УДК 517.983.23

В.Б. ВАСИЛЬЕВ, О.А. ТАРАСОВА
V.B. VASILYEV, O.A. TARASOVA

О ДИСКРЕТНЫХ РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ON DISCRETE SOLUTIONS FOR ELLIPTIC PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Рассматривается дискретный аналог простейшей краевой задачи для эллиптического псевдодифференциального уравнения в полупространстве с граничным условием Дирихле в пространствах Соболева - Слободецкого. На основе теории дискретных краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений приведено сравнение дискретных и непрерывных решений для одной модельной краевой задачи.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, дискретное решение, дискретная краевая задача, скорость аппроксимации.

We consider discrete analogue for simplest boundary value problem for elliptic pseudo-di fferential equation in a half-space with Dirichlet boundary condition in Sobolev - Slobodetskii spaces. Based on the theory of discrete boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations we give a comparison between discrete and continuous solutions for certain model boundary value problem.

Keywords: Digital pseudo-differential operator, Discrete solution, Discrete boundary value problem, Rate of approximation.

Пусть Z"" - целочисленная решетка в R h > O, A^ - дискретный псевдодифференциальный оператор с символом A,^(, определенный на функциях дискретного аргумента $Ud(x)$, x G hZ" [1] .

Исследуется дискретное уравнение

$$AdUd = vd, \qquad (1)$$

его разрешимость и аппроксимационные свойства для малых значений h.

Обозначим $(2 = /I^{-2} \int_Z^{UL} -ihfk \_^2$ - дискретным аналогом пространства Шварца $S(hR")[1]$.

Определение 1. Пространство $(hZ")$ является замыканием пространства по норме

1/2

ll^dlL

где

Далее, пусть - область, и - дискретная область.

Определение 2. Пространство $Я^(Dd)$ состоит из функций дискретного аргумента из Я^ (hZ") , носитель которых содержится в $D^$. Норма в пространстве Я^ (D_d) индуцируется нормой пространства Пространство состоит из функций дискретного аргумента Ud и эти функции должны допускать продолжение во все . Норма задается формулой

$$W^dWt = infWluaWs,$$

где берется по всем продолжениям

Будем рассматривать класс символов Я^., который включает в себя символы, удовлетворяющие следующему условию:

4(1 + < |АЦ?)1 < 4(1+

с положительными константами c]_ , c]_ не зависящими от h и символа A^(O▮

Обозначим П + = {z G C : z = ^„ + tr, G [—тт;тт] , + т > 0}.

Определение 3. Периодической факторизацией эллиптического символа ^d(O ^ называется его представление в виде

$$AM) = Aa,Л0Aa.-(0.$$

где сомножители $A^{\wedge}$ допускают аналитическое продолжение в полуполосы h Я+ по последней переменной для почти всех фиксированных ^ ' G hr""^ ^ и удовлетворяют оценкам

$$l4U0l<cr(i + ri)- \quad \text{гe} \quad l4U0l\leq c,(i + riy \quad \text{a—гe}$$

с константами $c^{\wedge}$, $C2$, не зависящими от Я,

$$(2 = /14\ ^{\wedge} \quad /m-1 \quad - if + \quad \text{ч} \quad + ir\ G\ НПл \quad \backslash A:=1 \quad /$$

Число $ds.GR$ называется индексом периодической факторизации.

Такое представление полностью определяет картину разрешимости уравнения (1). Во-первых, для эллиптического символа A ^(^) такая периодическая факторизация существует всегда (см. [2, 3]).

Во-вторых, индекс периодической факторизации определяет, сколько дополнительных условий требуется для решения u ^ или для правой части [1, 4].

В-третьих, уравнение (1) однозначно разрешимо в дискретном полупространстве для произвольной правой части при условии

$$I\ d—S|<1/2. \qquad (2)$$

Рассмотрим более сложный случай, когда условие (2) не выполняется. В этой ситуации есть две возможности, и мы рассмотрим один случай, который приводит к типичным краевым задачам. Мы используем результат из [1] в простейшей форме.

Теорема 1. Пусть эе — s = п -Ъ 5, п G iV, $|5| < 1/2$▮ Тогда образ Фурье для ядра оператора A ^ состоит из следующих функций:

$$йй(_0=ЛТ+(\sum_{к=0}^{п-1}{}_0{}^{\wedge}г»(па.$$

где произвольные функции из -1/2.

Справедлива априорная оценка

$$Z^{71-1}\ [\ Cfc]_5\ fe,$$

где [•] $_{s,\wedge}$ обозначает норму в пространстве $Я^5{}^{\wedge}(\ hГ"\ “\ ^)$ и постоянная a не зависит от h.

Здесь и ниже мы рассмотрим псевдодифференциальные операторы с символами А удовлетворяющие условию

$$Ci(1+|^|)“<|A(OI<C2(1 + |^|)“.$$

Далее символ будет определен следующим образом. Мы берем сужение А на куб и периодически продолжаем его на все . Мы рассматриваем такой оператор как аппроксимирующий оператор для А. Для произвольной функции u обозначение Q ^и будет обозначать такую же конструкцию. Так, например, чтобы найти приближенное дискретное решение уравнения

$$(Аи)(x) = v(x),\ X\ E\ D,$$

для будем использовать следующее дискретное решение:

$$^d(x) = I\ e^{\wedge\wedge\wedge\wedge}A-^{(Ov(0\ e\ hZ^{\wedge},}_{(2ny}$$

$nm™$-

так что нам не нужно искать приближенное решение для конечной системы линейных алгебраических уравнений. Для нашего случая нам нужно применить любые кубатурные формулы для вычисления последнего интеграла и кубатурную формулу для вычисления преобразования Фурье v((). Для v E S (Rдискретное решение Ud(x) стремится к u(x) очень быстро при Л -> О [5].

Рассмотрим случай эе — s = l-b5, | 5 |<1 / 2 . Согласно теореме 1 ядро оператора Ad содержит только одну произвольную функцию, так что нам нужно одно дополнительное условие.

Непрерывный аналог дискретной краевой задачи (x = (x, x,^))

$$(A\,dUd)(X) = O,\ xE\ D\ d, \tag{3}$$

$$Ud(X,0) = gd(x),\ X\ E\ hZ^{-}{}^{\wedge} \tag{4}$$

выглядит следующим образом (x = (x,x^n)):

$$(A\,u)\ (x) = 0,\ x\ E\ R\ !1'' \tag{5}$$

$$U\ (x,\ 0\ ) = g\ (x)\ ,\ x\ E\ R^{\wedge-}{}^{\wedge}, \tag{6}$$

где А - псевдодифференциальный оператор с символом А (() [2] . Чтобы получить сравнение между дискретными и непрерывными решениями, напомним, как выглядит непрерывное решение. Если индекс факторизации равен ж и е — s = 1 + 5, | 5 |< 1 / 2 , то единственное решение задачи (5), (6) строится по формуле

$$й(о =$$

где А + ((', являются элементами факторизации символа А (^) [2],

$$+\ 00$$

$$б(п= I$$

предполагаем, что ь (^') А О, ' E R щ-^. Отметим, что это простейший вариант условия Шапиро - Лопатинского [2].

Имеем следующее дискретное решение [3]:

$$,$$

$$Ь\,л\,Ю = \int_{-hn}^{+hn}$$

для которого мы выбираем специальные приближения. Берем g d = Q^g и A d , + (^ ',^m) мы выбираем как сужения А+(^ ' , ^$_{т}$) на h Гт . Периодический символ

$$Ad(0=Ad,M''^{\wedge}m)Ad,M',^{\wedge}ml$$

удовлетворяет всем условиям периодической факторизации с тем же индексом ж. Более того, и совпадает с и соответственно на

Теорема 2. Пусть е > 1,s > m / 2,g E ~ (R т- ^) . Сравнение решений задач (3), (4) и (5), (6) дается следующим образом

$$|и(x) — Ud(,x)|\ <\ C\ h\ ®\ “\ ^\ ,\ X\ G\ hZ"^.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vasilyev, A.V., Vasilyev, V.B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space. - Math. Model. Anal. 23(3), 492-506, 2018.

2. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.

3. Vasilyev, A.V., Vasilyev, V.B. On some discrete boundary value problems in canonical domains. - In: Pinelas, S., Caraballo, R., Kloeden, P., Graef, J. R. (eds.) Differential and Difference Equations and Applications. ICDDEA, Amadora, Portugal, June 2017. Springer Proc. Math. & Stat. V 230, pp. 569-579, Springer, Cham, 2018.

4. Vasilyev, A.V., Vasilyev, V.B. On some discrete potential like operators. - Tatra Mt. Math. Publ. 71, 195-212, 2018.

5. Vasilyev, V.B. Digital approximations for pseudo-differential equations and error estimates. In: Nikolov, G., Kolkovska, N., Georgiev, K. (eds.) Numerical Methods and Applications. NMA 2018. LNCS, vol 1 1 1 8 9 , pp. 483-490. Springer, Cham, 2019.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Тарасова Оксана Александровна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Старший преподаватель кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
E-mail: tarasova_o@bsu.edu.ru