора содержания, средств и методов обучения, то есть разработки эффективной методики. Изучение тригонометрических функций будет более эффективным, в том случае когда: перед введением тригонометрических функций проведена достаточно широкая пропедевтическая работа с числовой окружностью; числовая окружность рассматривается не только как самостоятельный объект, но и как элемент декартовой системы координат; построение графиков осуществляется после исследования свойств тригонометрических функций, исходя из анализа поведения функции на числовой окружности; каждое свойство функций четко обоснованно и все они сведены в систему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоненко Е. Р. Формирование интеллектуально-познавательной компетентности как фактора развития культуры самостоятельной учебной деятельности обучающихся : дис. … канд. пед. наук / Елена Рашитовна Антоненко. – Владикавказ, 2010. – 176 с.
2. Асмолов А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли / А. Г. Асмолов. – М. : Просвещение, 2011. – 159 с.
3. Воровщиков, С. Г. Внутришкольное управление развитием учебно-познавательной компетентности старшеклассников : дис. … д-ра пед. наук / Сергей Георгиевич Воровщиков. – М., 2007. – 416 с.

2. Алексеев А. Тригонометрические подстановки [Текст] / Алексеев А., Курляндчик Л. // Квант. – 2000. - №2. –с. 40 – 42.

3. Бескин Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания [Текст] / Бескин Н.М. - Москва: Учпедгиз, 1950.

4. Болонский процесс: Результаты обучения и компетентностный подход (книга – приложение 1)/ Под науч. ред. доктора пед. наук, профессора В.И. Байденко.- М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2009. – 536 с.

5. Гилемханов Р.Г. О преподавании тригонометрии в 10 классе по курсу В [Текст] / Гилемханов Р.Г. //Математика в школе. 2001-№ 6 -с. 26-28.

6. Горнштейн П.И. Тригонометрия помогает алгебре [Текст] / Горнштейн П.И. // Квант. 1989-№5 – с. 68-70.

7. Забалуева А.И. Формирование учебно-познавательной компетенции студентов вуза: автореф. дис. … канд. пед. наук / А.И. Забалуева. - Таганрог, 2010. - 24 с.

8. Зимняя И. А. Ключевые компетентности как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании / И. А. Зимняя. – М. : Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. – 40 с.

9. Зимняя, И.А. Ключевые компетенции - новая парадигма результата современного образования [Электронный ресурс] / И.А. Зимняя // Эйдос. -2006. - 5 мая. - URL: http://www.eidos.ru/journal/2006/0505.htm.

10. Зимняя И.А., Педагогическая психология: учебник для вузов / И.А. Зимняя. - М.: Университетская книга: Логос, 2008. - 384 с.

11. Зинченко В.П. Психологические основы педагогики / В.П. Зинченко. - М.: Гардарики, 2002. - 431с.

12. Иванов Д.А. Компетентности и компетентностный подход в современном образовании /Д.А. Иванов. - М.: Чистые пруды, 2007. - 32 с.

13. Известия Уральского отделения Российской академии образования.-

14. Ильина М.В. Педагогические условия формирования ключевых компетенций учащихся основной школы. Диссертация кандидата педагогических наук. Калининград, 2011. – 232 с.

15. Комиссарова М. Н. Развитие познавательной компетентности старшеклассников в учебном процессе: дис. … канд. пед. наук / Майя Николаевна Комиссарова. – Магнитогорск, 2006. – 209 с.

16. Константинова С. И. Формирование учебно-познавательной компетентности у учащихся старшей профильной школы : автореф. дис. … канд. пед. наук / Светлана Игоревна Константинова. – СПб., 2006. – 22 с.

17. Коротун А. В. Правовая компетенция социального педагога: теория и практика формирования в вузе / А. В. Коротун ; Урал. гос. пед. ун-т ; Ин-т социал. образования. – Екатеринбург, 2014. – 210 с.

18. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе [Текст] / Мордкович А.Г. //Математика в школе. 2002 - № 6 – с.32-38.

19. Остапенко С.И., Мишустин А.И. Формы, методы и средства обучения тригонометрическим функциям в курсе алгебры основной школы. Наука и образование: отечественный и зарубежный опыт : международная научно-практическая конференция (21 декабря 2018 г. Белгород): сборник статей – Белгород: Издательство ООО «ГиК», 2018 – 427 с.

20. Рослякова С. В. К вопросу о структуре познавательной компетентности / С. В. Рослякова // Актуальные задачи педагогики : материалы II междунар. науч. конф. (г. Чита, июнь 2012 г.). – Чита : Молодой ученый, 2012. – С. 77–81.

21. Сергеева Т.В. О формировании образовательных ключевых компетенций учащегося основной школы на примере обучения математике/ Ярославский педагогический вестник. – 2009 - №4.

22. Темняткина О.В. Формирование ключевых компетенций у школьников

23. Форкунова Л.В. Ученическое модельное исследование: от замысла до воплощения/ Л.В. Форкунова, М.В. Шабанова. Архангельск: Поморский университет, 2010 – 101 с.

24. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностно ориентированной парадигмы образования / А. В. Хуторской // Народное образование. – 2003. – № 2. – С. 58–65.

25. Читаева Ю.А. Формирование ключевых компетенций учащихся на основе национальных стандартов профессионального образования (Европейский Союз и Россия). Автореферат на соискание степени кандидата педагогических наук. М.2009.

26. Колмогоров А.Н., Алгебра и начала анализа 10-11 [Текст] Учебник - Москва: Просвещение, 2012.

27. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11[Текст] / Ш.А. Алимов // Учебник - Москва: Просвещение, 2012.

28. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 [Текст] /А.Г. Мордкович// Учебник- Москва: Мнемозина, 2010.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА УРОКА

Тема: Преобразование графиков тригонометрических функций

1.	**Класс** 10
2.	**Тема и номер урока в теме** Урок № 27. Преобразование графиков тригонометрических функций.
3.	**Базовый учебник** А.Г. Мордкович

4. **Цель урока:** Создать условия для возникновения потребности включения в деятельность исследования изменения графиков тригонометрических функций в зависимости от его преобразования.
5. **Формируемые предметные результаты:** уметь строить графики функций с помощью преобразований ранее изученных функций, определять функцию по её графику.

Формируемые метапредметные результаты: определение общей цели и путей ее достижения; умение договариваться о распределении функций и ролей в совместной деятельности; осуществлять взаимный контроль в совместной деятельности, адекватно оценивать собственное поведение и поведение окружающих;

- личностные универсальные учебные действия: развитие самостоятельности и личной ответственности за свои поступки, в том числе в информационной деятельности, на основе представлений о нравственных нормах, социальной справедливости и свободе

-регулятивные универсальные учебные действия:

-познавательные универсальные учебные действия

10.Тип урока: урок-исследование

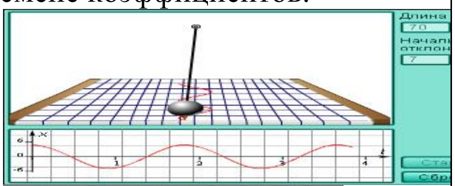
11.Формы работы учащихся:

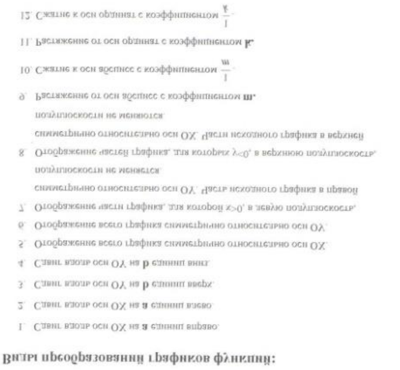
12.Структура и ход урока

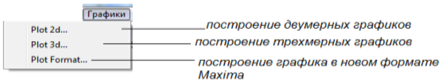
СТРУКТУРА И ХОД УРОКА

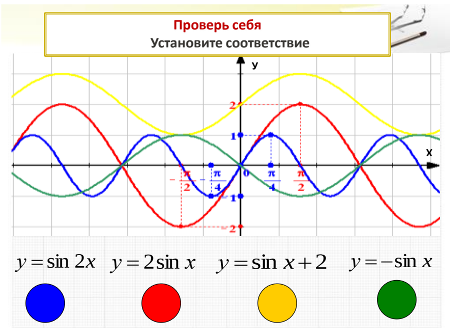
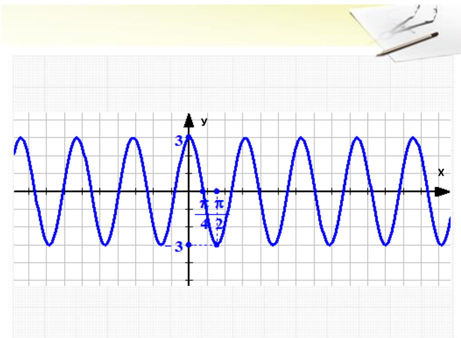
Этап урока	**Деятельность учителя** *(с указанием действий со специальными программными средствами, например, демонстрация)*	**Деятельность учащихся**	**Формируемые УУД**

Этап мотивации к учебной деятельности	Китайская пословица гласит: “ Я слушаю – я забываю, Я вижу - я запоминаю, Я делаю – я усваиваю» Вступительное слово учителя.	Учащиеся готовы к началу работы	*Коммуникативные УУД* – Строят план достижения цели, определяют средства. *Регулятивные УУД* – Настраиваются на работу, проверяют, все ли приготовили, садятся

Этап актуализ ации	На экране демонстрируются графики тригонометрических функций. Кроме свойств и графиков тригонометрических функций вы должны знать, что функции y = sin x и y = cos x многое помогают объяснить в жизни.	Учащиеся разбиваются на две команды и между ними «дуэль», на которой представители команд по очереди задают вопросы по представленному в данный момент на слайде графику функции. Примеры приводят учащиеся. 1.Синусоида сердечного ритма здорового человека.	*Познавательные УУД* - Доказывать, аргументировать свою точку зрения . *Коммуникативные УУД* - - извлечение из текстов необходимой информации; *Регулятивные УУД* - По мере необходимости исправляют, дополняют, уточняют выступления.
		Графиком гармонического колебания является синусоида, вид которой меняется при смене коэффициентов.   Эти явления изучает оптика, которая охватывает все стороны нашей практической деятельности. А законы оптики описываются с помощью тригонометрических функций.	

Этап пробного учебного действия.	Какие преобразования с графиками функций вы знаете? На экране - виды преобразований. Можно ли данные преобразования выполнять для тригонометрических функций,  как вы думаете? Какая цель нашего урока?	Учащиеся комментируют ответы. Учащиеся формулируют цель урока, планируют свои учебные действия для дальнейшей работы.	*Познавательные УУД* – умение искать и выделять главное в полученной информации. *Коммуникативные* – умение отстаивать свою точку зрения. *Регулятивные УУД* - по мере необходимости исправляют, дополняют, уточняют выступления.

Этап реализации проекта и первичного закрепления.	Раздаются карточки с различными преобразованиями тригонометрических функций. Учитель предлагает учащимся познакомиться с элементами построения графика в программе Maxima. Перед выполнением задания, учитель задает вопросы о СКМ, а именно основных функциях программы Maxima, с которыми ребята уже познакомились. Функция: plot2d - построение двумерных графиков  Открываем программу, пишем в текстовом формате *Построение графиков тригонометрических функций.* **Задание.** **1) y = tg x +2;** **2) y = sin(x - 2);** **3) y = - 3sin(-2x)** **4) y = 0,5 cos(x/2) 5) y = cos x - 2**	Получают карточки с заданиями. Изучение новой функции программы Maxima. Работа в парах. Для построения графиков используют полученные знания. Учащиеся, используя программу, выполняют построение графиков функций с фиксированием результатов в тетради. Фронтально проверяют полученные результаты и формулируют совместно выводы.	*Познавательные УУД* – самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера *Коммуникативные* – умение отстаивать свою точку зрения, взаимоконтроль, взаимооценка. *Регулятивные УУД* - соотнесение выявленной учебной информации с собственными знаниями и умениями; принятие решения об использовании помощи.

Этап самостоятельной работы с самопроверкой	 	Учащиеся в группах выполняют задание по определению функции по заданному графику. Затем, проверяют результат с помощью программы Maxima.	*Познавательные УУД* - установление причинно-следственных связей *Коммуникативные УУД* – взаимоконтроль, взаимооценка, инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации *Регулятивные УУД* - оценивание результатов выполненной деятельности
Этап рефлексии	Продолжи фразы: Сегодня на уроке я узнал…….. Теперь я могу…………… Полученные знания мне пригодятся ……… Оцени себя на уроке. Запись домашнего задания по вариантам.		*Регулятивные УУД* - Оценка результатов работы *Коммуникативные УУД* - Слушать собеседник, строить понятные для собеседника высказывания

Приложение 2. Сравнительные данные и результаты опросов учащихся

«Работа над тригонометрическими задачами»

Опрос проводился с одним и тем же классом дважды: в октябре 2018 года и в декабре 2018 года.

Количество опрошенных: 20 (100%) и 18 (90%)

Цель опроса: исследовать эффективность применения системы задач по теме: «Тригонометрические функции» при формировании учебно-познавательных компетенций старшеклассников.

Содержание опроса.

Старшеклассникам было предложено выбрать вариант ответа на каждый из предложенных вопросов.

1. Испытываете ли вы сложности при решении задач по теме: «Тригонометрические функции»:

- Не испытываю- 3
- Испытываю небольшие затруднения-2
- Мне сложно-1
- Не могу сказать-0

2. Умеете ли вы использовать несколько способов решения задач по теме: «Тригонометрические функции»:

- Умею-3
- Испытываю небольшие затруднения-2
- Испытываю большие затруднения-1
- Не могу сказать-0

3. Умеете ли вы выражать свои мысли, доказывать свои идеи при решении задач по теме: «Тригонометрические функции»:

- Умею-3
- Испытываю небольшие затруднения-2
- Испытываю большие затруднения-1
- Не могу сказать-0

4. Умеете ли вы работать самостоятельно, делать выбор, принимать решение:

- Умею-3
- Испытываю небольшие затруднения-2
- Испытываю большие затруднения-1
- Не могу сказать-0

5. Умеете ли вы работать с задачами повышенной сложности по теме: «Тригонометрические функции»:

- Умею-3
- Испытываю небольшие затруднения-2
- Испытываю большие затруднения-1
- Не могу сказать-0

6. Как вы себя ощущаете при работе в группе:

- Легко и комфортно-2
- Я не хочу работать в группе-1

№	Вариант ответа	Октябрь 2018	Декабрь 2018
1	Я не испытываю сложностей при решении задач по теме: «Тригонометрические функции»		
2	Я умею использовать несколько способов решения задач по теме: «Тригонометрические функции»		
3	Я умею выражать свои мысли, доказывать свои идеи при решении задач по теме: «Тригонометрические функции»		
4	Я умею работать самостоятельно, делать выбор, принимать решение		
5	Я умею работать с задачами повышенной сложности по теме: «Тригонометрические функции»		
6	Мне легко и комфортно работать в группе, в команде