Научно-практический электронный журнал
Оригинальные исследования (ОРИС), *ISSN 2222-0402*
www.ores.su
original-research.ru

УДК.372.851:37.03

О ДЕГРАДАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В МИРЕ И О МЕРАХ ПОВЫШАЮЩИХ ИНТЕРЕС К МАТЕМАТИКЕ

Московкин Владимир Михайлович
доктор географических наук
директор Центра развития публикационной активности
профессор кафедры мировой экономики
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Белгород, Российская Федерация, 308015, ул. Победы 85
moskovkin@bsu.edu.ru
ORCID:0000-0001-5587-4133
SPIN-код: 2719-8360

Аннотация

В статье рассмотрен процесс деградации математического образования в мире, в целом, и в России, в частности, обсуждены причины этого процесса. Предложен комплекс мер, который позволит повысить интерес к математике среди школьников и студентов.

Ключевые слова: математическое образование, логическое мышление, глобализация, деградация, Бурбаки, Колмогоровская реформа, ЕГЭ, софизмы, В.И. Арнольд, А.П. Киселёв.

ON DEGRADATION OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE WORLD AND ON MEASURES INCREASING INTEREST IN MATHEMATICS

Vladimir M. Moskovkin
Doctor of Geographical Sciences
Director of the Center for the Development of Publication Activity
Professor of the World Economy Department
Belgorod State National Research University
Belgorod, the Russian Federation, 308015, Pobeda St., 85
moskovkin@bsu.edu.ru
ORCID: 0000-0001-5587-4133
SPIN Code: 2719-8360

ABSTRACT

The article discusses the process of degradation of mathematical education in the world, in general, and in Russia, in particular, the reasons for this process are discussed. A set of measures is proposed that will increase interest in mathematics among schoolchildren and students.

Key words: mathematical education, logical thinking, globalization, degradation, Bourbaki, Kolmogorov's reform, USE, sophisms, V.I. Arnold, A.P. Kiselev

В связи с процессами глобализации, которые требуют унификации и упрощения систем образования, уровень математического образования на всех уровнях за последние 20-30 лет резко снизился во всём мире, за исключением небольшого числа стран. Дело в том, что глобализированным игрокам не нужны суверенные государства с развитыми системами образования, не нужны в большом количестве думающие люди, а нужны только винтики, обслуживающие их бизнес и политические процессы.

В Соединённых Штатах сами американцы говорили "No star wars – no mathematics". Эти слова выдающейся математик современности, вице-президент Международного математического союза (1995 – 1998), академик АН СССР и РАН Владимир Игоревич Арнольд (1937 – 2010) комментировал следующим образом: "Тот прискорбный факт, что с (временным?) прекращением военного противостояния математика, как и все фундаментальные науки, перестала финансироваться, является позором для современной цивилизации, признающей только "прикладные" науки, ведущей себя, совершенно, подобно свинье под дубом" [1]. Слово прикладные Арнольд взял в кавычки, так как был солидарен с Луи Пастером (1882 – 1895), который говорил, что нет прикладных наук, а есть приложения науки. Именно эти приложения, на наш взгляд, сейчас чрезмерно без всякой нужды финансируются, невзирая на то, какой ущерб они приносят человеку и окружающей среде. Главные приоритеты сейчас – нанотехнологии, биотехнологии, информационно-коммуникационные технологии, а не те фундаментальные науки, которые лежат в их основе.

Далее, Владимир Арнольда продолжает: "Планируемое во всех странах подавление фундаментальной науки и, в частности, математики (по американским данным, на это им потребуется лет 10 – 15), принесёт человечеству (и отдельным странам) вред сравнимый с вредом, который принесли костры инквизиции западной цивилизации (и Испании)". Эти слова В.И. Арнольд писал в 1997 году в статье для журнала "Математическое образование"[1], а свою статью в газете "Известия" через полгода он так и назвал "Математическая безграмотность страшнее костров инквизиции" [2].

Все знают, что для занятий серьёзной математикой, профессионалу –математику, кроме ручки и чистого листа бумаги ничего не надо, поэтому как пишет В.И. Арнольд бюджет отделения математики РАН в 40 раз меньше бюджета физических отделений, более того по словам секретаря этого отделения, президента Международного математического союза (1987 – 1990), академика АН СССР и РАН Людвига Дмитриевича Фаддеева (1934 – 2017), затраты СССР на математику в год составляли стоимость одного танка, а затраты современной России – стоимости примерно одной десятой танка в год [1]. Всё это писалось в конце 90 – годов, а сейчас уже просто нет преподавателей в школах и вузах, которые могли бы готовить мыслящих математиков. И это настоящая катастрофа.

Богатый Запад, разваливая математическое образование во всём остальном мире, и особенно в России, ставя цель свести на нет процент мыслящих в ней людей, уничтожал и у себя математическое образование под напором транснационального капитала, но он всегда мог импортировать лучших математиков, а также любых других учёных, из-за рубежа. Читаешь зарубежные статьи в разных областях знаний, смотришь научную хронику на телеканалах и видишь, что науку там делают азиатские исследователи.

В.И. Арнольд писал, что на грани последних двух веков от 1 до 2% американских школьных учителей в зависимости от штата могут разделить дробь на дробь, а студенты американских вузов уже не могут сложить две простые дроби, складывая отдельно их числители и знаменатели деля первую сумму на вторую [3]. Но если вы не умеете оперировать с дробями, то вы не можете делать алгебраические преобразования, а, следовательно, вычислять простейшие производные и интегралы, а отсюда и решать дифференциальные уравнения и так как далее. Поэтому обучение высшей математики в США и в самых развитых странах мира, например, во Франции, сводится к зубрежке табличных производных и интегралов, или выискиванию их с помощью смартфонов.

Даже если находится такой преподаватель, который попытается объяснить студентам выводы простейших производных и интегралов, то ничего из этого не получается, так как студенты не знают азов арифметики.

Автор этой статьи, лет пять назад настолько был поражён описанием В.И. Арнольда ситуации с математических образованием в США и отсутствием там министерского стандарта по вычислению дробей, что разыскал в сети Интернет такой стандарт и увидел, что в нём мелким шрифтом без всяких комментариев было показано, как приводить дробь к общему знаменателю [(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/bd]. Похоже, что напористость В.И. Арнольда и его борьба с математической безграмотностью в мире в качестве вице-президента Международного математического союза возымела результат.

Он привёл слова Анри Паункаре (1854 – 1912) о том, что есть только два способа научить дробям - разрезать (хотя бы мысленно) либо пирог, либо яблоко, так как при любом другом способе обучения (аксиоматическом или алгебраическом) школьники предпочитали складывать числители с числителями, а знаменатели со знаменателями [1]. Но это был 19 век, а в советское время учителя начальных классов умели так объяснять сложение дробей, что у большинства школьников проблем с этим не было. Сейчас же, мы, вместе с Западом, вернулись в 19 век.

Помимо глобализаторов, большую лепту в разрушение математического образования в мире внесли и сами математики, началось это с внедрением идеологии известной французской школы Бурбаки, которая основывалась на теории множеств, носила чрезмерно формализованной характер и игнорировала стандартные разделы математики, без которых не может происходить реальный научно-технический прогресс. Но, несмотря на общепризнанный вклад этой школы (группы) в развитие абстрактной математики, её авторитет также способствовал внедрению её идеологии в процесс обучения в школе и университетах, и даже в политику.

Как пишет В.И. Арнольд, выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой и характеризовалось изобилием не мотивированных определений и непонятных (хотя логически безупречных) доказательств. В то же время, при преподавании математики наблюдается отсутствие примеров, отсутствие чертежей и рисунков, а также вне математических приложений и мотивировок понятий математики [1]. Доходило до абсурда, когда молодой французский студент четвертого курса, проведя сложные преобразования, пришел к правильному численному критерию, чтобы показать асимптотическую сходимость интеграла, который был равен 4/7, но не мог определить больше или меньше это число единицы! Он хорошо слушал курсы по динамическим системам и дифференциальным уравнениям, который читал В.И. Арнольд, но простейшей арифметике в школе его учили бездарные дидактики и компьютерщики [3].

В этой же статье он привёл также следующий шедевральный пример политического свойства. Когда Комитет по подготовке изменений в школьные стандарты Калифорнии во главе с Нобелевским лауреатом по химии (1951) Гленом Сиборгом (1912 – 1999, иностранный член АН СССР (1971)) принял решение о необходимости требовать при поступлении в университет умения делить число 111 на число 3 без компьютера, то этот уровень требований оказался для школьников не посильным.

Это требование просто умиляет. Любой советский школьник в уме бы посчитал и сказал, что результат этого деления равняется 37. Но как это возмутило политиков, которые не представляли, как это можно делить число на число без калькулятора? Вашингтонские федеральные власти потребовали отменить этот антиконституционный расистский стандарт.

Один из сенаторов, по словам В.И. Арнольда, заявил, что никогда не позволит, чтобы кто бы то ни было в какой - бы то ни было части США учил кого - то чему - либо, чего этот сенатор не понимает, например, делению 111 на 3. Другой сенатор объявил, что целью введения этих калифорнийских стандартов, требующих, например, в курсе физики знакомства с тремя фазовыми состояниями воды, вместо двух общефедеральных, является расистское препятствие к поступлению в университет чёрных, ибо ни один из них никогда не поймёт, что такое этот ваш водяной пар, у которого нет ни цвета, ни запаха, ни вкуса. Тут же В.И. Арнольд приводит заключение, опубликованное в 1781 году третьим Президентом США Томасом Джефферсоном (1743 – 1826) о том, что ни один негр ни когда не поймёт ни геометрию Евклида, ни какого – либо из его современных толкователей, а он знал, что говорил, так как воспитывал много детей – негритят [3].

Сейчас во время шествия Black Revolution по США начинают с новой силой бороться с математикой, что можно увидеть из американских СМИ. Так власти штата Орегон увидели в традиционном курсе математики “идеи превосходства белой расы”. Объективность и сосредоточенность на правильном ответе теперь считается расизмом, вместо этого власти хотят ввести новый курс “этноматематики”, как сообщал 19 февраля 2021 г. телеканал Fox News. И это в штате, в котором только 1, 6% афроамериканцев (не дай бог сказать негров) и 8% латиноамериканцев. А что творится в южных штатах и говорить не приходиться.

В другой своей статье В.И. Арнольд приводит пример о том, что министр образования Франции очень возмущался не умением лучших школьников Парижа сложить числа 2 и 3, они отвечали, что два плюс три равняется три плюс два, так как сложение коммутативно. Тогда министр сказал, что учителей, которые этому учат надо гнать из школ, а считать детей пусть учат кто – угодно другой – химик, инженер и т. п. Но “бурбакизм” настолько был силён во Франции, что самого министра сняли с должности, а министерство раздели на два не зависимых департамента [4].

Другие вопиющие примеры о ситуации с математикой в этой стране описывал доктор физико-математических наук Виктор Степанович Доценко, который 5 лет преподавал математику и физику в одном из лучших университетов Парижа (Paris VI) [5]. Он также, как и Арнольд, отмечал, что операции с дробями эта самая не подъёмная часть математической подготовки студентов (до 90% не умеют с ними обращаться), также многие из студентов не могут складывать натуральные числа, у довольно большого процента студентов операция возведения любого числа в минус первую степень обращает это число в ноль, три шестых у многих студентов равняется одной трети.

Этот бред у них был заучен со школы, они ничему не удивляются, когда им скажешь, что три шестых равняется одной второй, они равнодушно скажут – хорошо. Поэтому автор назвал свою статью “Пятое правило арифметики”, что подразумевает, что школьники и студенты воспринимают на веру, не задумываясь, всё то, что скажут преподаватели. Одна студентка посчитала на калькуляторе радиус Земли, который получился равным 10 мм и ничему не удивилась, когда её попросили пересчитать, тогда она нажала на правильные кнопки и получила правильный ответ, но ей было всё равно [5].

Насколько можно понять, вузовские преподаватели, зная, что школьники после БАК (аналог российскому ЕГЭ, говорящий о том, что школьник поступает учиться на бакалавриат) приходят к ним с огромными пробелами и их уже не возможно ничему научить, идут у них на поводу, заранее зная, что они не решат ни одну вузовскую задачу. Поэтому они полагают, что и не стоит сильно напрягаться, а на экзаменах, также как и на БАКе, как отмечал В.С. Доценко, они прекрасно решат задачи с помощью умных калькуляторов.

Учить же вал студентов надо, иначе если всех их выгнать за бездарностью, то и профессора останутся без работы. Кроме того, и сами профессора сильно подвержены влиянию школы Бурбаки, а из концепций этой школы возникают самые нелепые выводы.

Представители этой школы полагают, что если даны два произвольных высказывания А и В, и если оба они верны, то из А вытекает В. На что В.И. Арнольд, как он пишет, на свой непросвещенный взгляд, из утверждения дважды два четыре, следует, что Земля вращается вокруг Солнца. Студента обученного таким образом, уже невозможно учить какой-либо естественной науке и такое мракобесие, как отмечает В.И. Арнольд, полностью уничтожает естествознание [4].

Когда В.С. Доценко предложил студенту решить уравнение $5x + 3 = 0$, то тот исписал целую страницу рассуждениями про структуру и счётность множества решений такого типа уравнений, но самого решения получить не смог. На занятиях по математическому анализу понятие производной функции вводится как штрих над ней, а интеграл от функции - как закорючка перед ним, вместе с некоторыми формальными преобразованиями над ними [5].

Хорошо известен софизм. Любое число равно любому другому числу. Суть его в следующем. Пусть имеется равенство $a = b + c$, умножим обе его части на $(a – b)$ и тогда после простых преобразований придём к равенству $a(a – b – c) = b(a – b – c)$, откуда следует, что $a = b$. Но $a – b – c = 0$, а на ноль делить нельзя. Это в нормальной математике нельзя, а у “бурбаков” ноль это положительное и натуральное число, поэтому им всё можно. Отсюда и следует, похоже, этот математический бред, который наблюдается в странах подверженных большому влиянию “бурбакизма”.

Но у “бурбаков” то же были свои учителя, такие как Мишель де Монтень (1533 – 1592) и Рене Декарт (1596 – 1650), о чём прекрасно написал В.И. Арнольд в своей “Математической дуэли вокруг Бурбаки” [4]. Помню, какую популярность имели многотомные переводы сочинений Никола Бурбаки в СССР, когда каждый продвинутый математик или физик теоретик считал за честь иметь их на своих книжных полках, но читал ли он их, это уже другой вопрос. Тогда была мода на эти сочинения.

Если протестировать слово “Бурбаки” в аналитическом инструменте NGram Viewer, то мы увидим, что пик популярности этого феномена в СССР пришёлся на двадцатилетний интервал времени – от середины 60 – х до середины 80 – х годов 20 века. И этот феномен, также как и в других странах, оказал негативное влияние на математическое образование в нашей стране.

Вспомним Колмогоровскую реформу школьной математики семидесятых годов, которой предшествовал двадцатилетний период подготовки. Она делалась из хороших побуждений в эйфории от советских достижений в науке и технике, апогей которых приходился на запуск человека в космос. За эту реформу взялись наши лучшие математики, которые, не зная психологии детей и возможности усвоения ими математических знаний в зависимости от их возраста, начали писать заумные учебники не понятные не только детям, но и их учителям.

Итоги реформы стали пожинать в конце 70 – х годов, на что стали жаловаться вузовские математики, получив себе в обучение не обучаемых первокурсников. Детально эта реформа и подготовительный период к ней, вместе со всеми перипетиями и действующими лицами, описана в работах [6, 7]. Приведём заключительную часть статьи И.П. Костенко [7]: "Реформа-70» изгнала из учебников педагогику и методику, изгнала Ученика. Она ответственна за деградацию мышления, а значит, и личности учащихся. Именно она привела учащихся к массовому отвращению от учебы. Она породила государственную ложь (так называемую «процентоманию»), которая заблокировала все возможности исправления ситуации, запустив прогрессирующую коррупцию в сферу образования. До сего дня наша школа живет под тяжким бременем этой реформы. Один из главных уроков, который надо извлечь из проведённого исторического анализа, следующий: качество обучения тесно связано с сохранением отечественной педагогической традиции, её недопустимо прерывать. В математике эта традиция сконцентрирована в учебниках А.П. Киселёва. Следовательно, необходимым (хотя, наверное, недостаточным) условием возрождения нашего математического образования является возвращение в школу Киселёва". Кстати, об этом также писал и В.И. Арнольд.

Андрей Петрович Киселёв (1852 – 1940) – выдающейся русский и советский педагог математик, учебники которого по всем разделам математики были стабильными на протяжении более шестидесяти лет. Это только в советское время, а до революции считались лучшими его "Систематический курс математики для средних учебных заведений" (1884), "Элементарная алгебра" (1888) и "Элементарная геометрия" (1892).

Несмотря на Колмогоровскую реформу и на тот шок, который возник в образовательной сфере после развала СССР, в середине 90-х годах уровень математического школьного образования в России по инерции оставался относительно высоким. Эту ситуацию хорошо описал доктор педагогических наук, профессор математики Техасского университета в Эль Пасо Мурат Аширович Чошанов [8].

Им в 1994 – 95 гг., в рамках программы Фулбрайта, в которой он участвовал, был проведён сравнительный анализ состояния школьного математического образования в России и США. Ученикам начальных классов обоих стран он предложил решить задачу: Пастух с 5 – ю собаками охраняет стадо, в котором пасётся 125 овец. Сколько лет пастуху? 70% российских школьников сразу заподозрили что-то не ладное в постановке этой задачи, и написали, что задача не имеет решения, при этом 75% американских школьников делали попытки найти численное решение, рассуждая так: 125 + 5 = 130 (уж очень старый пастух), 125 – 5 = 120 (по прежнему очень старый), 125:5 = 25 (теперь о'кей! Ответ: пастуху 25 лет).

Для нашего человека читать такое непостижимо, какая-то крайняя степень дебильности подрастающего поколения в самой развитой стране мира. Сальвадор Дали как-то написал, что каталонская семья – это параноидальная общность спаянная систематическим бредом. Это изречение истинного каталонского патриота, как нельзя лучше характеризует американскую школьную математическую культуру, которая позволяет легко складывать собак с овцами.

М.А. Чошанов так объясняет этот феномен: "Американских школьников просто не учат правильно решать задачи. Для них главное по быстрее угадать ответ или найти, хотя бы какое – то решение. В школах США система стандартизированных тестов превращает обучение математике в простую лотерею: угадал – не угадал. Дети не приучены долго думать над решением задачи или доказательством теоремы. Причём весомую лепту в это вносят сами учителя математики". В то же время, российские школьники, в отличие от американских, обучены проверять каждое действие, и понимают, что если сложить количество овец и собак, то возраст пастуха не получишь [8].

Но у следующего поколения российских школьников такие навыки достаточно быстро стали улетучиваться после копирования американских методов обучения математики. Имеется в виду введение ущербного ЕГЭ. В этой связи М.А. Чошанов приводит такой пример: “По результатам пробного тестирования, 30% выпускников российских школ не смогли решить простейшую математическую задачу – рассчитать платёж за электроэнергию в 2 действия: “Каков будет платёж за электроэнергию человеку, если 1 января счётчик показывал 88,742 квт – ч, а 1 февраля – 88,940 квт – ч, при стоимости одного киловатт – часа 3,5 рубля”. Так вот один экзаменующийся посчитал, что за месяц ему придётся заплатить аж 260 тыс. руб. А ведь задача уровня начальной школы” [8].

Судя по дате публикации этой статьи, описанная выше ситуация с российской школьной математикой наблюдалась, по крайней мере, уже 2011 - 2013 годы. Далее, М.А. Чошанов выявляет системные ошибки в американском математическом образовании, которые он характеризует следующими словами: “mile – wide, inch – deep” (ширина в милю, глубина в дюйм). В школьную программу США вводились дополнительные разделы математики, вместо того, чтобы углублять старые. У нас также во времена Колмогоровской реформы и позже до сегодняшнего времени в старших классах вводились и вводятся элементы математического анализа, но хорошо хоть не элементы теоретико-множественного подхода в духе “бурбаков”.

Но так как сейчас печатать учебники и учебные пособия может любой, то мы видим, как этот подход, но пока в самом элементарном виде, начиная с середины 90 – годов пропагандируют среди детей младших классов учебники профессора Л.Г. Петерсон, издаваемые в рамках программы развивающего обучения и проекта “Учусь учиться”. Многие родители в шоке от этого проекта, и обучаться по этим учебникам половине школьников России, похоже, противопоказано. Они подходят для детей олимпиадников, участников математических кружков, специализированных математических школ, в СМИ как – то была озвучена цифра, что 75% участников сборной России по математике учились по этим учебникам.

Понять профессоров педагогов – математиков можно, время идёт вперёд и им хочется изобретать что-то новое, приближать элементы высшей математики в школу. Но в обучении детей нужно учитывать детскую психологию, их возможности в постепенном и последовательном усвоении новых знаний, в понимании чего не было равных А.П. Киселёву.

Но вернёмся снова к наблюдениям профессора М.А. Чошанова. Он пишет, что российский шестиклассник мог бы с успехом учить школьников математике в 9 – ом классе американской школы, не смотря на то, что в общеобразовательных учреждениях США учебные программы по содержанию шире: например, включают “Теорию вероятностей”, “Статистику”, “Дискретную математику”. Но здесь подразумевается, что речь идёт о середине 90 – х годов, до введения ЕГЭ.

Интересно описание американских учебников по математике. Они большие, цветные и отпечатаны на мелованной бумаге, с множеством картинок. В них есть всё - карта США, портреты американских президентов, правила игры в футбол и прочее, то есть всё, кроме содержательной математики. От таких учебников, как пишет автор, дети не могут сконцентрироваться на самой математике. В то же время, в российских, японских, корейских учебниках, кроме “чёрно-белой математики” нет ничего лишнего [8].

Россия после введения ЕГЭ, то есть игры в угадайку или лотерею, быстро достигла уровня математического образования в США и Франции, описанного выше. В сети Интернет можно увидеть для сравнения задачи выпускных экзаменов 1991 года по алгебре и началам анализа за курс средней школы и задачи (тесты) по математике (11 класс) базового уровня ЕГЭ, которые давались в 2015 году [9].

В советское время, как помнят многие выпускники того времени, давались нормальные задачи на решение алгебраических, тригонометрических, логарифмических уравнений и их неравенств, вычисление площадей фигур ограниченных двумя кривыми, были задачи по стереометрии, позднее в рамках Колмогоровской реформы стали даваться относительно не сложные задачи по нахождению областей определения функций и их экстремумов. Задачи были приблизительно одного уровня сложности, и их было не много – штук 6.

Что видим сейчас? 20 задач, 6 – 7 среди них может решить ученик четвертого класса, в конце этого списка задачи не подъёмные, и никто не рассчитывает, что они будут кем-то решены. Но решение дебильных задач верхней части списка позволяет успешно закончить школу [9].

Я никогда не интересовался этим пресловутым ЕГЭ по математике, зная, что это просто бред, перешедший из США в Западную Европу, а потом под маркой Болонского процесса и на всё постсоветское пространство, с единственной целью уничтожить одну из лучших систем образования в мире. Но почитав интервью с заведующим кафедрой геометрии и топологии Петрозаводского госуниверситета, профессором Александром Ивановым, ссылки на которое я дважды давал выше, я впервые увидел, какие задачи предлагаются решать выпускникам средней школы под общим заглавием “ Установите соответствие между величинами и их возможными значениями”.

В первом случае приводятся описание величин: рост ребёнка (А), толщина листа бумаги (Б), длина автобусного маршрута (В), высота жилого дома (Г), потом даются их возможные значения: 1) 32 км, 2) 30 м, 3) 0,22 мм, 4) 110 см. Далее, даётся таблица из восьми клеток, в верхней строке которой написаны буквы А,Б,В,Г, а нижние четыре клетки пустые, в которые надо разбросать предложенные числовые значения или номера, под которыми они идут, точно не знаю.

Вторая задача: вес взрослого человека (А); вес грузового автомобиля (Б), вес книжки (В), вес пуговицы на одежде (Г); возможные значения: 1) 8 т, 2) 5 т, 3) 65 кг, 4) 300 г., которые также надо разбросать по пустым клеткам.

Это просто хохма, так можно учить только в интернате для слабоумных детей. И смех и грех!

В другом своём интервью Александр Иванов задаётся вопросом о причинах тотальной деградации математического образования. В начале, он снова приводит примеры математических задач, предлагаемых на ЕГЭ: “Выпускникам 11 – го класса предлагается решить такие задачи, как “определить площадь комнаты со сторонами 4 на 5 метров” или “сопоставить по размерам муху и слона” (даны цифры 5 мм и 5 м, нужно ответить какого размера слон, какого муха?). Этим школа и занимается, натаскивая ребят на решения подобных задач” [10].

Если даются такие задачи, то предполагается, что школьник с некоторой высокой вероятностью может указать размер слона в 5 мм, высоту жилого дома в 110 см, вес грузового автомобиля в 65 кг и т.д. Это как во Франции студентка не самого худшего университета - Парижского университета имени Пьера и Марии Кюри (Paris VI) - посчитала радиус Земли в 10 мм.

Далее, он пишет, что не у детей отсутствует мотивация в изучении математики, а у учителей, так как у них на выходе базовый экзамен (ЕГЭ), на котором задачи на чувство числа и на вычисление площади комнаты. И нет смысла выкладываться и с интересом учить детей. Любопытен заголовок этого интервью: “Просишь написать “икс в квадрате” –

студент рисует “х” и обводит в квадрат!?”. Об этом я писал в 2009 году в статье “Образование и наука на постсоветском пространстве (критические размышления)” в журнале “Alma Mater”, как об анекдотическом случае, произошедшем в Харьковском госуниверситете [11].

Итак, нужно срочно отказываться от ЕГЭ и выходить из Болонского процесса. Сейчас в условиях, похоже, вечных санкций это очень актуально и удобно сделать. В сети Интернет запущено множество петиций против ЕГЭ и ОГЭ, но они очень хило подписываются, так как за ними не стоят известные деятели науки и культуры России.

После описания такой грустной ситуации с математическим образованием в мире и в России, в частности, встаёт задача о том, как следует повышать заинтересованность детей в изучении математики и развитии их логико-математического мышления.

Об учебниках мы уже написали, и многие видят необходимость возврата к советским учебникам А.П. Киселёва и А.С. Пчёлко.

Нам, кажется, что если интегрировать в процесс преподавания математики рассуждения первооткрывателей тех или иных математических понятий, то это могло бы стимулировать процесс обучения этой науки. Например, объясняя студентам суть производной можно было бы сразу рассказать, как Г.В. Лейбниц (1646 – 1716) и И. Ньютон (1642 – 1727) с разных позиций пришли к этому понятию. Можно также для большего эмоционального эффекта подкрепить этот рассказ изображениями из опубликованных ими математических трактатов, многие из которых или их фрагменты уже оцифрованы Google Books. И это не заберёт у программы обучения математического анализа дополнительного времени. Когда детей в школе учат арифметическому счёту в столбик, то можно через Google Books показать страницы “Универсальной арифметики” И. Ньютона 1699 года выпуска и увидеть вместе с ними всё то, чему учили детей делать в советской начальной школе на уроках арифметики.

Когда начинают читать курс алгебры, то надо сказать в начале о Диафанте (3 в. н.э.), который начал вводить буквенные обозначения, а также обозначения для возведения в степень неизвестного числа вплоть до шестой степени (кубо-куб), а через тот же Google Books можно показать “Алгебру”(1579) итальянского математика Рафаэля Бомбелли (1526 – 1572), рассказав, что в его время ещё не было устоявшейся алгебраической символики, за исключением той, которую предложил отец алгебры Диафант, и что Бомбелли впервые, при решении кубического уравнения, пришел к понятию комплексных чисел, которые не признавались математиками до 18 века. А также надо сказать, что он впервые для европейцев открыл отрицательные числа и смело с ними оперировал, а эти числа знали ещё во втором веке до нашей эры китайцы, окрашивая их в красный цвет для отличия от положительных чисел. Они понимали, что отрицательные числа показывают какой-то убыток в чём-то, а возникали отрицательные числа при решении систем линейных алгебраических уравнений, которые умели решать китайцы.

Учащимся было бы интересно знать, как китайцы составляли такие уравнения. Известна одна такая задача, которая сводится к решению системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными: “В клетке фазаны и зайцы. Вверху 35 голов, внизу 94 ноги. Сколько фазанов и зайцев?”. Эта задача встречается в трактате «Математика в 9-ти книгах», представляющей собой компиляцию трудов, написанных в Китае в 10-2 вв. до н.э. (246 задач). При таком подходе обучения школьников и студентов математике у них может возникнуть интерес не только к математике, но и к истории.

В.И. Арнольд привёл в своей статье интереснейшие сведения о том, что древнегреческие математики заимствовали почти всё у древних египтян, действуя как промышленные шпионы (Архимед, Платон, Эвдокс и другие). И об этом знают историки, которые работали с древнеегипетскими математическими папирусами, но только не математики [4]. А, возможно, нарочно замалчивают это, так уже давно все боготворили Пифагора, Архимеда и Евклида.

Относительно Пифагора В.И. Арнольд написал следующее: “Пифагор был одним из первых в мире, как это сейчас называется, индустриальных шпионов. Он провел в Египте около двадцати лет. Египетские жрецы обучили его своим наукам, но потребовали от него подписку о неразглашении (вследствие чего он никогда ничего и не публиковал). Теорема Пифагора была опубликована (в Вавилоне клинописью) за пару тысяч лет до него, вместе с доказательством и с формулой для нахождения Пифагоровых троек (вроде $3^2 + 4^2 = 5^2$), описывающих все прямоугольные треугольники с целыми длинами сторон”. Также он отметил, что практически вся евклидова геометрия, за исключением пятого пастулата, была известна древним египтянам [4]. Отметим, что сами древние греки, в отличие от наших современников, считали египтян своими учителями в математике.

Известно, что теорема Пифагора имеет множество доказательств, которых сейчас собрано около 400 [12]. Нам достаточно быстро удалось получить четыре новых доказательства этой теоремы алгебро-геометрическими и чисто алгебраическими способами, поэтому мы предположили, что теорема Пифагора является хорошим примером для математического образования школьников и студентов, так как количество её доказательств не органично. Доказательства этой теоремы различными способами являются очень хорошими алгебро-геометрическими упражнениями. В школах и университетах могут объявляться конкурсы на наибольшее количество доказательств теоремы Пифагора. В этих конкурсах, возможно, будут найдены новые доказательства этой теоремы. Всё это может вылиться в некое движение под названием «Пифагореана», что будет очень полезным в деле повышения престижа математического образования среди молодежи [12].

В педагогике известны способы создания дидактических проблемных ситуаций для повышения мотивации в изучении математики [8, 13]. Очень интересен способ создания проблемной ситуации, связанный с числом π . Древнеегипетские, вавилонские, древнеиндийские, древнекитайские и древнегреческие геометры хорошо знали, что отношение длины окружности к диаметру одинаково для любой окружности, и что это отношение было немногим более 3. Например, в египетском папирусе Ахмеса периода Среднего царства это отношение записано как $256/81 \approx 3{,}16$.

В работе [13] отмечается, что с давних времён учёные в ходе наблюдением за рукоделием заметили, что при плетении корзин нужного диаметра им необходимо было брать пруты в 3 раза длиннее его. Чтобы дети прочувствовали этот результат, Л.И. Божович предлагает им взять три предмета круглой формы, измерить их диаметры линейкой, а окружности – ниткой, а потом занести результаты измерений и расчёта отношения длин окружностей к диаметрам в таблицу [13]. Отметим, что Лидия Ильинична Божович (1908 – 1981) является известным советским психологом, ученицей выдающегося советского психолога Льва Семёновича Выготского (1896 – 1934).

Дидактические проблемные ситуации удобно создавать с помощью математических софизмов и парадоксов, один из которых мы рассмотрели выше. Рассмотренный ранее пример восходит к широкому классу софизмов, объяснения которых сводится к запрету деления числа на ноль. Один из первых таких софизмов принадлежит известному чешскому математику. автору строгой теории вещественных чисел и одному из основателей теории множеств Бернарду Больцано (1781 – 1848): $a - b = a - b$; $b - a = b - a$, складывая эти тождества, получим $a - a = b - b$ или $a(1 - 1) = b(1 - 1)$, а если вы не знаете, что на ноль делить нельзя, то получите, что $a = b$.

Отметим, что одним из лучших изданий по софизмам и парадоксам является книга В.М. Брадиса (1890 – 1975) с соавторами “Ошибки в математических рассуждениях”, вышедшая вторым изданием в 1959 году [14], хотя первое её издание вышло совместно с В.Л. Харчевой ещё в 1938 году. В этой книге мы увидим прекрасный исторический экскурс в проблему, классификацию софизмов и парадоксов, по этой книге можно просто с большим удовольствием изучать элементарную математику и элементы анализа (пределы, ряды) вместо множества сегодняшних серых учебников.

Рассмотренный выше софизм Б. Больцано мы взяли как раз из этой книги, из которой также следует, что этот софизм относится к первому виду ложных доказательств (возможность деления на ноль) известного немецкого алгебраического геометра Германа Шуберта (1848 – 1911), который выделил четыре вида таких доказательств, и как показано в рассматриваемой книге они не исчерпывают даже минимального объёма рассматриваемого понятия.

Прекрасно описан софизм: “длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна сумме длин его катетов”. Любой здравомыслящий человек, не знающий всех тонкостей понятий пределов и бесконечно малых, будет обескуражен перед этим софизмом. Я когда-то прочитал в сети Интернет статью американского автора, который сам пришёл к этому софизму и просил читателей объяснить его.

В этой книге приводятся слова выдающегося популяризатора науки, народника, почётного академика Николая Александровича Морозова (1854 – 1946), который считал, что софизм типа “гипотенуза прямоугольника треугольника равна сумме катетов” “имеет научный интерес, так как обращает наше внимание на важные особенности математических методов или самих наших математических представлений и генезиса этих представлений в наших головах”. К сожалению, в этом изречении пропущены слова “длина” и “длины”, относящиеся к гипотенузе и катетам.

Рекомендую школьникам и студентам поломать голову над этим софизмом, а потом только почитать разъяснения по его поводу. Вышеуказанная книга имеется в открытом доступе на сайте mathedu.ru.

Интересно изложение софизма о сумме ряда 1 – 1 + 1 – 1 +…, которое очень поучительно. Если мы ничего не знаем о бесконечных сходящихся и расходящихся рядах, то каждый из читателей, при желании, с группировав, по разному эти единицы, может получить четыре разных ответа: 0,5; 0, +1, -1.

Вокруг этого софизма в 18 веке крупнейшие математики, такие как Лейбниц, Вольф, Николай Бернулли старший, Эйлер и другие, вели жаркие споры, привлекая в помощь даже метафизику. Они были разрешены только после установления точного понятия о сходящихся рядах. А рассматриваемый ряд оказался расходящимся.

Немного о первом авторе рассматриваемой книги. Владимир Модестович Брадис (1890 – 1975) замечательный советский математик-педагог и вычислитель, член-корреспондент АПН СССР (1955). Автор легендарных “Таблиц Брадиса”, или точнее “Четырёхзначных математических таблиц”. Лет 70 они были настольной книгой любого школьника, студента и инженера. Это целая эпоха, более двадцати переизданий, начиная с 1921 года. Таблицы Брадиса - это то же самое, что сейчас компьютеры. Американцы и европейцы при расчёте инженерно-технических характеристик своих небоскрёбов, и не только их, использовали советские таблицы Брадиса.

А что мы видим сейчас? Инженеры уже сопроматом не владеют, не могут руками рассчитать устойчивость элементарной балки. Считают всё на компьютерах, как они считают, никто не понимает, так как это чёрный ящик. А потом рушатся мосты, здания, взрываются электростанции, прорываются дамбы, оползни и сели сметают всё на своём пути, морские волны разрушают берега и гидротехнические сооружения и так далее. А с каждым годом на Земле таких событий будет всё больше и больше.

Но перейдём снова к нашей теме. Как можно стимулировать школьников и студентов к занятиям математике и развивать их логико – математическое мышление?

Мы в 2016 г. проводили тестирование студентов Белгородского и Харьковского национальных университетов на предмет решения историко – математический задач, с целью оценки уровня их логико-математического мышления. Перечень задач приведён в Приложении. Так как для решения многих из этих задач требуется умение оперировать с простыми дробями, то анализ результатов этого тестирования привёл к такому общему выводу: около 50% харьковских и белгородских студентов умели оперировать с простыми дробями, приводя их к общему знаменателю при операциях сложения или вычитания. Эти выводы были получены на примере решения этих задач студентами старшекурсниками экологами ХНУ имени В.Н. Каразина и студентами старшекурсниками экономистами НИУ “БелГУ”. И это ещё прекрасный результат, по сравнению с результатами американских и французских студентов, описанных выше.

Для развития логико – математического мышления школьников и студентов, помимо историко – математических задач, преподавателям хорошо бы порешать вместе с ними задачи В.И. Арнольда для детей от 5 до 15 лет, некоторые из которых не посильны даже профессорам и академикам, хотя смышленые дети их легко решают [15]. В качестве такой задачи В.И. Арнольд приводит следующую задачу под номером 13: “На книжной полке рядом стоят два тома Пушкина: первый и второй. Страницы каждого тома имеют вместе толщину 2 см, а обложка –– каждая –– 2 мм. Червь прогрыз отверстие (перпендикулярно страницам) от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома. Какой путь он прогрыз? [Эта топологическая задача с невероятным ответом –– 4 мм –– совершенно недоступна академикам, но некоторые дошкольники легко справляются с ней]”. Показательны ещё две задачи, и как нам кажется, постановки такого типа задач восходят к глубокой древности: 2. Бутылка с пробкой стоит 10 копеек, причем бутылка на 9 копеек дороже пробки. Сколько стоит бутылка без пробки? 3. Кирпич весит фунт и полкирпича. Сколько фунтов весит кирпич?

Эти и другие задачи, как пишет в предисловии к своей маленькой книжки В.И. Арнольд, он записал в Париже весной 2004 года, когда русские парижане попросили его помочь их малолетним детям приобрести традиционную для России, но далеко превосходящую все западные обычаи культуру мышления. В восьмом издании его задачника, на который мы дали ссылку, приведено 79 задач. Вот эти бы задачи и решали школьники и студенты вместо одуряющих и бессмысленных тестов, которые и математическими нельзя назвать.

Хочу отметить, что при сегодняшней системе образования, чем больше времени ребёнок проводит в школе, тем больше он глупеет, поэтому обеспеченные и думающие о своих детях родители только тем и занимаются, что выискивают особые школы, нанимают лучших репетиторов или переводят детей на домашнее обучение.

Что ещё могло бы возбудить интерес к занятиям математике? Это показать её красоту. Разве не изящно тождество Эйлера $e^{i\pi} + 1 = 0$, в котором мы видим одновременно пять фундаментальных математических констант. Каждый профессиональный математик знает, что хорошо поставленная задача после очень громоздких преобразований приводит к компактному и красивому результату.

Простейшее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, называемое уравнением Ферхюльста, история создания которого была детально описана нами на основе оригинальных его работ в статье [16] и записанное в дискретном виде (логистическое отображение), помимо стандартных решений, присущих исходному уравнению в дифференциальной форме (вымирание популяции или выход её на стационарное значение), имеет ещё режимы автоколебаний и детерминированного хаоса, которые мы наблюдаем при постепенном увеличении коэффициента роста этого уравнения. Это отображение имеет вид $X_n+1 = rX_n(1 – X_n)$.

В историческом плане эти исследования восходят к классической работе Фейгенбаума [17], а в России эта проблема впервые, похоже, была освещена в работе А.П. и С.П. Кузнецовых [18].

В интернете имеются программы на Питоне, которые позволяют наблюдать удивительную по красоте картину смены режимов поведения решений этого дискретного уравнения. Но ещё более поразительную динамичную картину мы получим, записав логистическое отображение в комплексных числах. В одном из случаев, его можно привести к виду $Z_n+1 = \lambda - Z_n^2$. Наиболее доходчивое описание, возникающих здесь портретов нелинейной динамики в комплексной плоскости, приведено в учебном пособии О.Б. Исаевой, которое доступно в сети Интернет [19].

Если $\lambda = 0$ и начальная точка находится внутри единичного круга, то в процессе итерации она его не покидает, в противном случае она убежит в бесконечность. Следовательно, границей между этими множествами точек (решений) является окружность радиуса единицы. Однако, при λ не равной нулю, отображения приводят к сложным фрактальным границам необычайной красоты. Меняя λ можно получить невероятное множество фрактальных структур. В историческом плане они восходят к множествам Мандельброта, Фату и Жюлиа. Французский математик Пьер Жозе Луую Фату (1878 – 1929) в 1905 году изучал рекуррентные ряды, описываемые вышеуказанным квадратичным отображением в комплексной плоскости.

Близкие исследования проводил французский математик Гастон Морис Жюлиа (1893 - 1978), которые в 70-годы пропагандировал Бенуа Мандельброт (1924 – 2010), так как они вместе с исследованиями Фату лежали в основе его фрактальной геометрии. Мандельброт в своей первой работе по фрактальной геометрии, посвященной измерению длины береговой линии Великобритании, показал, что это длина зависит от того какими отрезками её измерять, а при стремлении к нулю этих отрезков длина береговой линии будет стремиться к бесконечности. Эта работа была опубликована в 1967 году в журнале Science под названием “Какова длина побережья Великобритании? Статистическое самоподобие и фрактальная размерность” [20]. В 1975 году Мандельброт математически строго описал множества, получаемые при квадратичном отображении, изученные первоначально Фату. Он впервые назвал их фракталами. Позже французский математик Адриен Дауди (1935 – 2005) назвал такого типа множества множеством Мандельброта. При создании мощной вычислительной техники (IBM) первое изображение множества Мандельброта в хорошем разрешении было получено в 1986 году Диком Поутаном [21].

В принципе, вся эта история хорошо описана в википедических статьях, посвященных Мандельброту и его множеству, в которых также можно увидеть множестве компьютерных цветных изображений фракталов, а при желании в сети Интернет можно найти и симуляторы, генерирующие фрактальные структуры. Но всё это настолько впечатляюще, на грани математики и изобразительного искусства, что мы решили посвятить этому вопросу достаточно большое внимание.

Из-за простоты исходного квадратичного отображения и построения на его основе рекуррентных соотношений, работа с ними вполне доступна школьникам и студентам. Они, к примеру, могут экспериментировать с любыми другими простыми нелинейными дискретными отображениями в комплексной плоскости, которые при компьютерном моделировании будут приводить к разнообразным фрактальным структурам. Мы обратили внимание, что в саратовской группе теоретической нелинейной динамики, которая работала первоначально под руководством докторов физико-математических наук Сергеем Петровичем Кузнецовым (1951 – 2020) и Александром Петровичем Кузнецовым, функционирует молодёжная научная лаборатория. В ней школьники и студенты Саратова занимаются моделированием различных процессов нелинейной динамики, в том числе и на стыке с нелинейными дискретными отображениями и фрактальной геометрией (http://www.sgtnd.narod.ru/studlab/rus/studlab.htm).

Всё что описано выше, в контексте обучения в средней школе, могли бы взять на вооружение продвинутые лицеи и гимназии, преподаватели – энтузиасты.

Современное общество потребления и либеральная публика ставит вопрос. Зачем вообще нужна математика современному человеку, кому нужны эти производные и интегралы, вместе с дифференциальными уравнениями? Но ответ простой и дело не в производных и интегралах, которые в дальнейшем большинству и не понадобятся, а дело в том, что математика формирует аналитический ум и логическое мышление человека, воспитывает его умственные способности. А это очень необходимо в любой сфере деятельности, а сами математики часто добиваются, гораздо, больших успехов в гуманитарных и в социально-экономических наукам, чем представители этих областей знаний. Но для общества потребления аналитический ум и логическое мышление, конечно, противопоеказаны. Ведь атрибуты математики - логика, доказательность и дисциплинированность ума востребованы лишь в высококультурном обществе.

Как отмечает тот же В.И. Арнольд, математическое образование должно составлять неотъемлемую часть культурного багажа каждого школьника, а основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира [1]. Именно реального, а не абстрактного мира, который навязывают последователи группы Бурбаки. Кроме того, математика является единственными способом дать адекватное описание многих природных и социально-экономических процессов и явлений.

Министерские чиновники любых стран должны понимать, что как им и не хочется управлять вещами, в которых они мало что понимают, в случае, если они не начнут вводить нормальные стандарты в математике и физике, а также во всех других естественных науках, то они столкнуться с тем, что вся техносфера их стран будет активно деградировать, будут рушаться мосты и здания, взрываться электростанции и т.д. И не только техносфера, но, в первую очередь, и экосфера. Мы это уже хорошо видим.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Математика и математическая образование в современном мире //Математическое образование. 1997. Вып. 2. С. 109 – 112.
2. Арнольд В.И. Математическая безграмотность страшнее костров инквизиции //Известия. 1998. №11 (16 января).
3. Арнольд В.И. Стандартные нелепости //Известия. 2002.№44(6 декабря).
4. Арнольд В.И. Математическая дуэль вокруг Бурбаки //Вестник РАН. 2002. Том 72, №3. С. 245 – 250.
5. Доценко В. Пятое правило арифметики //Наука и жизнь. 2002. №4.
6. Неретин Ю. Записки по истории Колмогоровской реформы школьной математики. 17.10.2016. (доступны на сайте mat.inivie.ac.at).

7. Костенко И.П. Реформа школьной математики 1970 – 1978 гг. К 40 – летию “Колмогоровской реформы” //Alma Mater (Вестник высшей школы). 2011. №8. С. 76 – 81.
8. Чошанов М.А. Образование и национальная безопасность: системные ошибки в математическом образовании в России и США //Образование и наука. 2013. №8(107). С.14 – 31.
9. Анна Смирнова. Путь тотальной деградации: выпускники сдают ЕГЭ по математике, задания которого по силам – 4 –х летним детям (интервью с профессором, заведующим кафедрой геометрии и топологии Петразоводского госуниверситета Александром Ивановым) //НаканунеRu, 02.06.2016.
10. Анна Смирнова. Просишь написать “икс в квадрате” – студент рисует “х” и обводит в квадрат! (интервью с профессором, заведующим кафедрой геометрии и топологии Петразоводского госуниверситета Александром Ивановым) //НаканунеRu, 12.05.2016.
11. Московкин В.М. Образование и наука на постсоветском пространстве (критические размышления) //Alma Mater. 2009. №7. С. 9 – 18.
12. Московкин В.М. Теорема Пифагора. Четыре новых доказательства // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2016. №20(241). вып.44. С. 34-41.
13. Божович Л.И. Проблема развития мотивационной сферы ребёнка. – М.: Педагогика, 1972. 53 с.
14. Брадис В.М., Минковский В.Л., Харчева А.К. Ошибки в математических рассуждениях. М.: Учпедгиз, 1959. 178 с.
15. Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. М.: МЦНМО (8 изд.), 2018. 16 с.
16. Московкин В.М., Журавка А.В. Пьер Франсуа Ферхюльст - забытый первооткрыватель закона логистического роста и один из основателей экономической динамикиа // Оригинальные исследования : науч.-практ. электрон. журн. 2020. Т.10, №7. С. 207-218.
17. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformation // J. Stat. Phys. 1978. Vol.19, №1. P.25.
18. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1. №1,2. С.15.
19. Исаева О.Б. Физика фракталов. Комплексная аналитическая динамика. Учебно-методическое пособие для студентов 4 курса факультета нелинейных процессов. Саратов: Саратовский госуниверситет, 2012. 79 с.
20. Mandelbrot B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension //*Science*, New Series. 1976. Vol. 156. No. 3775. P. 636—638. doi:10.1126/science.156.3775.636
21. Pountain D. Turbocharging Mandelbrot // Byte. 1986. September. https://archive.org/details/byte-magazine-1986-09/page/n369/mode/1up? view=theater

References

1. Arnold V.I. Mathematics and Mathematical Education in the Modern World // Mathematical Education. 1997. Issue. 2.P. 109 - 112.
2. Arnold V.I. Mathematical illiteracy is worse than the fires of the Inquisition // Izvestia. 1998. No. 11 (January 16).
3. Arnold V.I. Standard absurdities // Izvestia. 2002. # 44 (December 6).
4. Arnold V.I. Mathematical duel around Bourbaki // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. 2002. Volume 72, No. 3. S. 245 - 250.
5. Dotsenko V. The fifth rule of arithmetic // Science and life. 2002. No. 4.

6. Neretin Yu. Notes on the history of the Kolmogorov reform of school mathematics. 10/17/2016. (available at mat.inivie.ac.at).
7. Kostenko I.P. School mathematics reform 1970 - 1978 To the 40th Anniversary of the "Kolmogorov Reform" // Alma Mater (Bulletin of the Higher School). 2011. No. 8. S. 76 - 81.
8. Choshanov M.A. Education and National Security: Systemic Errors in Mathematical Education in Russia and the USA // Education and Science. 2013. No. 8 (107). Pages 14 - 31.
9. Anna Smirnova. The path of total degradation: graduates pass the Unified State Exam in Mathematics, the tasks of which are within the power of 4-year-old children (interview with Professor, Head of the Department of Geometry and Topology of Petrazovodsk State University, Alexander Ivanov) // NakanuneRu, 02.06.2016.
10. Anna Smirnova. You ask to write "x in a square" - the student draws an "x" and draws a square! (interview with Alexander Ivanov, Professor, Head of the Department of Geometry and Topology of Petrazovodsk State University) // NakanuneRu, 12.05.2016.
11. Moskovkin V.M. Education and Science in the Post-Soviet Space (Critical Reflections) // Alma Mater. 2009. No. 7. S. 9 - 18.
12. Moskovkin B.M. Pythagorean theorem. Four new proofs // Scientific Bulletin of BelSU. Ser. Mathematics. Physics. 2016. No. 20 (241). Issue 44. S. 34-41.
13. Bozovic L.I. The problem of the development of the child's motivational sphere. - M .: Pedagogika, 1972.53 p.
14. Bradis V.M., Minkovsky V.L., Kharcheva A.K. Errors in mathematical reasoning. M .: Uchpedgiz, 1959.178 p.
15. Arnold V.I. Problems for children from 5 to 15 years old. Moscow: MTsNMO (8th ed.), 2018.16 p.
16. Moskovkin V.M., Zhuravka A.V. Pierre François Verhulst - the forgotten discoverer of the law of logistic growth and one of the founders of economic dynamics // Original research: scientific-practical. electron. zhurn. 2020. Vol.10, No. 7. S. 207-218.
17. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformation // J. Stat. Phys. 1978. Vol.19, No. 1. P.25.
18. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P. Critical dynamics of one-dimensional mappings // Izvestiya vuzov. Applied nonlinear dynamics. 1993. Vol.1. No. 1.2. P.15.
19. Isaeva O.B. Physics of fractals. Complex analytical dynamics. Study guide for 4th year students of the Faculty of Nonlinear Processes. Saratov: Saratov State University, 2012.79 p.
20. Mandelbrot B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension // Science, New Series. 1976. Vol. 156. No. 3775. P. 636-638. doi: 10.1126 / science.156.3775.636
21. Pountain D. Turbocharging Mandelbrot // Byte. 1986 September. https://archive.org/details/byte-magazine-1986-09/page/n369/mode/1up? view = theater

Приложение

Историко-математические задачи для тестирования логико-математического мышления обучающихся

1. Задача 19 из Московского математического папируса Голинищева (25 задач), составленного в Египте около 1850 г. до н.э. Папирус куплен в 1892 или 1893 г. на рынке в Фивах египтологом Владимиром Семеновичем Голинищевым (1856-1947) и сейчас хранится в Пушкинском музее изящных искусств в г.Москва.

К числу, взятому 1 и 1/2 раза, добавь 4 и получи 10. Каково это число?

2. Задача о датах жизни Диафанта из Палатинской Антологии.

Диафант Александрийский (2-3 вв. н.э.) – последний из великих математиков Древней Греции. Палатинская Антология – собрание античных и средневековых греческих эпиграмм, составленное византийским грамматиком X века Константином Кефалой.

Отрочество Диафанта составило 1/6 жизни, борода начала расти спустя 1/12 жизни, женился после 1/7 жизни, а спустя 5 лет у него родился сын, который прожил 1/2 жизни отца, а последний умер спустя 4 года. Каково время жизни Диафанта?

3. Задача Пифагора (570-490 гг. до н.э.).

Доказать, что всякое нечётное число, кроме 1, есть разность квадратов двух целых чисел.

4. Задача Архимеда (ок. 278-212 гг. до н.э.).

Доказать, что площадь круга описанного около квадрата вдвое больше площади вписанного в круг квадрата.

5. Задача 31 из последней книги китайского трактата Сунь-Цзы (3-4 вв. н.э.). Эта же задача встречается в трактате «Математика в 9-ти книгах», представляющей собой компиляцию трудов, написанных в Китае в 10-2 вв. до н.э. (246 задач)

В клетке фазаны и зайцы. Вверху 35 голов, внизу 94 ноги. Сколько фазанов и зайцев?

6. Задача Г.В. Лейбница (1646-1716). Готфрид Вильгельм Лейбниц- немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. Вместе с Исааком Ньютоном разработал основы интегрального и дифференциального исчисления.

Показать, что если n-целое число, то n^5 - n делится на 5.

7. Задача Карла Фридриха Гаусса (1777-1855). Эта же задача встречается в древнекитайском трактате (задача 36 последней книги) Чжана Цю-Цзана (5 в. н.э.), в связи с изобретением китайцами понятия и формул арифметической прогрессии. Решить задачу логическим путем, не используя формулу суммы членов арифметической прогрессии.

Сложить первые сто членов натурального ряда: 1+2+…+99+100=?

8. Задача из «Курса арифметики» (Ганитасара) индийского математика и философа Шридхары (Сридхары) (ок. 950 - 1000, Бенгалия). Он являлся автором ряда задач, которые широко использовались индийскими математиками последних времен.

Пятая часть пчелиного роя села на цветок кадамба, третья - на цветок силиндха. Утроенная разность последних двух частей пчелиного роя направилась к цветам путая и осталась одна маленькая пчелка, летающая взад и вперед, привлеченная ароматом жасмина. Сколько всего пчёл?

9. Задача Софи Жермен (1776-1831). Софи Жермен одна из первых французских женщин математиков, была в переписке со всеми известными математиками своего времени. Эта задача, по-видимому, связана с её увлечением теорией чисел

Доказать, что каждое число вида a^4 +4 составное, то есть может быть разложено на сомножители.

10. Задача из «Арифметики» Леонтия Филипповича Магницкого (1669-1739). Л.Ф. Магницкий (Теляшин) с повеления Петра 1 составил первую российскую учебную энциклопедию по математике под названием «Арифметика, сиречь наука числительная» (1703).

Хозяин нанял работника на год и обещал ему дать 12 рублей и кафтан. Но тот, проработав только 7 месяцев, захотел уйти. При расчёте он получил кафтан и 5 рублей. Сколько стоит кафтан?