

Проведені дослідження мають важливе значення для робітників такої професії, як диспетчер (оператор). З упровадженням розробленої комп'ютерної психодіагностики уваги зменшуються витрати часу на контроль і добір операторів, визначаються критерії необхідних психофізіологічних і особистих якостей, удосконалюються методики підбора і розміщення персоналу. Введення систематичного контролю уваги і сили нервової системи дає можливість запобігти неминучим наслідкам неуважності і неврівноваженості операторів, які несуть чималі збитки для такої галузі, як енергетика.

Запропонований теоретичний підхід до контролю уваги операторів можна рекомендувати для впровадження на підприємствах центральних, міських, районних електричних мереж енергетичної галузі України.

## Література

1. *Марюта А.Н., Бойцун Н.Е.* Экономико-математическое моделирование и оптимизация управления организациями: Монография. — Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского университета, 2001. — 540 с.
2. *Малайчук В.П., Пріснякова Л.М.* Математичні основи психометричних досліджень: Навч. посібник. — Дніпропетровськ: ДДУ, 1996. — 212с.
3. *Райгородский Д.Я.* Практическая психодиагностика. Методики и тесты. Учебное пособие. — Самара: Издательский Дом «БАХРАХ», 1998. — 672 с.
4. *Пол Клайн.* Справочное руководство по конструированию тестов. — Киев: Пан ЛТД, 1994. — 640 с.

# НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЗАНЯТОГО НАСЕЛЕНИЯ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЕЕ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ

Журавка А.В.,

Харьковский государственный университет строительства и архитектуры

доктор географических наук Московкин В.М.

Харьковский Национальный университет им. В.Н. Каразина

В работе [1] была предложена модель динамики потока рабочей силы для отдельной отрасли экономики *in vide*

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = N_2(t)W_1(t) - N_1(t)W_2(t), \quad (1)$$

— где  $N_1(t)$  — общее число работников, занятых в отрасли на момент времени  $t$ ;

$N_2(t)$ , — число потенциальных работников, которые могут быть привлечены для работы в рассматриваемой отрасли и которые на данный момент являются безработными,

$N_1(t) + N_2(t) = N = const$  — емкость рынка рабочей силы;

$W_1(t)$  — вероятность перехода безработного в статус занятого (вероятность нахождения работы) за единичный интервал времени;

$W_2(t)$  — вероятность перехода занятого работника в статус безработного (вероятность увольнения работника) за единичный интервал времени, единичный интервал времени равен одному году.

Предполагается, что в отрасли имеются возможности для предоставления рабочих мест всем потенциальным работникам. Таким образом, в идеальном случае  $N_1(t) = N$ . Поэтому переменная  $N_1(t)$  определяет степень загруженности отрасли, а  $N_2(t)$  — количество свободных рабочих мест [1]. Уравнение (1) является обычным уравнением баланса, которое позволяет находить равновесные состояния на рынке труда (равновесные состояния уровней занятости). В работе [1] в линейном приближении были предложены следующие гипотезы относительно вероятностных функций  $W_1$  и  $W_2$ :

$$\begin{aligned} W_1(t) &= k_1 N_2(t) = k_1(N - N_1(t)); \\ W_2(t) &= k_2 N_1(t) + k_3 N_2(t) = \\ &= k_2 N_1(t) + k_3(N - N_1(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

в результате чего было получено следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dt(x)}{dt} &= (v_1 + v_3 - v_2)x^2(t) - \\ &-(2v_1 + v_3)x(t) + v_1 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x(t) = N_1(t)/N$ ,  $v_i = k_i N$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Было показано, что уравнение (3) имеет два стационарных решения, одно из которых является устойчивым, ( $x_1 < 1$ ), а другое неустойчивым ( $x_2 > 1$ ). Данная модель, в вышеуказанной работе, интерпретируется как с точки зрения классических макроэкономических концепций, так и с точки зрения концепций синергетики и самоорганизации.

Ниже модель (1, 2) развивается нами в рамках квадратичных приближений для вероятностных функций  $W_1$  и  $W_2$ :

$$\begin{cases} W_1(t) = k_1 N_2(t) + k_2 N_2^2(t) \\ W_2(t) = k_3 N_1(t) + k_4 N_2(t) + k_5 N_1^2(t) + k_6 N_2^2(t) \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя выражения (4) в уравнение (1), получим следующее обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = & -(k_2 + k_5 + k_6)N_1^3 + \\ & + [k_1 - k_3 + k_4 + N(3k_2 + 2k_6)]N_1^2 - \\ & - (2k_1N + 3k_2N^2 + k_4N + k_6N^2)N_1 + \\ & + k_1N^2 + k_2N^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Как известно, стационарные решения уравнения (5) находятся с помощью приравнивания к нулю правой части этого уравнения.

В этом случае мы приходим к кубическому уравнению, которое имеет три корня. Нас будут интересовать положительные действительные корни кубического уравнения, которые могут быть найдены по формуле Кардана. Запишем это уравнение в виде:

$$F(N_1) = aN_1^3 + bN_1^2 + cN_1 + d = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a = & -(k_2 + k_5 + k_6) < 0, \quad b = k_1 - k_3 + k_4 + N(3k_2 + 2k_6), \\ c = & -(2k_1N + 3k_2N^2 + k_4N + k_6N^2) < 0, \\ d = & k_1N^2 + k_2N^3 > 0 \end{aligned}$$

Можно показать, на концах рассматриваемого нами интервала функция  $F(N_1)$  имеет следующие значения:  $F(0) = d > 0$ ,  $F(N_1) = -N(k_3N_1 + k_5N_1^2) < 0$ . Это говорит о том, что внутри этого интервала вполне возможны ситуации, когда функция  $F(N_1)$  имеет три нуля (рис. 1). Введем в рассмотрение потенциальную функцию  $U(N_1)$ , согласно уравнения

$$\frac{dN_1}{dt} = F(N_1) = -\frac{dU(N_1)}{dN_1}, \quad (7)$$

которая позволяет эффективно использовать методы математической теории катастроф для анализа катастрофических ситуаций в различных по своей природе системах [2, 3].

Сама функция легко определяется с помощью интегрирования уравнения (7)

$$\begin{aligned} U(N_1) = & -\frac{a}{4}N_1^4 - \frac{b}{3}N_1^3 - \\ & -\frac{c}{2}N_1^2 - dN_1 + const. \end{aligned} \quad (8)$$

Выберем постоянную потенциальной функции (8) таким образом, чтобы эта функция находилась в положительном квадранте плоскости  $(N_1, U)$ . Качественный вид этой функции показан на рисунке 1. На этом же рисунке показано соответствие характерных точек функций  $F(N_1)$  и  $U(N_1)$ . Здесь вторая стационарная точка ( $N_{1cm}^{(2)}$  — второй ноль функции  $F(N_1)$ ) является неустойчивой и соответствует максимуму потенциальной функции  $U(N_1)$ , остальные две стационарные точки  $N_{1cm}^{(1)}$ ,  $N_{1cm}^{(3)}$  — устойчивые и соответствуют минимумам потенциальной функции. Это легко показать следующим образом. Возьмем в окрестности  $N_{1cm}^{(2)}$  некоторую точку  $N > N_{1cm}^{(2)}$ . В этом случае  $F(N_1) = dN_1/dt < 0$  (рис. 1), то есть  $N_1$  будет отдаляться от точки  $N_{1cm}^{(2)}$ , то же самое будет иметь место и при

Вестник МСУ, 2002, т. 5, № 4

$N < N_{1cm}^{(2)}$ . Аналогичным образом показывается устойчивость стационарных точек  $N_{1cm}^{(1)}$  и  $N_{1cm}^{(3)}$ .

Далее заметим, что экстремумы функции  $F(N_1)$  соответствуют точкам перегиба потенциальной функции. Соответствующие направления движения в устойчивые стационарные состояния показаны на кривой представляющей собой функцию  $U(N_1)$ .

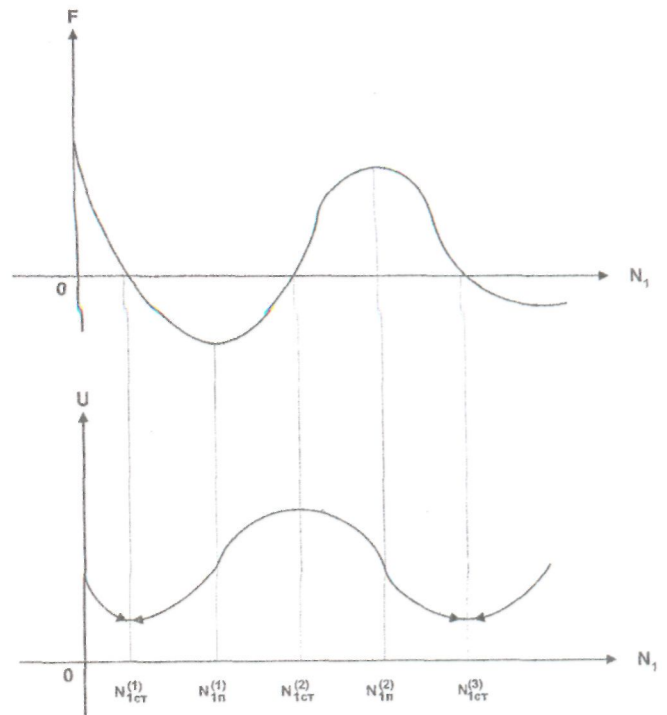


Рис. 1. Качественный характер поведения функций  $F(N_1)$  и  $U(N_1)$  в случае наличия трех нулей функции  $F(N_1)$

В зависимости от начального условия уравнения (5):  $N_1(0) = N_{10}$  имеем шесть типов решений  $N_1(t)$  этого уравнения (рис. 2):

1.  $0 < N_{10} < N_{1cm}^{(1)}$ ,  $N_1(t)$  — монотонно-возрастающая выпуклая функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(1)}$ ;
2.  $N_{1cm}^{(1)} < N_{10} < N_{1in}^{(1)}$ ,  $N_1(t)$  — монотонно-убывающая вогнутая функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(1)}$ ;
3.  $N_{1cm}^{(1)} < N_{10} < N_{1cm}^{(2)}$ ,  $N_1(t)$  — монотонно-убывающая выпукло-вогнутая (с перегибом) функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(1)}$ ;
4.  $N_{1cm}^{(2)} < N_{10} < N_{1in}^{(2)}$ ,  $N_1(t)$  — монотонно-возрастающая вогнуто-выпуклая (с перегибом) функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(2)}$ ;
5.  $N_{1in}^{(2)} < N_{10} < N_{1cm}^{(3)}$ ,  $N_1(t)$  — монотонно-возрастающая выпуклая функция,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(3)}$ ;

6.  $N_{10} > N_{1cm}^{(3)}$ ,  $N_1(t)$  — монотонно-убывающая

вогнутая функция  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(3)}$ .

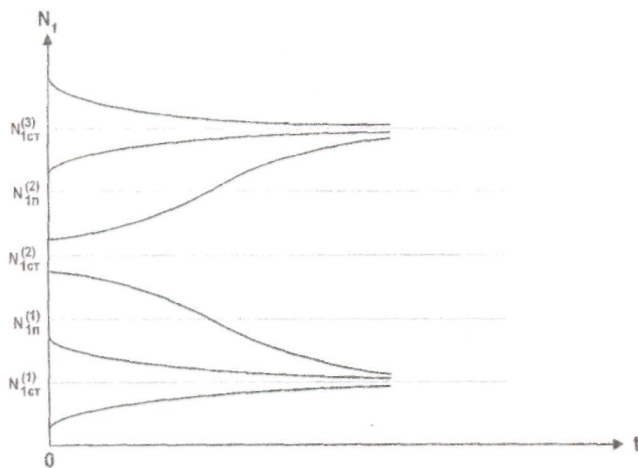


Рис. 2. Качественный характер поведения решений  $N_1(t)$  уравнения (5).

Таким образом, при наличии трех стационарных точек имеет место стремление к одной из устойчивых

точек:  $N_{10} < N_{1cm}^{(2)}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(1)}$ ;  $N_{10} > N_{1cm}^{(2)}$ ,

$\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_{1cm}^{(3)}$ .

Итак, когда рынок труда имеет три стационарных уровня занятости, то динамика численности занятого населения происходит в направлении двух устойчивых стационарных уровней занятости в зависимости от начальных численностей занятого населения. В зависимости от начальных состояний рынка труда найдены шесть типов динамики численности занятого населения.

В случае приближения друг к другу точек  $N_{1cm}^{(1)}$  и  $N_{1cm}^{(2)}$  (при изменении параметров исходного уравнения) левый минимум потенциальной функции вырождается, что приводит к скачку устойчивого состояния уровня занятости из левого минимума потенциальной функции в правый. При вырождении правой стационарной точки получим скачок в левый минимум потенциальной функции. Условия вырождения стационарных точек уравнения (5) могут быть получены с помощью приравнивания к нулю дискриминанта кубического уравнения (6). Рассмотренные катастрофические ситуации при наличии трех стационарных точек (в теории катастроф они называются критическими точками) могут быть сведены к канонической катастрофе «сборке» [2,3].

Экономический смысл этих катастроф, состоит в том что рынок труда в определенных ситуациях может скачкообразно переходить из одного равновесного (стационарного) состояния в другое. Здесь имеются в виду скачкообразные переходы из одного равновесного устойчивого уровня в другой:  $N_{1cm}^{(1)} \leftrightarrow N_{1cm}^{(3)}$ .

Для построения многообразия катастрофы «сборки» в трехмерном пространстве, которое представляет собой поверхность равновесия с расположенными на ней всеми стационарными точками  $N_{1cm}$ , необходимо выбрать два управляющих параметра. Если в качестве таковых выбрать параметры вероятностной функции  $W_1(t)$ :  $k_1$  и  $k_2$ , то уравнение (6) в пространстве переменных  $k_1, k_2, N_1$  будет описывать вышеуказанное многообразие катастрофы «сборки». Выразив из этого уравнения параметры или  $k_1$  или  $k_2$ , как функции остальных двух переменных, получим сечения многообразия катастрофы. Бифуркационное множество  $\Phi(k_1, k_2)$ , на котором происходит вырождение стационарных точек (внезапные скачки) получить в явном виде затруднительно. Оно в принципе находится, как отмечено выше, из условия приравнивания к нулю дискриминанта кубического уравнения (6).

Знакоопределенность большинства коэффициентов кубического уравнения (6) позволяет сделать ряд выводов в отношении наличия трех положительных нулей функции  $F(N_1)$ . Экстремумы этой функции найдутся из решения квадратного уравнения

$$N_i^2 + \frac{2b}{3a}N_i + \frac{c}{3a} = 0: (N_1)_{1,2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}}.$$

Так как  $a < 0$  и  $c < 0$ , то в случае  $b > 0$  и положительности подкоренного выражения будем иметь  $(N_1)_{1,2} > 0$ , что говорит о том, что осцилляция функции  $F(N_1)$  наблюдается при  $N_1 > 0$  и, по крайней мере, два нуля этой функции находятся в области  $N_1 > 0$ . Если все три нуля функции  $F(N_1)$  лежат на положительной оси  $N_1$ , то имеем ситуацию, показанную на рисунках 1 и 2. В случае  $b < 0$  осцилляция функции  $F(N_1)$  смещается в отрицательную область ( $(N_1)_{1,2} < 0$ ) и только один из ее нулей может находиться в области  $N_1 > 0$ .

Введем следующие параметры порядка для коэффициентов

$$N = 10^6 n, k_1 = k_3 = k_4 = 10^8 \lambda_1, k_2 = k_5 = k_6 = 10^{14} \lambda_2. \quad (9)$$

Будем предполагать, что  $n, \lambda_1, \lambda_2$  изменяются от нуля до десяти. Найдем годовое изменение численности занятого населения согласно уравнения (1) и выражений (4) для  $W_1$  и  $W_2$ . При  $n = \lambda_1 = \lambda_2 = 1, N_1 = N_2 = 1/2 \cdot 10^6$ .

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot 10^6 \left[ 10^{-8} \frac{1}{2} \cdot 10^6 + 10^{-14} \left( \frac{1}{2} \cdot 10^6 \right)^2 \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot 10^6 \left[ 10^{-8} \frac{1}{2} \cdot 10^6 + 10^{-8} \left( \frac{1}{2} \cdot 10^6 \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 10^{-14} \frac{1}{2} \cdot 10^6 + 10^{-14} \left( \frac{1}{2} \cdot 10^6 \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10^6 \left( \frac{3}{4} \cdot 10^{-2} - \frac{3}{2} \cdot 10^{-2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot 10^6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Этот расчет показывает, что при выбранных коэффициентах исходной модели начальное значение численности занятого населения равно 0,5 млн. чело-

век уменьшается на 0,75% на первом временном шаге моделирования. Этим расчетом мы хотели показать на разумность выбранных параметров модели.

Уравнение (6), с учетом выражений (9) и  $N_1/N = N_1/10^6 n = x$ , примет вид

$$x^3 - \left(\frac{\lambda_1}{3\lambda_2 n} + \frac{5}{3}\right)x^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 n} + \frac{4}{3}\right)x - \left(\frac{\lambda_1}{3\lambda_2 n} + \frac{1}{3}\right) = 0. \quad (10)$$

Вводя комплексный параметр  $\psi = \frac{\lambda_1}{3\lambda_2 n}$ , приходим к окончательному кубическому уравнению

$$x^3 - \left(\psi + \frac{5}{3}\right)x^2 + \left(3\psi + \frac{4}{3}\right)x - \left(\psi + \frac{1}{3}\right) = 0. \quad (11)$$

Табулирование функции  $F(x) = x^3 - \left(\psi + \frac{5}{3}\right)x^2 + \left(3\psi + \frac{4}{3}\right)x - \left(\psi + \frac{1}{3}\right)$  на единичном отрезке  $[0; 1]$  показывает, что она носит монотонно — возрастающий характер, причем на концах этого отрезка функция  $F(x)$  принимает значения:  $F(0) = -\left(\psi + \frac{1}{3}\right)$ ,  $F(1) = \psi + \frac{1}{3}$ . В достаточно широком диапазоне изменения комплексного параметра  $\psi \in [0; 10]$ , нулевое значение функции  $F(x)$  варьировало в интервале изменения  $x$ , равным  $[0,3; 0,4]$ . Данные значения  $x$  являлись устойчивыми равновесными точками уравнения (5). Таким образом, в рассмотренном тестовом гипотетическом расчете равновесный уровень занятого населения составлял 30—40% от общей численности рабочей силы. Можно предположить, что если мы увеличим коэффициенты вероятностной функции поиска работы  $W_1(t)$ , тогда автоматически поднимется равновесный уровень занятого населения. Вместо набора параметров (9) мы введем следующий набор параметров:

$$k_1 = 10^{-6} \lambda_1, k_2 = 10^{-12} \lambda_2, k_3 = k_4 = 10^{-8} \lambda_1, \quad (12)$$

$$k_5 = k_6 = 10^{-14} \lambda_2, N = 10^6 n$$

В этом случае уравнение (6) примет вид

$$x^3 - \left(\frac{100}{102} \psi + \frac{302}{102}\right)x^2 + \left(\frac{201}{102} \psi + \frac{301}{102}\right)x - \frac{100}{102} (\psi + 1) = 0, \quad (13)$$

где  $\psi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 n}$  (в прошлом случае  $\psi = \frac{\lambda_1}{3\lambda_2 n}$ ).

Численные эксперименты с этим уравнением при  $0 \leq \psi \leq 10$ ,  $0 \leq x \leq 10$ , показали, что устойчивые равновесные его решения лежат в интервале от 0,8 до 0,9. Таким образом, в новых численных расчетах равновесный уровень занятого населения составил 80—90%.

Дальнейшее развитие модели (1) может идти по пути совершенствования вероятностных функций. Например, в некоторых одномерных моделях популяционной динамики прирост численности популяции за счет рождаемости описывается распределением Пуассона, так как предполагается, что процесс поиска брачных партнеров является пуассоновым [4]. Аналогично, в нашем случае, процесс поиска свободных рабочих мест можно представить этим же процессом. В заключении отметим, что рассматривая взаимодействия рынков труда для двух секторов экономики или двух территориальных образований (регионов, стран), можно строить двумерные модели динамических систем (динамические системы второго порядка).

#### Литература

1. *Васильев А.Н.* Модель самоорганизации рынка труда // Экономика и математические методы. — М. — 2001. — т.37, № 2. — С.123-127.
2. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. — М.: Мир, 1984. — 350 с.
3. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 607 с.
4. *Свирижев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987. — 368 с.