УДК 517.983.23

А.В. ГЛУШАК

A.V. GLUSHAK

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ

CRITERION FOR UNIQUENESS OF SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR ABSTRACT DEGENERATE EQUATIONS

Для абстрактных вырождающихся уравнений на конечном интервале рассматриваются граничные задачи с условиями Дирихле и Неймана. Устанавливается критерий единственности решения.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, граничные задачи, критерий единственности.

For abstract degenerate equations on a finite interval, boundary-value problems with the Dirichlet and Neumann conditions are considered. A criterion for the uniqueness of a solution is established.

Keywords: degenerate equation, boundary value problems, uniqueness criterion.

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории дифференциальных уравнений и давно привлекают внимание широкого круга исследователей (см. [1-3] и имеющуюся в них библиографию). Отдельные виды таких уравнений подробно и глубоко изучены. Однако для уравнений второго порядка вырождающихся в уравнение первого порядка некоторые вопросы, в частности, случай операторных коэффициентов (абстрактные уравнения в банаховом пространстве) и критерий единственности граничных задач, требуют дальнейшего исследования.

Пусть E - комплексное банахово пространство и A - линейный замкнутый оператор в E, область определения $D\ \{A\ )$ которого не обязательно плотна в E. Мы будем изучать граничные задачи на конечном интервале .

Постановка граничных условий для вырождающегося уравнения

$$Uu''\{t) + \ \wedge u'\{t) = Au\{t), \ O < t < T \tag{1}$$

в точке вырождения зависит от коэффициентов b и уравнения и эти условия будут приведены далее.

Граничные условия в точке для всех рассматриваемых случаев изменения указанных коэффициентов одинаковы и имеют вид

(2)

где - действительные числа,

Поскольку на оператор A наложены весьма общие условия, то в этой работе вопросов разрешимости граничных задач мы, естественно, не касаемся.

1. Слабо вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения

Пусть $0 < 7 < 2$, Ьё E. Значение параметра O < 7 < 2 и означает слабое вырождение, в отличие от случая сильного вырождения , который далее также будет рассмотрен в работе. При 7 = 2 получается уравнение Эйлера, которое, как известно, сводится к невырождающемуся уравнению.

Постановка граничных условий в точке вырождения зависит от коэффициента b. При рассмотрим задачу определения функции C^({ O,T] , E), принадлежащей D(A) при tG(O,T) , удовлетворяющей уравнению (1), условию (2), а также граничному условию Дирихле

$$u\ (\ O\ ) = U_q\ , \qquad u_0 \in E. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$\kappa = bv - V + 1, \quad V = \frac{}{2-7}, \quad I = vT^!^.$$

$$r.-.(U) = r\left(\frac{/3 - \kappa\backslash}{}\right)\left(\frac{/tVI\backslash}{}\right] \quad \frac{k/2-1/2}{h/2-k/2\{p^l^>}$$

где Г (■) - гамма-функция Эйлера, /р(•) - модифицированная функция Бесселя.

Функцию $Y2- 1c(t,^)$ называют нормированной функцией Бесселя и используют

также обозначение $j\ i_{/2}\text{-}fc/_2(tVJ)$.

Сформулируем теперь критерий единственности решения граничной задачи (1)-(3).

Теорема 1. Пусть $0 < y < 2$, Ь < 1 и A - линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1) - (3) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

$$^(Я) = (a + P(1 - \kappa)T\text{-}У/^)У2\text{-}МЛ) +$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Нули функции (Я) при Ь < 1 удобно определять равенством = — κm, где

- корни уравнения

$$\kappa^{"/2}\text{-}1^{/2}((2a + /?(1 - \kappa)T\text{-}y^{/2})j,/2\text{-}k/2(1\kappa) + 2PT\text{-}У^{/2}\kappa Л/2\text{-},/2(1\kappa)) = 0' \quad (4)$$

а - 1р функция Бесселя первого рода.

Например, если $/) = 0'\ Ь = -$, то уравнение (4), κm и Я„1 соответственно принимают вид

$$\sin ц. = 0, \quad \kappa m = Л J, \quad Яm = -(7гт J)^{fnm\backslash} \quad о \quad 'Ш C N.$$

Таким образом, чтобы решить вопрос о единственности решения рассматриваемой граничной задачи, следует определить собственные значения оператора A и выяснить их принадлежность множеству нулей функции $Y^^\ f\ '\ ^у$ (Я). Многочисленные примеры нахождения собственных значений для дифференциальных операторов A, действующих по пространственным переменным можно найти, например, в гл. 2 [4], и в каждом конкретном случае их следует сравнить с нулями функции .

Мы рассмотрим пример действующего по пространственной переменной х сингулярного оператора A.

Для заданного на множестве функций

$$D(A) = Я2(0Д) \Pi ЯоЧОД), E = L2(0,1)$$

дифференциального оператора Бесселя , где

$$+ \frac{q\ d}{X\ dx}\text{Г:ТГ'}\ 4 > 0,$$

единственность решения рассматриваемых граничных задач для гиперболического уравнения сводится к исследованию расположения нулей функции $/^\ /_2\ -\ ]\_\ /\ _2\ (Vz)$, которые являются собственными значениями оператора , и нулей функции

В частности, при предстоит исследовать расположения нулей функций $V2\text{-}i/2(Vz)$ и $^l/2\text{-}fc/2(VA)$, $\kappa = Ьт - v + 1'\ v = \frac{}{2-y}$. В зависимости от параметров и , указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на , поэтому единственность решения граничных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулей функций Бесселя см., например, п. 2 работы [5]. Отметим также, что важную роль при исследовании единственности играют и промежутки изменения переменных и

О < X < d, поскольку при этом нули каждой из функций Бесселя меняют свое положение. Аналогичные факты при решении задачи Дирихле для гиперболических уравнений в частных производных установлены ранее в [6].

В случаях $A = — Bq$^^ или $A = iBq$ ^, где i - мнимая единица, собственные значения оператора A лежат либо на (О, + оо) , либо на мнимой оси и не попадают на (—оо. О) , поэтому соответствующие граничные задачи имеют единственное решение.

■ y

Пусть теперь в уравнении (1) коэффициент b > -. В этом случае вместо условия (3) зададим весовое условие Неймана

$$\lim t\text{^+o} \qquad = U2, \qquad U2 \; E \; E, \qquad (5)$$

и тогда справедлив следующий критерий единственности.

Теорема 2. Пусть О < y < 2 , Ь > $\frac{Y}{}$- и A - линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1), (2), (5) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

$$= aУ_„(1.Л) +$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Для значений параметра b, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{Y}{\backslash} < ь < 1.$$

одновременно справедливы и теорема 1 с условием Дирихле при , и теорема 2 с весовым условием Неймана при .

2. Сильно вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения

В случае сильного вырождения постановка граничных условий в точке вырождения t = О также зависит от коэффициента b. Введём обозначения:

$$p = 1 + \frac{2(Ь-1)}{y-2} \qquad I = \frac{J-TYI2-}{y-2}$$

Теорема 3. Пусть y>2 , Ь < 1 и A - линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1)-(3) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

$$= (a+p(1-p)TУ/\text{^-^})У2-p(1,Л)+pTУ/\text{^-^}У\text{^\_^}(1,Л)$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Теорема 4. Пусть y>2 , $b > 2$ — - и A - линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (1), (2), (5) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

$$Y\text{“}f\text{^}(l) = aУp(1,Л)+/3TУ/\text{^-\%}(1,Л)$$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Для значений параметра b, удовлетворяющих неравенству

$$2-\frac{У}{-} < Ь < 1,$$

одновременно справедливы и теорема 3 с условием Дирихле при t = О , и теорема 4 с весовым условием Неймана при

3. Абстрактный аналог вырождающегося по пространственной переменной дифференциального уравнения со степенным характером вырождения

При рассмотрим уравнение

$$u''(t) = \quad (t), 0 < t < T \tag{6}$$

и, наряду с условием (2), зададим условие Неймана в точке t = 0

$$\lim_{t \to +0} u'(t) = U_2, \quad U_2 \in E. \tag{7}$$

Если A - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, например, 4u ($t,x) = u'_{xx}$ (t,x) , то уравнение (6) является вырождающимся гиперболическим, обобщающим уравнение Трикоми, но имеет другой характер вырождения по сравнению с уравнениями предыдущих пунктов. Поэтому абстрактное уравнение (6) естественно также называть вырождающимся. Введём обозначения:

ц) + 2 ц) + 2

Теорема 5. Пусть ю > 0 и A - линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что граничная задача (2), (6), (7) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

(Я) = $a Г^(1,Л) + ^T^/^Г'(1,Л)$

не являлся бы собственным значением оператора A.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения - М.: Наука. 1966.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа - М.: Наука. 1970.
3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. - МГУ. Москва. 2010.
4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. - Учеб. пособие. М. Изд-во МГУ. 1998.
5. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления - Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2014 - Т. 54, № 9 - С. 1387-1441.
6. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков - Матем. заметки. - 2015 - Т. 97, № 2 - С. 262-276.

Глушак Александр Васильевич
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
E-mail: glushak@bsu.edu.ru