ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Факультет математики и естественнонаучного образования
Кафедра математики

ИЗУЧЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01.
Педагогическое образование, профиль Математика,
заочной формы обучения, группы 02041451

Селюковой Анны Викторовны

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры
математики Витохина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования: понятия «больше» и «меньше» наряду с понятием равенства возникли в связи со счетом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Понятиями неравенства пользовались уже древние греки. Архимед (III в. до н. э.), занимаясь вычислением длины окружности, выяснил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Другими словами, Архимед указал границы числа π:

$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. [2]

Ряд неравенств приводит в своем знаменитом трактате «Начала» Евклид. Он, например, доказывает, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического и не меньше их среднего гармонического, т. е. что верно неравенство: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

В «Математическом собрании» Папы Александрийского (III в.) оказывается, что если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (a, b, c. d - положительные числа), то ad>bc. Однако все эти рассуждения проводили словесно, опираясь в большинстве случаев на геометрическую терминологию. Современные знаки неравенств появились лишь в XVII— XVIII вв. Знаки < и > ввел английский математик Т. Гарриот (1560—1621), знаки ≤ и ≥ французский математик П. Бугер (1698—1758). [30]

Однако, и в настоящее время неравенства играют важную роль в математике. Это сравнительно новая тема для курса математики средней школы, которая ранее не входила в список изучаемых тем и, на данном этапе, недостаточно разработана.

Современные школьники начинают знакомиться с неравенствами еще в начальной школе, где используются задания типа: «сравнить числа», «сравнить значения выражений», «сравнить выражения не вычисляя их значения», решают логические задачи, предполагающие составление числовых неравенств.

Далее содержание темы «Неравенства» постепенно углубляется и расширяется. Так, например, процентное содержание неравенств от всего изучаемого материала в 7 классе составляет 20%, в 8 классе – 25%, в 9 классе – 30%, в 10-11 классах - 38%.

В школьном курсе алгебры изучаемые классы неравенств можно разделить на группы: линейные, рациональные, иррациональные, логарифмические, показательные и тригонометрические неравенства.

Группа рациональных неравенств получает достаточное развитие, вплоть до формирования прочных навыков решения, уже в курсе алгебры неполной средней школы.

Остальные же группы неравенств в этом курсе только начинают изучаться, причем рассматриваются далеко не все классы, а окончательное изучение происходит в курсе алгебры и началах анализа 10-11 классов. Изучаются только неравенства основных классов, кроме того, ряд задач из школьного курса сводятся к составлению и решению неравенств: нахождение области определения функции; исследование функции (монотонность, ограниченность функции).

При изучении неравенств большое внимание уделяется вопросам обоснования процесса решения конкретных задач. На начальных этапах изучения курса алгебры эти обоснования имеют эмпирический, индуктивный характер. Далее, по мере накопления опыта решения неравенств различных классов, все большую роль приобретает дедуктивное обоснование процесса решения.

Наконец, достигнутый уровень владения различными способами решения позволяет выделить наиболее часто используемые преобразования: равносильность и логическое следование.

Кроме того, в ходе изучения неравенств широко используется метод интервалов, наглядно-графический метод, функциональный метод и метод рационализации неравенств. Наглядно-графический метод применяют, когда неравенство нельзя решить аналитически. Под функциональным методом решения неравенств понимают метод решения, опирающийся на использование свойств функций, входящих в неравенство. [10]

Цель исследования – проанализировать тему неравенств в курсе математики средней школы.

Объект исследования – обучение математике в курсе средней школы.

Предмет исследования – методы решения неравенств в курсе математики средней школы.

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Раскрыть сущность и понятие неравенств.
2. Выделить особенности методов решения неравенств
3. Рассмотреть решение различных видов неравенств.
4. Провести анализ заданий из ЕГЭ на тему нерванства.
5. Разработать технологическую карту по теме «Логарифмические неравенства» и провести анализ проведенного урока.

Для решения поставленных задач и проверки выдвинутой гипотезы использовался комплекс методов исследования:

– теоретические (анализ методической литературы);

– эмпирические (педагогический эксперимент).

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

1.1 Основное понятие, свойства и классификация неравенств

1.1.1 Основное понятие неравенств

Неравенство [inequality] — соотношение между числами (или любыми математическими выражениями, способными принимать численное значение), указывающее, какое из них больше или меньше другого. Над этими выражениями можно по определенным правилам производить следующие действия: сложение, вычитание, умножение и деление (причем при умножении или делении на отрицательное число смысл его меняется на противоположный).

На письме приняты несколько знаков для записи неравенств. Первый из них – знак не равно, он представляет собой перечеркнутый знак равно: ≠. Знак не равно ставится между неравными объектами. Например, запись |AB|≠|CD| означает, что длина отрезка AB не равна длине отрезка CD. Аналогично, 3≠5 – три не равно пяти.

Аналогично используются знак больше > и знак меньше <. Знак больше записывается между большим и меньшим объектами, а знак меньше – между меньшим и большим. Приведем примеры использования этих знаков. Запись 7>1 читается как семь больше одного, а записать, что площадь треугольника ABC меньше площади треугольника DEF с использованием знака ≤ можно как $S_{ABC}<S_{DEF}$.

Также широко в обиходе используется знак больше или равно вида ≥, а также знак меньше или равно ≤.

Алгебраические записи со знаками ≠ , < ,> , ≤ , ≥ , аналогичные рассмотренным выше, называют неравенствами. Более того, имеет место определение неравенств в смысле вида их записи: неравенства – это имеющие смысл алгебраические выражения, составленные с использованием знаков $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Знаки меньше $<$ и больше $>$ называют знаками строгих неравенств, а записанные с их помощью неравенства – строгими неравенствами.

Знаки меньше или равно $\leq$ и больше или равно $\geq$ называют знаками нестрогих неравенств, а составленные с их использованием неравенства – нестрогими неравенствами.

На практике с помощью нестрогих неравенств удобно моделировать ситуации, которые можно описать фразами «не больше» и «не меньше». Фраза «не больше» по сути означает меньше или столько же, ей отвечает знак меньше или равно вида $\leq$. Аналогично, «не меньше» значит столько же или больше, ей соответствует знак больше или равно $\geq$.

Отсюда становится ясно, почему знаки $<$ и $>$ получили название знаков строгих неравенств, а $\leq$ и $\geq$ - нестрогих. Первые исключают возможность равенства объектов, а вторые – допускают ее.

К примеру, с помощью знака $\geq$ можно записать тот факт, что модуль числа a является неотрицательным числом, как $|a|\geq 0$. Еще пример: известно, что среднее геометрическое двух положительных чисел a и b меньше или равно их среднему арифметическому, иными словами, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Неравенство является верным, если оно соответствует введенному выше смыслу неравенства, в противном случае оно является неверным. Например, $3\neq 3$ – это неверное неравенство, т.к. числи 3 и 3 равные. Другой пример: пусть S – это площадь некоторой фигуры, тогда $S<-7$ – неверное неравенство, т.к. известно, что площадь фигуры по определению выражается неотрицательным числом. И еще пример неверного неравенства: $|AB|>|AB|$. А вот неравенства $-3<12$, $|AB|\leq|AC|+|BC|$ и $|-4|\geq 0$ – верные. Первое из них отвечает правилу сравнения чисел с разными знаками, второе – выражает неравенство треугольника, а третье – согласуется с определением модуля числа. Отметим, что наряду со словосочетанием «верное неравенство» используются такие словосочетания как: «справедливое неравенство», «имеет место неравенство» и т.п., означающие одно и то же.[29]

1.1.2 СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

На практике работать с неравенствами позволяет ряд свойств числовых неравенств. Они вытекают из введенного нами понятия неравенства. По отношению к числам это понятие задается следующим утверждением, которое можно считать определением отношений < и > на множестве чисел (его часто называют разностным определением неравенства):

- $a > b$ тогда и только тогда, когда разность $a-b$ является положительным числом;
- $a < b$ тогда и только тогда, когда разность $a-b$ – отрицательное число;
- $a = b$ тогда и только тогда, когда разность $a-b$ равна нулю.

Это определение можно переделать в определение отношений ≤ и ≥. Вот его формулировка:

- $a \geq b$ тогда и только тогда, когда $a-b$ – неотрицательное число;
- $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a-b$ – неположительное число.[3]

Числовым неравенствам, записанным с использованием знаков < и >, характерно:

- Свойство антирефлексивности, выражающееся в том, что для любого числа a неравенства $a<a$ и $a>a$ – неверные. Действительно, известно, что для любого числа a выполняется равенство $a-a=0$, откуда в силу разностного определения равных чисел следует равенство $a=a$. Следовательно, $a<a$ и $a>a$ – неверные неравенства. Например, $3<3$ и $-4\frac{14}{15} > -4\frac{14}{15}$ - неверные неравенства.

- Свойство антисимметричности: если числа a и b такие, что $a<b$, то $b>a$, и если $a>b$, то $b<a$. Обоснуем его, обратившись к данному выше определению отношений «больше» и «меньше». Начнем с первой части. Так как $a<b$, то $a-b$ – отрицательное число. При этом $b-a=-(a-b)$ – положительное число, как число, противоположное отрицательному числу $a-b$. Следовательно, $b>a$. Аналогично доказывается и вторая часть рассматриваемого свойства.

Приведем пример: из неравенства $5<11$ вытекает, что $11>5$, а числовое неравенство $-0,27>-1,3$ можно переписать как $-1,3<-0,27$.

И перед переходом к следующему свойству заметим, что свойство антисимметричности позволяет читать неравенства как слева направо, так и справа налево. А точнее на его базе можно менять местами части числового неравенства, изменив при этом знак неравенства на противоположный (< на >, а > на <).

- Свойство транзитивности: если числа a, b и c таковы, что $a<b$ и $b<c$, то $a<c$, и если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

Докажем его первое утверждение. Условия $a<b$ и $b<c$ означают, что $a-b$ и $b-c$ – отрицательные числа. Разность $a-c$ можно представить как $(a-b)+(b-c)$, а это есть отрицательное число как сумма двух отрицательных чисел $a-b$ и $b-c$, что следует из правила сложения отрицательных чисел. Таким образом, $a-c$ – отрицательное число, откуда следует, что $a<c$, что и требовалось доказать. Абсолютно аналогично доказывается и вторая часть свойства транзитивности.

Покажем примеры применения разобранного свойства неравенств. Например, из неравенств $-1<5$ и $5<8$ можно заключить, что $-1<8$. Аналогично, из числовых неравенств $\frac{1}{2}>\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{8}>\frac{1}{32}$ вытекает, что $\frac{1}{2}>\frac{1}{32}$.

Что касается числовых неравенств, записанных при помощи знаков нестрогих неравенства $\leq$ и $\geq$, то они обладают свойством рефлексивности, т.к. неравенства $a \le a$ и $a \ge a$ включают в себя случай равенства $a=a$. Также им свойственны такие свойства как: антисимметричность и транзитивность.

Итак, числовые неравенства, записанные при помощи знаков $\le$ и $\ge$, обладают свойствами:

- рефлексивности $a \ge a$ и $a \le a$ – верные неравенства;
- антисимметричности, если $a \le b$, то $b \ge a$, и если $a \ge b$, то $b \le a$.
- транзитивности, если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$, а также, если $a \ge b$ и $b \ge c$, то $a \ge c$.

Дополним основные свойства числовых неравенств еще серией результатов, имеющих большое практическое значение. На них основаны методы оценки значений выражений, на них базируются принципы решения неравенств и т.д.

В этом пункте свойства неравенств будем формулировать только для одного знака строгого неравенства, но стоит иметь в виду, что аналогичные свойства будут справедливы и для противоположного ему знака, а также для знаков нестрогих неравенств. Ниже мы сформулируем и докажем такое свойство неравенств: если $a<b$ и c – любое число, то $a+c<b+c$. Наряду с ним будут справедливы и такие свойства:

- если $a>b$, то $a+c>b+c$;
- если $a \le b$, то $a+c \le b+c$;
- если $a \ge b$, то $a+c \ge b+c$.

Для удобства представим свойства числовых неравенств в виде списка, при этом будем давать соответствующее утверждение, записывать его формально с помощью букв, приводить доказательство, после чего показывать примеры использования. А в конце сведем все свойства числовых неравенств в таблицу.

- Прибавление (или вычитание) любого числа к обеим частям верного числового неравенства дает верное числовое неравенство. Другими словами, если числа a и b таковы, что $a<b$, то для любого числа c справедливо неравенство $a+c<b+c$.

Для доказательства составим разность левой и правой частей последнего числового неравенства, и покажем, что она отрицательна при условии $a<b$. Имеем $(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b$. Так как по условию $a<b$, то $a-b<0$. Следовательно, $(a+c)-(b+c)<0$, откуда $a+c<b+c$.

На доказательстве этого свойства числовых неравенств для вычитания числа c не останавливаемся, т.к. на множестве действительных чисел вычитание можно заменить прибавлением противоположного числа $-c$. [9]

Например, если к обеим частям верного числового неравенства $7>3$ прибавить число 15, то получится верное числовое неравенство $7+15>3+15$, что то же самое, $22>18$.

- Если обе части верного числового неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное число c, то получится верное числовое неравенство. Если обе части неравенства умножить (или разделить) на отрицательное число c, и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство. В буквенном виде: если для чисел a и b выполняется неравенство $a<b$ и c – положительное число, то $a\cdot c<b\cdot c$, а если c– отрицательное число, то $a\cdot c>b\cdot c$.

Доказательство. Начнем со случая, когда $c>0$. Составим разность левой и правой частей доказываемого числового неравенства: $a\cdot c-b\cdot c=(a-b)\cdot c$. Так как по условию $a<b$, то $a-b<0$. А так как $c>0$, то произведение $(a-b)\cdot c$ будет отрицательным числом как произведение отрицательного числа $a-b$ на положительное число c (что следует из правила умножения чисел с разными знаками). Следовательно, $a\cdot c-b\cdot c<0$, откуда $a\cdot c<b\cdot c$. Вторая часть утверждения для $c<0$ доказывается аналогично.

На доказательстве рассмотренного свойства для деления обеих частей верного числового неравенства на одно и то же число c не останавливаемся, так как деление всегда можно заменить умножением на обратное число $\frac{1}{c}$.

Покажем пример применения разобранного свойства на конкретных числах. Например, можно обе части верного числового неравенства $4<6$

умножить на положительное число 0,5, что дает верное числовое неравенство $-4\cdot0{,}5<6\cdot0{,}5$, откуда $-2<3$. А если обе части верного числового неравенства $-8\leq12$ разделить на отрицательное число -4, и изменить знак неравенства $\leq$ на противоположный $\geq$, то получится верное числовое неравенство $-8:(-4)\geq12:(-4)$, откуда $2\geq-3$.

Из только что разобранного свойства умножения обеих частей числового равенства на число следуют два практически ценных результата. Сформулируем их в виде следствий.

Следствие 1. Если изменить знаки обеих частей числового неравенства и знак самого неравенства, то придем к верному неравенству, то есть, если $a<b$, то $-a>-b$.

Данное следствие соответствует умножению обеих частей числового равенства на минус единицу. Обычно оно используется для перехода от неравенств, в которых находятся отрицательные числа, к неравенствам с положительными числами. Например, если $-7<-1$, то $7>1$.

Следствие 2. Если обе части числового равенства являются положительными числами, то, заменив их обратными им числами, и изменив знак неравенства на противоположный будет получено верное числовое неравенство. То есть, если a и b – положительные числа, причем $a<b$, то $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Действительно, к последнему неравенству можно прийти, если обе части неравенства $a<b$ разделить на положительное число $a\cdot b$. Приведем пример использования данного свойства: из верного неравенства 5>3/2следует неравенство $\frac{1}{5}<\frac{2}{3}$. Здесь нужно подчеркнуть, что для отрицательных a или b при условии $a<b$ неравенство $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ может быть неверным. К примеру, $-2<3$, но $-\frac{1}{2}>-\frac{1}{3}$ - неверное равенство.

Все разобранные в этом пункте свойства объединяет то, что сначала дано верное числовое неравенство, и из него посредствам некоторых манипуляций с частями неравенства и знаком получается другое верное числовое неравенство. Сейчас мы приведем блок свойств, в которых изначально дано не одно, а несколько верных числовых неравенств, а новый результат получается из их совместного использования после сложения или умножения их частей.

- Если для чисел a, b, c и d справедливы неравенства $a<b$ и $c<d$, то верным является и числовое неравенство $a+c<b+d$. Данное свойство числовых неравенств обычно формулируют в следующем виде: можно почленно складывать верные неравенства одного знака (под этим понимают, что все неравенства записаны с помощью одного знака, например, <, и под почленным сложением понимают сложение чисел, стоящих по одну сторону этого знака).

Докажем, что $(a+c)-(b+d)$ – отрицательное число, этим будет доказано, что $a+c<b+d$. По условию $a<b$ и $c<d$. Выше мы доказали свойство, позволяющее прибавлять к обеим частям числовых неравенств одно и то же число. Прибавим число *c* к обеим частям неравенства $a<b$, и число b – к обеим частям неравенства $c<d$, получаем $a+c<b+c$ и $b+c<b+d$. Из полученных неравенств по свойству транзитивности получаем: $a+c<b+d$, что и требовалось доказать.

По индукции это свойство распространяется на почленное сложение трех, четырех, и, вообще, любого конечного числа числовых неравенств. Так, если для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливы неравенства $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $\ldots$, $a_n<b_n$, то методом математической индукции можно доказать, что $a_1+a_2+\ldots+a_n<b_1+b_2+\ldots+b_n$.

Например, нам даны три верных числовых неравенства одного знака $-5<-2$, $-1<12$ и $3<4$. Рассмотренное свойство числовых неравенств позволяет нам констатировать, что неравенство $-5+(-1)+3<-2+12+4$ – тоже верное.

- Можно почленно умножать числовые неравенства одного знака, обе части которых представлены положительными числами. В частности, для двух неравенств $a<b$ и $c<d$, где a, b, c и d– положительные числа, справедливо числовое неравенство $a\cdot c<b\cdot d$.

Для доказательства можно умножить обе части неравенста $a<b$ на число c, и обе части неравенства $c<d$ – на число b, что дает верные числовые неравенства $a\cdot c<b\cdot c$ и $b\cdot c<b\cdot d$, из которых по свойству транзитивности следует, что $a\cdot c<b\cdot d$.

Указанное свойство справедливо и для умножения любого конечного числа верных числовых неравенств с положительными частями. То есть, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – положительные числа, причем $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, …, $a_n<b_n$, то $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n<b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n$.

Отдельно стоит заметить, что если в записи числовых неравенств содержатся неположительные числа, то их почленное умножение может приводить к неверным числовым неравенствам. Например, числовые неравенства $1<3$ и $-5<-4$ – верные и одного знака, почленное умножение этих неравенств дает $1\cdot(-5)<3\cdot(-4)$, что то же самое, $-5<-12$, а это неверное неравенство.

Следствие. Почленное умножение одинаковых верных неравенств вида $a<b$ с положительными a и b дает верное числовое неравенство $a^n<b^n$. [16]

1.2 Виды неравенств и способы их решения

1.2.1 Линейные неравенства

Линейное неравенство с одной переменной x – это неравенство вида $ax + b > 0$, когда вместо $>$ любой знак неравенства $<$, $\leq$, $\geq$, a и b являются действительными числами, где $a\neq0$ $b\neq0$.

Для того чтобы решить линейное неравенство вида $a\cdot x+b<0$ ($\leq$, $>$, $\geq$), необходимо применить равносильные преобразования неравенства. Коэффициент может быть равен или не равен нулю. Рассмотрим оба случая.

Алгоритм решения линейного неравенства $a\cdot x+b<0$ ($\leq$, $>$, $\geq$) при $a\neq 0$

- Число b будет перенесено в правую часть неравенства с противоположным знаком, что позволит прийти к равносильному $a\cdot x<-b$ ($\leq$, $>$, $\geq$);
- будет производиться деление обеих частей неравенства на число не равное 0. Причем когда a является положительным, то знак остается, когда a – отрицательное, меняется на противоположный.

Рассмотрим применение данного алгоритма на примерах.

Пример 1.1 Решить неравенство вида $6\cdot x+12\leq 0$.

Решение: Данное линейное неравенство имеет коэффициенты: a=6 и b=12. Значит, коэффициент a при x не равен нулю. Применяя выше сказанный алгоритм, решим исходное неравенство.

Необходимо перенести слагаемое 12 в другую часть неравенства с изменением знака перед ним. Тогда получаем неравенство вида $6\cdot x\leq -12$. Необходимо произвести деление обеих частей на 6. Знак не поменяется, т.к. 6 является положительным числом. Получаем, что $(6\cdot x):6\leq(-12):6$, что даст результат $x\leq -2$.

Неравенство вида $x\leq -2$ является равносильным. Соответственно, решение для $6\cdot x+12\leq 0$– это любое действительное число, которое меньше или равно 2. Ответ записывается в виде неравенства $x\leq -2$, или числового промежутка вида $(-\infty, -4]$.

Ответ: $x\leq -2$ или $(-\infty, -2]$.

Рассмотрим случай, когда a=0. Линейное выражение вида $a\cdot x+b<0$ является неравенством $\cdot x+b<0$, где на рассмотрение берется неравенство вида $b<0$, после чего выясняется, верное оно или нет.

Все основывается на определении решения неравенства. При любом значении x получаем числовое неравенство вида $b<0$, так как при подстановке любого t вместо переменной x, тогда получаем $0\cdot t+b<0$, где $b<0$. В случае, если оно верно, то для его решения подходит любое значение. Когда $b<0$ неверно, тогда линейное уравнение не имеет решений, так как не имеется ни одного значения переменной, которое привело бы к верному числовому равенству.

Все суждения рассмотрим в виде алгоритма решения линейных неравенств $0 \cdot x + b < 0$ ($\leq$, $>$, $\geq$). Числовое неравенство вида $b < 0$ ($\leq$, $>$, $\geq$) верно, следовательно исходное неравенство имеет решение при любом значении, а неверно тогда, когда исходное неравенство не имеет решений.

Пример 1.2. Решить неравенство $0 \cdot x + 7 > 0$.

Решение: Данное линейное неравенство $0 \cdot x + 7 > 0$ может принимать любое значение x. Следовательно получим неравенство вида $7 > 0$. Последнее неравенство считается верным, значит любое число может быть его решением.

Ответ: промежуток $(-\infty, +\infty)$.

Пример 1.3. Найти решение неравенства $0 \cdot x - 12{,}7 \geq 0$.

Решение: При подстановке переменной x любого числа получим, что неравенство получит вид $-12{,}7 \geq 0$. Оно является неверным. То есть $0 \cdot x - 12{,}7 \geq 0$ не имеет решений.

Ответ: решений нет.[21]

Рассмотрим решение линейных неравенств, где оба коэффициента равняются нулю.

Пример 1.4. Определить не имеющее решение неравенство из $0 \cdot x + 0 > 0$ и $0 \cdot x + 0 \geq 0$.

Решение: При подстановке любого числа вместо x получим два неравенства вида $0 > 0$ и $0 \geq 0$. Первое является неверным. Значит, $0 \cdot x + 0 > 0$ не имеет решений, а $0 \cdot x + 0 \geq 0$ имеет бесконечное количество решений, то есть любое число.

Ответ: неравенство $0 \cdot x + 0 > 0$ не имеет решений, а $0 \cdot x + 0 \geq 0$ имеет бесконечное количество решений.

Линейные неравенства так же можно решить методом интервалов либо графическим способом, эти методы будут описаны ниже.[27]

1.2.2 Линейные неравенства с двумя переменными

Неравенства вида ax+by≤c, где и x и y - неизвестные переменные, а a, b и c - некоторые числа, причем и a и b отличны от нуля, называются линейными неравенствами с двумя переменными. Пример 1.5: y+2x<-3.

Пара чисел называется решением линейного неравенства с двумя переменными, если при их подстановке в уравнение получается верное равенство.

Свойства линейных неравенств с двумя переменными:

- К неравенству можно прибавлять с обеих сторон и вычитать из обеих сторон одно и то же число.
- Неравенство можно умножать и делить с обеих сторон на одно и то же, отличное от нуля, число, причем при умножении (делении на положительное число уравнение не меняет знак, а при умножение (деление) на отрицательное число меняет знак на противоположный.

Графиком линейного неравенства с двумя переменными является множество всех точек, которые являются решением данного неравенства. Построим график линейного неравенства y+2x<-3. Для этого выразим переменную y через x: y<-2x-3; Первым делом построим прямую y=-2x-3. Найдем две точки, принадлежащие нашей функции : пусть x=-1, тогда y=-1, x=-2, тогда y=1. Далее проведем прямую через точки (-1;-1) и (-2;1) и получим решение (на рисунке 1.2.1 отмечено серым цветом):

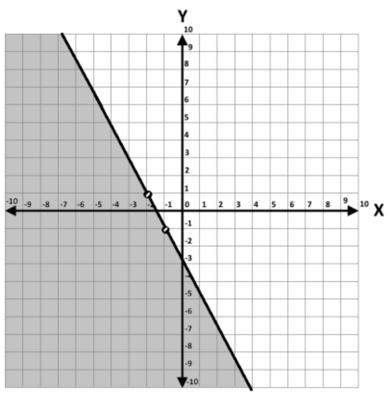


Рис. 1.2.1 Решение примера 1.5

Замечание: если бы в нашем исходном неравенстве знак был ≤, то сама прямая y=-2x-3 включалась бы в решение.

Далее рассмотрим систему неравенства с двумя переменными. Системой линейных неравенств с двумя переменными называется такая система неравенств, которая в своем составе имеет два и более линейных неравенств с двумя переменными. Решением системы линейных неравенств называется такая пара чисел, которая является решением всех неравенств, входящих в данную систему. Рассмотрим одну из таких систем неравенств:

Пример 1.6: $\begin{cases} y - 2x \leq -3 \\ y + 3x \geq 1 \end{cases}$. Для начала необходимо преобразовать систему, выражая переменную y через x : $\begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ y \geq -3x + 1 \end{cases}$. Построим две прямые на координатной плоскости y=2x-3 и y=-3x+1. Найдем по 2 точки для каждой функции соответственно: (0;-3) и (1;-1); (0;1) и (1;-2), проведем через них две прямые (Рис.1.2.2):

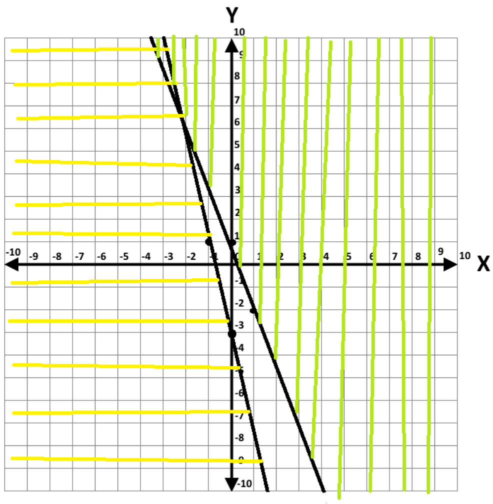


Рис. 1.2.2 промежуточное решение примера 1.6

Решение нашей системы неравенств отражено красным цветом на следующем рисунке (Рис. 1.2.3)[15]:

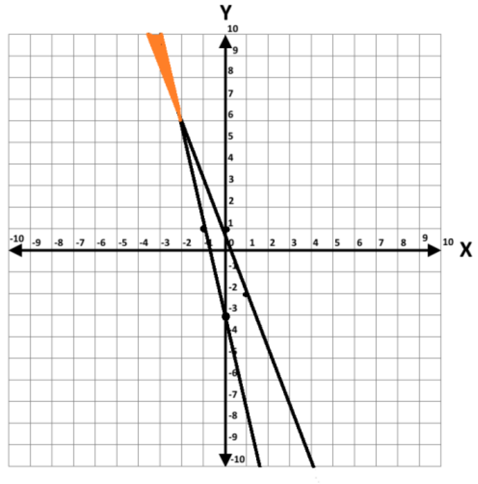


Рис. 1.2.3 Решение примера 1.6

1.2.2 Квадратные неравенства и неравенства высших степеней

Квадратным неравенством называется неравенство вида $Ax^2+Bx+C>0$ (<0).

Неравенством высшей степени называется неравенство вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + +a_1 x + a_0 > 0$ (< 0), при $n > 2$. Данные неравенства решаются методом интервалов. Метод интервалов — это специальный алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$. Алгоритм состоит из 3 шагов:

1. Решить уравнение $f(x) = 0$. Таким образом, вместо неравенства получаем уравнение, которое решается намного проще;
2. Отметить все полученные корни на координатной прямой. Таким образом, прямая разделится на несколько интервалов;
3. Выяснить знак (плюс или минус) функции $f(x)$ на каждом из интервалов. Для этого достаточно подставить в $f(x)$ любое число, которое будет правее отмеченных корней.

Пример 1.7. Решит неравенство $x^2-4>0$

Решение: Первым делом преобразуем левую часть неравенства, применив формулу разности квадратов и получим $(x-2)(x+2)>0$. В результате получили два корня 2 и -2. Отметим их на координатной прямой и определим знаки на промежутках (рис. 1.2.4).

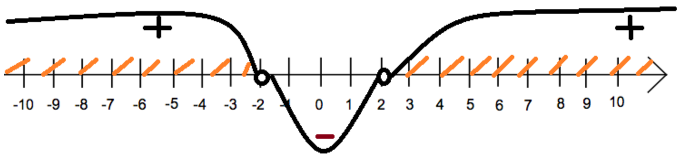


Рис. 1.2.4 Решение примера 1.7

Ответ: x∈(-∞;-2) ∪(2;+ ∞).

Пример 1.8. Решить неравенство $(x + 3)\cdot(x^2 – 4x + 4) > 0$.

Решение: $(x+3)(x^2-4x+4)>0 \Rightarrow (x+3)(x-2)^2>0$ (рис. 1.2.5)

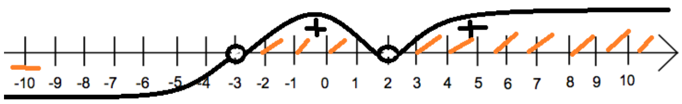


Рис.1.2.5 Решение примера 1.8

Ответ: x∈(-3;2) ∪(2;+ ∞).[17]

1.2.3 Рациональные неравенства

Рациональные неравенства- это неравенства, обе части которых являются рациональными выражениями. Решение всех рациональных неравенств сводится к двум основным шагам:

Шаг 1. Переносим все в одну сторону, приводим к общему знаменателю и раскладываем числитель и знаменатель на множители. Все множители должны быть «линейными», другими словами переменная в каждом из них – только в первой степени. Если какой-то из множителей нелинейный, и его невозможно разложить на линейные множители, от него надо избавиться.

Шаг 2. Решаем неравенство методом интервалов.

Пример 1.9.Решить неравенство: $\frac{x+5}{x+6} \leq \frac{4}{x} + 1$.

Решение: Первым делом необходимо определить область допустимых значений. В данном случае - знаменатель не может равняться 0, т.к. на 0 делить нельзя $\Rightarrow \begin{cases} x+6 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -6 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Так как у нас не строгое неравенство эти точки мы должны исключить из ответа. Далее нам необходимо перенести все в одну сторону и привести к одному знаменателю:

$$\frac{x(x+5)-4(x+6)-x(x+6)}{x(x+6)} \le 0; \quad \frac{x^2+5x-4x-24-x^2-6x}{x(x+6)} \le 0; \quad \frac{-5x-24}{x(x+6)} \le 0;$$

$\frac{5x+24}{x(x+6)} \le 0$. Полученное неравенство решим методом интервалов (Рис. 1.2.6).

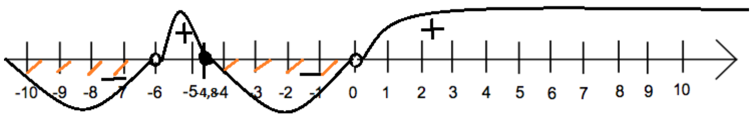


Рис. 1.2.6 Решение примера 1.9

Ответ: x$\in$(-∞;-6) ∪ [-4,8;0).

1.2.4 Иррациональные неравенства

Иррациональные неравенства - это неравенства, содержащие переменную под знаком корня. Рассмотрим несколько видов таких неравенств.

1. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Подкоренная функция должна быть неотрицательной, а функция может быть любой, поэтому заданное неравенство соответствует совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)>g^2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\ge 0. \end{cases}\end{array}\right.$

Пример 1.10 Решить неравенство $\sqrt{x^2-8} > x+4$.

Решение: В начале запишем совокупность неравенств:

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+4\ge 0, \\ x^2-8>(x+4)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x+4<0, \\ x^2-8\ge 0. \end{cases}\end{array}\right.$ и решим каждую из этих систем отдельно :

$$\begin{cases} x+4\ge 0, \\ x^2-8>(x+4)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x^2-8-x^2-8x-16>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x<-3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4;-3)$$

$\begin{cases} x+4<0 \\ x^2-8\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-4 \\ (x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})\ge 0 \end{cases}$ Решим эту систему неравенств методом интервалов (Рис. 1.2.7).

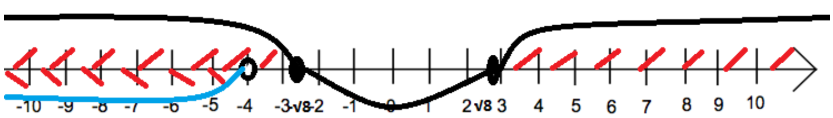


Рис. 1.2.7 Решение примера 1.10

Объединяя решения двух систем, получим конечный ответ: x ϵ (-∞;3).

2. Неравенства вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Подкоренная функция должна быть неотрицательна, левая часть неравенства также неотрицательна и меньше, чем правая, а значит $g(x) > 0$. Следовательно, заданное неравенство эквивалентно следующей системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$

Пример 1.11 Решить неравенство $\sqrt{x+3} < x+1$.

Решение: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1 > 0 \\ x+3 < (x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -1 \\ x^2+2x+1-x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x > -1 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x-1)(x+2) > 0. \end{cases}$ (Рис. 1.2.8)

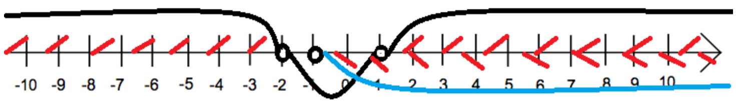


Рис. 1.2.8 Решение примера 1.11

Ответ: x ϵ (1;+∞).

3. Неравенства вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$. Обе подкоренные функции должны быть положительны, т.е. $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$. Возведем в квадрат обе части неравенства и получим $f(x) \leq g(x)$. Таким образом, заданное неравенство эквивалентно системе неравенств: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$

Пример 1.12 Решить неравенство $\sqrt{x^2-4x+4} \leq \sqrt{x+10}$.

Решение: $\begin{cases} x^2-4x+4 \geq 0 \\ x^2-4x+4 \leq x+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2-5x-6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ (x+1)(x-6) \leq 0 \end{cases}$

Первое неравенство всегда будет положительным, т.к. выражение под скобкой возводится в квадрат, следовательно, оно справедливо для всех действительных x. Второе неравенство системы решим методом интервалов (рис. 1.2.9).

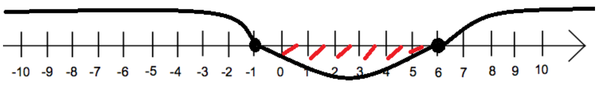


Рис.1.2.9 Решение примера 1.12

Ответ: x ϵ [-1;6].

4. Неравенства вида $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < \sqrt{k(x)}$. Вместо знака < может быть использован любой другой знак. Все подкоренные функции должны быть положительны, т.е. $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, k(x) \geq 0$. Возведя обе стороны в квадрат, получим: $f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} < k(x) \Rightarrow \ f(x) + g(x) - k(x) < -2\sqrt{f(x)g(x)}$. В итоге мы получим систему: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ k(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) - k(x) < 4f(x)g(x). \end{cases}$

Пример 1.13 Решить неравенство $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} \leq \sqrt{2x-12}$.

Решение: $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 9-x \geq 0, \\ 2x-12 \geq 0 \\ x+1-9+x-2x+12 \leq 4(2x-12)(9-x). \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 9, \\ x \geq 6, \\ 4 \leq 4(18x-2x^2-108+12x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq x \leq 9, \\ -2x^2 + 30x - 108 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq x \leq 9, \\ x^2 - 15x + 54 \leq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} 6 \leq x \leq 9, \\ (x-9)(x-6) \leq 0. \end{cases}$ Полученную систему решим методом интервалов (Рис.1.2.10).

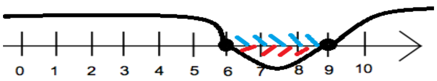


Рис. 1.2.10 Решение примера 1.13

Ответ: x ϵ [6;9]. [28]

1.2.5 Показательные, логарифмические и тригонометрические неравенства

Показательное неравенство - это неравенство, в котором неизвестное находится в показателе степени. Данные неравенства имеют вид: $a^x < b$ или $a^x > b$, где a≠1, x- неизвестное.

Решение показательных неравенств основано на:

1) на свойстве показательной функции $y = a^x$: если a> 1, то функция $y = a^x$ возрастающая; если 0<a<1, то функция $y = a^x$ убывающая;

2) на определении возрастающей (убывающей) функции:

- функция y=f(x) называется возрастающей на интервале (a;b), если для любых x_1, x_2 ϵ (a;b) выполняется условие: если $x_1<x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$. Другими словами, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции.
- функция y=f(x) называется убывающей на интервале (a;b), если для любых x_1, x_2 ϵ (a;b) выполняется условие: если $x_1<x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Другими словами, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует меньшее значение функции.

Пример 1.14 Решить неравенство $3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0$

Решение: $3 * 3^{2x} - 3^2 * 3^x + 6 > 0$; Делаем замену $3^x = a$, при $a > 0$: $3a^2 - 9a + 6 > 0$; $a^2 - 3a + 2 > 0$; $(a-2)(a-1) > 0$. Полученное неравенство решим методом интервалов (Рис. 1.2.11)

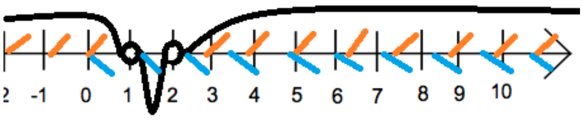


Рис. 1.2.11 Решение примера 1.14

$a \in (0;1) \cup (2;+\infty) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 < 3^x < 1 \\ 3^x > 2 \end{cases}; \quad 3^x > 0$ при любом x ⇒

$\begin{cases} 3^x < 3^0 \\ x > \log_3 2 \end{cases}; \begin{cases} x < 0 \\ x > \log_3 2 \end{cases}$

Ответ: x ϵ (-∞;0) ∪ ($\log_3 2$; +∞).

Пример 1.15 Решите неравенство $5 * 4^x + 2 * 25^x \geq 7 * 10^x$

Решение: разделим обе части неравенств на 4^x,учтем что $4^x > 0$, тогда:

$$5 + 2 * \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^x \geq 7 * (\frac{2*5}{4})^x; 5 + 2 * \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} \geq 7 * (\frac{5}{2})^x; 2 * \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7 * \left(\frac{5}{2}\right)^x +$$

$5 \geq 0$ Введем замену $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}$=a,при а >0, тогда: $2a^2 - 7a + 5 \geq 0$; $(a - \frac{5}{2})(a - 1) \geq 0$

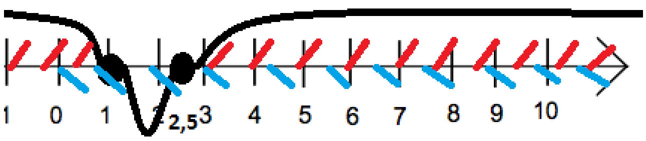


Рис. 1.2.12 Решение примера 1.15

$a \in (0;1) \cup (\frac{5}{2};+\infty) \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (\frac{5}{2})^x \leq 1 \\ (\frac{5}{2})^x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$; $(\frac{5}{2})^x \geq 0$ при любом x $\Rightarrow$

$\begin{cases} (\frac{5}{2})^x \leq (\frac{5}{2})^0 \\ (\frac{5}{2})^x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$; т.к. $\frac{5}{2} > 1$ знак неравенства сохраняется и $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Логарифмические неравенства - это неравенства, которые имеют переменную, стоящую под знаком логарифма или в его основании. Основное правило при решении логарифмических неравенств: если основание логарифма больше единицы, то знак неравенства сохраняется и для f(x) и g(x), если же основание логарифма больше нуля и меньше единицы, то знак между f(x) и g(x) заменяется на противоположный. $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$ при $a > 1$; $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$при $0 < a < 1$.

В случае если переменная содержится и в основании, и в подлогарифмическом выражении, например $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$, решение разбивается на два случая, когда φ(x)>1 и когда 0 < φ (x)<1,

т.е.:$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x)>1 \\ 0<g(x)<f(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<\varphi(x)<1 \\ 0<f(x)<g(x) \end{cases} \end{array}\right.$.

Пример 1.14.Решить неравенство $\log_{x+1}(x^3 + 3x^2 + 2x) < 2$.

Решение: $\log_{x+1}(x^3+3x^2+2x) < \log_{x+1}(x+1)^2 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+1>1 \\ 0<x^3+3x^2+2x<(x+1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+1<1 \\ 0<(x+1)^2<x^3+3x^2+2x \end{cases}\end{array}\right.$$

Сначала решим первую систему неравенств: $\begin{cases} x>0 \\ x(x^2+3x+2)>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2>x^3+3x^2+2x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x>0 \\ x(x+1)(x+2)>0 \\ (x+1)^2>0 \\ x^3+3x^2+2x-x^2-2x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x(x+1)(x+2)>0 \\ (x+1)^2>0 \\ x^3+2x^2-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x(x+1)(x+2)>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)(x^2+x-1)<0 \end{cases} \Rightarrow x \in$ $(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

Вторая система: $\begin{cases} -1<x<0 \\ x(x+1)(x+2)>0 \\ (x+1)^2>0 \\ x^3+3x^2+2x-x^2-2x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<0 \\ x(x+1)(x+2)>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)(x^2+x-1)>0 \end{cases} \Rightarrow$данная система не имеет решений.

Ответ: $x \in (0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

Тригонометрическими неравенствами называются неравенства, которые содержат переменную под знаком тригонометрической функции. Решаются простейшие тригонометрические неравенства графически или с помощью единичной тригонометрической окружности.

По определению, синусом угла α есть ордината точки $P_\alpha(x,y)$, а косинусом – абсцисса этой точки. Этот факт используется при решении простейших тригонометрических неравенств с косинусом и синусом с помощью единичного круга (Рис. 1.2.13).

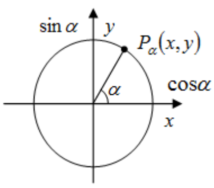


Рис. 1.2.13 Единичная окружность

Пример 1.16 Решить неравенство $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Так как $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1 \Rightarrow$ неравенство имеет решение (рассмотрим 2 способа).

Первый способ: Решим данное неравенство графическим методом. Для этого построим в одной системе координат $y = \sin x$ и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Рис. 1.2.14).

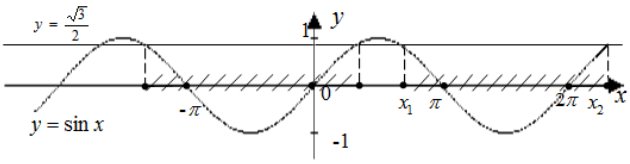


Рис. 1.2.14 Первый способ

Выделим промежутки, на которых синусоида расположена ниже графика прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдем абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения этих графиков:

$x_1 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$ и $x_2 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$. Получили интервал $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, но т.к. функция $y = \sin x$ периодическая и имеет период 2π, то ответом будет объединение интервалов: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in Z$.

Второй способ: Построим единичную окружность и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, точки их пересечения обозначим P_{x_1} и P_{x_2}. Решением исходного неравенства будет множество точек ординаты, которые меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдем значение x_1 и x_2 , совершая обход против часовой стрелки, $x_1<x_2$ (Рис.1.2.15):

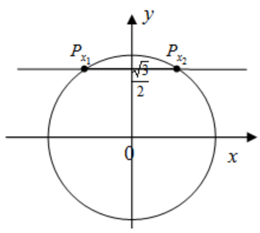


Рис. 1.2.15 Второй способ

Учитывая периодичность функции синус, окончательно получим интервалы $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in Z.$

Ответ: $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in Z.$ [19]

Глава II. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ «НЕРАВЕНСТВА» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

2.1. Технологическая карта урока математики в 11 классе.

Профильный уровень предъявления содержания образования.

Введение новой формы итоговой аттестации за курс средней школы – Единого Государственного Экзамена и широкое использование приёмными комиссиями ВУЗов задач с нестандартными методами решения в экзаменационных материалах ставит перед школой новую задачу – готовить учащихся к решению упражнений данного вида не только в классах с углубленным изучением, но в классах профильного образования.

Изучение данной темы, ставит перед учениками новые проблемы, стимулирует развитие их математической культуры и навыков аналитического мышления, хорошей техники исследования.

Вместе с тем, в школьном курсе математики эта тема практически не представлена.

Изучаемая тема: Логарифмические неравенства.

Количество часов на изучаемую тему: 3

Цели изучения темы:

- Познакомить учащихся с применением метода интервалов при решении логарифмических неравенств с постоянными и переменными основаниями.

- Научить учащихся пользоваться этим методом для решения задач группы С в ЕГЭ.
- Закрепить умение использовать преобразования равносильности при решении неравенств.
- Формировать умение получать знания с помощью различных источников: дополнительной литературы, компьютерных обучающих программ.
- Формировать настойчивость при достижении поставленной цели

Тема урока: «Логарифмические неравенства. Неравенства вида $\log_a f(x) > 0$ и $\log_a f(x) > \log_a g(x)$».

Место урока в изучаемой теме: 1

Цели урока:

- дидактическая: научить применять приобретенные знания при решении заданий повышенного уровня сложности, стимулировать учащихся к овладению приёмами и методами решения;
- развивающая: развивать познавательный интерес, логическое мышление, память, умение анализировать;
- воспитательная: продолжать обучать умению слушать учителя и друг друга, аккуратному ведению тетрадей, трудолюбию.

Тип урока: Урок по первоначальному формированию умений и навыков.

Технология: Технология проблемного обучения

Учебно-дидактическое обеспечение урока и средства обучения: Автор учебника: Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : Мнемозина, 2009. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. М. Мнемозина, 2009.,

конспект, чертёжные инструменты, раздаточный материал с заданиями.

Таблица 2.1 Технологическая карта урока

Дидактическая структура урока		Методическая подструктура урока.						Признаки решения дидактических задач. .
Этапы	Время мин	Методы обучения	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Методические приемы и их содержание	Средства обучения	Способы организации, формы деятельности	
Организационный момент	1	Словесный	Организует готовность к уроку. Сообщает тему урока, Делается установка на работу.	Слушают, настраиваются на работу.	Слово учителя. Наблюдение.	Компьютер медиа-проектор, экран	Фронтальный ,беседа	Психологическая настроенность, готовность к уроку.
Актуализация знаний	5	наглядно-иллюстративный.	Учитель проводит повторение по основным свойствам логарифмов, традиционных методов решения уравнений и неравенств.	Учащиеся отвечают на вопросы, предполагают анализ решения уравнений и неравенств обычными способами.	Выполнение упражнений, предлагаемых учителем.	Компьютер медиа-проектор, экран	Парный, коллективный	Проверить усвоение ранее изученного материала и подвести учащихся к изучению новой темы.
Мотивационно - целевой 1.Создание условий для формирования умения делать	4	Словесный	Учитель предлагает учащимся ответить на вопрос: всегда ли можно	Учащиеся делают вывод, что не все неравенства решаются.	Обсуждение.	Компьютер, медиапроектор, экран, тетрадь.	Фронтальный	

умозаключения через установление причинно-следственной связи. 2.Выявление проблемы.	3	Индуктивный	найти решение логарифмических неравенств? Как решить то или иное неравенств Учитель ставит проблему, организует работу по выявлению общих методов решения неравенств.	они смогли решить не все. Выход учащихся на применение общих методов решения неравенств на нетрадиционные.	Беседа		Коллективный, беседа	Учащиеся могут сформулировать проблему и выявить пути её решения через выдвижение гипотезы: неравенства можно решать и общими методами, и нетрадиционными.
Формирование новых понятий и способов действий.	12	Информационно-рецептивный	Учитель излагает теоретический материал, подкрепляя опорным конспектом. Приложение №1	Учащиеся записывают формулы в тетрадь.	Исследование предложенного задания.. Выполнение упражнений. Приложение №1	Компьютер медиапроектор, экран, тетрадь. Слайд презентации.	Групповая работа	Учащиеся могут сформулировать алгоритмы решения логарифмических неравенств в зависимости от метода
Физкульт пауза	2		Организует физкультпаузу	Выполняют упражнения			Фронтальная	Снятие напряжения, связанного с умственной и физической нагрузкой.
Первичное закрепление материала	14	Аналитический, частично-	Учитель обсуждает вместе с	Учащиеся решают с помощью		Компьютер медиа-проектор,	Коллективный. Представлени	Представление результатов деятельности В соответствии с

урока.		поисковый.	обучающимися методы решения, следит за грамотностью рассуждений и верной записью решения неравенств.	учителя у доски, остальные пишут в тетради.		экран, тетрадь.	е и обсуждение полученных результатов.	заданной целью коммуникации. Практика в роли выступающего
Закрепление изученного материала.		Словесные, использование схем и символических записей Практический	Учитель разбирает решение неравенств, предложенных на вступительных экзаменах в МГУ и МФТИ. Приложение №2	Решение сложных заданий с комментариями, обсуждение. Предлагают свои способы и предложения. Использование опорных конспектов Приложение №1а	Выполнение упражнений. Приложение №2. .	Компьютер медиапроектор, экран, тетрадь. Слайд презентации	Самостоятельная работа. Индивидуальный.	Усвоение основных методов решения логарифмических неравенств.

Итог урока.	2	Эвристический	Мотивирует учащихся, акцентирует внимание детей на приоритете изученного метода решения логарифмических неравенств.	Учащиеся вместе с учителем делают вывод, что полученные знания дают возможность просто справляться с неравенствами, решение которых обычным способом невозможно				Развитие памяти, умения учиться
Домашнее задание	1	Словесный	Из предложенных заданий решить любые три. Даёт пояснение к домашнему заданию. Приложение №3	Вникают в суть домашнего задания, осмысливают его.	Выполнение упражнений. Приложение №3	Компьютер медиапроектор, экран, тетрадь	Фронтальный, беседа.	Выполняют соответствующие записи. Усваивают данные инструкции. Осознанно выбирают уровень задания.
Рефлексия.	1	Словесный, наблюдательный.	Задаёт вопросы, помогающие подвести итог урока, рефлексирова	Отвечают на поставленные вопросы, анализируют свою деятельност	Самоанализ, самооценка.		Словесный, аналитический. Беседа.	Усвоение темы урока. Удовлетворение от проделанной работы, эмоциональное завершение урока.

			ть совместную деятельность. Предлагает учащимся оценить свою работу на уроке. Оценивает учащихся.	ь, проводят самооценку собственной деятельност и.				

Приложение № 1 к технологической карте (далее ТК).

Изучение теоретического материала.

Пусть $f(x) > 0$, $f(x)$ – непрерывна на (а; в), тогда $\log_a f(x)$ тоже непрерывна на (а; в), и для решения неравенства $\log_a f(x) > 0$ применим метод интервалов.

Покажем, что имеет место условие равносильности $\log_a f(x) > 0\ (< 0) \leftrightarrow (a-1)(f(x)-1) > 0\ (< 0)$ на ОДЗ неравенства.

Действительно:

Если $a > 1$, то $\log_a f(x) > 0\ (< 0) \leftrightarrow f(x) > 1\ (< 1)$, т.е. $(a-1)(f(x)-1) > 0\ (< 0)$.

Если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > 0\ (< 0) \leftrightarrow f(x) < 1\ (> 1)$, т.е. $(a-1)(f(x)-1) < 0\ (> 0)$.

И наоборот, если $(a-1)(f(x)-1) > 0\ (< 0)$, то при $a > 1$ имеем $f(x) > 1\ (< 1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0\ (< 0)$.

При $0 < a < 1$ имеем $f(x) < 1\ (> 1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0\ (< 0)$.

Итак, $\log_a f(x) > 0\ (< 0) \leftrightarrow f(x) > 0, (a-1)(f(x)-1) > 0\ (< 0)$.

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Аналогично доказывается, что

$$\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) > (< 0). \end{cases}$$

Отсюда следует, что знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ неравенства.

Приложение №1а к ТК.

Опорный конспект.

Таблица 2.2 Решение логарифмических неравенств. [26]

$\log_a f(x) > 0,\ \ 0 < a \neq 1,$ $\log_a f(x) > \log_a 1$ $\begin{cases} a > 1; \\ f(x) > 1; \\ f(x) > 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) < 1; \\ f(x) > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} (a-1)(f(x)-1) > 0; \\ f(x) > 0. \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)\ \ 0, < a \neq 1$ $\begin{cases} a > 1; \\ f(x) - g(x) > 0; \\ g(x) > 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) - g(x) < 0; \\ f(x) > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} (a-1)\big(f(x) - g(x)\big) > 0; \\ f(x) > 0; \\ g(x) > 0. \end{cases}$
$\log_{a(x)} f(x) > 0,\ \ 0 < a(x) \neq 1$ $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} 1$ $\begin{cases} a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-1) > 0 \end{cases}$	$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x),\ \ 0 < a(x) \neq 1$ $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \geq 0$ $\begin{cases} 0 < a(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0 \end{cases}$

Приложение №2 к ТК.

Решение упражнений.

Пример 2.1 $\frac{\log_2(4x+3)*\log_5(2x+5)}{\log_3 6x*\log_4 x}$

Решение: $\frac{(\log_2(4x+3)-\log_2 1)(\log_5(2x+5)-\log_5 1)}{(\log_3 6x-\log_3 1)(\log_4 x-\log_4 1)} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{(2-1)(4x+3-1)(5-1)(2x+5-1)}{(3-1)(6x-1)(4x-1)(x-1)} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in (0; \frac{1}{6}) \cup (1; +\infty)$

Пример 2.2 $\log_x 2 \leq \log_{6-x} 2$

Решение: $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(6-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x*\log_2(6-x)} \leq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{(2-1)(6-x-x)}{(2-1)(x-1)(2-1)(6-x-1)} \leq 0 \\ 6-x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6-2x}{(x-1)(5-x)} \leq 0 \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup [3;5).$$

Пример 2.3. $\frac{\log_9 x+4}{1+\log_9 x} \leq 4\log_x 3 - 1$

Решение: $\frac{\log_9 x+4}{1+\log_9 x} - \frac{2}{\log_9 x} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2(\log_9 x)^2+3\log_9 x-2}{\log_9 x(\log_9 x+1)} \leq 0 \Rightarrow$

$\frac{2(\log_9 x+2)(\log_9 x-\frac{1}{2})}{\log_9 x(\log_9 x+1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(\log_9 x-\log_9\frac{1}{81})(\log_9 x-\log_9 3)}{\log_9 x(\log_9 x-\log_9\frac{1}{9})} \leq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \frac{(9-1)(x-\frac{1}{81})(x-3)}{(9-1)(x-1)(9-1)(x-\frac{1}{9})} \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \frac{(x-\frac{1}{81})(x-3)}{(x-1)(x-\frac{1}{9})} \leq 0; \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{81}; \frac{1}{9}\right) \cup (1;3].$$

Пример 2.4 $\log_{5-4x-x^2}(5-9x-5x^2) \leq \log_{1-x}(1-2x)$

Решение: $\log_{(x+5)(1-x)}((x+5)(1-2x)) \leq \log_{1-x}(1-2x) \Rightarrow$

$\frac{\log_{1-x}(x+5)(1-2x)}{\log_{1-x}(x+5)(1-x)} - \log_{1-x}(1-2x) \leq 0 \Rightarrow$

$\frac{\log_{1-x}(x+5)(1-\log_{1-x}(1-2x)-\log_{1-x}(1-2x)(1+\log_{1-x}(x+5))}{\log_{1-x}(1-x)(x+5)} \leq 0 \Rightarrow$

$\frac{\log_{1-x}(x+5)(1-\log_{1-x}(1-2x))}{\log_{1-x}(1-x)(x+5)} \leq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\big((1-x)-1\big)\big((x+5)-1\big)\big((1-x)-1\big)\big((1-x)-(1-2x)\big)}{\big((1-x)-1\big)(-x^2-4x+5-1)} \le 0, \\ 0>1-x\neq 1, \\ 1-2x>0, \\ x+5>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^3(x+4)}{x(x^2+4x-4)} \le 0 \\ -5 < x < 0{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x \in (-5; -2\sqrt{2}) \cup [-4; 0) \cup (0; 0{,}5)$

Пример 2.5 $\frac{\log_3(3^{2x+1}-16*3^x+16)}{x+1} \le 1$

Решение: $\frac{\log_3(3^{2x+1}-16*3^x+16)-(x+1)}{x+1} \le 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{(3-1)(3^{2x-1}-16*3^x+16)-3^{x+1}}{x+1} \le 0, \\ 3^{2x+1} - 16 * 3^x + 16 > 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3*3^{2x}-19*3^x+16}{x+1} \le 0, \\ 3 * 3^{2x} - 16 * 3^x + 16 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3(3^x-1)(3^x-\frac{16}{3})}{x+1} \le 0, \\ 3(3^x - 4)(3^x - \frac{4}{3}) > 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3^x-3^0)(3^x-3^{\log_3 \frac{16}{3}})}{x+1} \le 0, \\ (3^x - 3^{\log_3 4})(3^x - 3^{\log_3 4}) > 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$x \in (-\infty; -1) \cup \left[0; \log_3 \frac{4}{3}\right) \cup$ $\left(\log_3 4; \log_3 \frac{16}{3}\right]$.

Приложение №3 к ТК.

Домашнее задание

1) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$. Ответ: $x \in (1; 3)$

2) $\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2-9)} \geq \frac{\log_5(x^2+8x+12)}{\log_5(x^2-9)}$. Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (3; \sqrt{10})$.

3) $(\log_2|2x|)^2 - 5\log_5|2x| + 2|x|\log_2|2x| - 4|x| + 6 \geq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 0) \cup [2; +\infty)$.

4) $\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \geq -2$. Ответ: $x \in \left[\frac{4}{5}; 1\right)$.

5) $\frac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)} \leq 0$. Ответ: $x \in (-7; -6) \cup [2; 2{,}5) \cup (4; 4{,}5]$

6) $\frac{1-\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{13-x}}{|x^2+2x-15|-|3x^2-24x+45|} \geq 0$. Ответ: $x \in (-1; 2{,}5) \cup 2{,}5; 3) \cup (3; 10)$.

Анализ урока математики в 11 классе на тему: «Логарифмические неравенства»

Данный урок проходил в рамках учебного курса алгебры 11 класса в общеобразовательных школах. Место и роль данного урока в курсе математики были определены правильно, так как урок находился в связи с предыдущими и последующими уроками.

Урок в 11 классе начался своевременно и организованно – строго по звонку. Основные задачи урока были сформулированы мной четко и ясно, громко. Я показывала примеры решения упражнений доступно, объясняя важные для понимания учениками моменты, указывала и исправляла ошибки в процессе выполнения упражнений школьниками. Правильно подобранные упражнения позволяют наращивать сложность по мере усвоения материала. Обучающиеся к уроку относятся с большим энтузиазмом, охотно решают задания в тетрадях, однако отсутствует мотивация к выходу для решений заданий у доски. Я относилась к детям с уважением, пониманием, соблюдала тактичность. Урок проводился согласно программе. Перед уроком я составила технологическую карту. Во время урока я привлекала внимание детей, задавая вопросы.

Методы обучения и воспитания достаточно результативны, не сложны, скоординированы. В процессе урока я исправляла ошибки в решениях примеров, в случаях затруднений делала подсказки, придерживалась дидактических принципов обучения и воспитания: активности, наглядности обучения, систематичности, последовательности, доступности. Привлекала детей к анализу выполненных примеров, самооценке.

Дети относятся к занятиям положительно, по возможности выполняют все упражнения урока.

В заключительной части урока закрепление основных моментов, рефлексия. Проводится подведение итогов урока, дается домашнее задание. Нужно отметить, что обучающиеся активно включаются в обсуждение вопросов, задаваемых мной, не стесняются выражать свои мысли. Я так же поощряла такую активность одобряющими фразами: «Молодец», «Правильно», «Да, именно так», «Все верно». Это способствует внутреннему раскрепощению учеников, детям приятно осознавать, что их мнение значимо, что они могут увидеть какие–то скрытые закономерности и факты, а значит, способны мыслить глубоко и серьезно.

Дети ведут себя дисциплинированно, так как все включены в работу и не отвлекаются. Я уверенно и настойчиво требовала выполнений задач урока. Я старалась умело держаться перед классом, владеть ситуацией. Сложились доверительные взаимоотношения с детьми. Все поставленные мною задания были выполнены на достаточно высоком уровне.

2.2 Анализ и разбор заданий из ЕГЭ по выбранной теме

Распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р, принятым в соответствии с Указом Президента РФ от 07.05.2012 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», утверждена Концепция развития математического образования в Российской Федерации, определяющая базовые принципы, цели, задачи и основные направления. Согласно Концепции, математическое образование должно, с одной стороны, «предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе», с другой – «обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.». Кроме того, «в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования». В число мер по реализации Концепции, принятых Приказом МОН РФ от 03.04.2014 г. № 265, входит «совершенствование системы государственной итоговой аттестации, завершающей освоение основных образовательных программ основного общего и среднего образования, по математике, разработка соответствующих контрольных измерительных материалов, обеспечивающих введение различных направлений изучения математики», то есть материалов, предназначенных для различных целевых групп выпускников.

ЕГЭ по математике – серьёзное испытание в жизни каждого выпускника школы. Каждый год в процедуру проведения экзамена вносятся изменения. В 2015 году новшеством является разделение экзамена по математике на два отдельных испытания: базовый и профильный уровень. Базовый уровень ЕГЭ - это совсем новый экзамен. Он предназначен для тех, кому математика не потребуется в дальнейшем обучении. Либо обучение не предполагается вообще, либо предполагается в вузах, где предмет "Математика" отсутствует в перечне вступительных испытаний. Профильный экзамен, по сути, не отличается от того ЕГЭ по математике, что сдаётся уже много лет. Новшества заключаются в незначительном изменении количества заданий. В любом случае в заданиях обоих экзаменов присутствует и геометрия, и тригонометрия, и логарифмы, и производные, и теория вероятностей, и прочие премудрости... В этом смысле, задания базового уровня не сильно отличаются от аналогичных заданий профильного ЕГЭ.

Единый государственный экзамен базового и профильного уровня составлен таким образом, что без специальной подготовки выполнить все задания, основываясь на базе знаний, полученных в ходе изучения школьной программы невозможно. Часто случаются примеры, когда даже отличные оценки в школе не являются гарантией успешного прохождения этого барьера. Необходима совместная серьезная, кропотливая работа учителя, ученика и родителей для успешной сдачи экзамена.

Для того чтобы успешно сдать экзамен по математике, важно пройти всю программу целиком, а не только «то, что пригодится на экзамене», повысить свою культуру вычислений, то есть минимизировать использование калькуляторов, развивать умение читать графики, правильно использовать терминологию и учить формулы.[30]

Для примера возьмем результаты ЕГЭ за 2017 год. Высокие показатели успешности продемонстрированы экзаменуемыми детьми при решении первых шести заданий базового уровня – выше 70%, что свидетельствует о сформированности у школьников базовых математических знаний за курс математики основной и средней общеобразовательной школы, необходимых для обучения в вузах на специальностях, не предъявляющих высокие требования к уровню математической подготовки абитуриентов. Эти задания проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни; выполнять действия с геометрическими фигурами; исследовать простейшие математические модели; решать уравнения. Задания этого блока включали в себя следующее предметное содержание: действия с целыми числами; табличное и графическое представление данных, чтение диаграмм и применение математических методов для решения содержательных задач из практики; вычисление площадей треугольника и трапеции, длин отрезков, углов геометрических фигур; вычисление вероятности события, решение показательных, логарифмических, иррациональных, рациональных уравнений. В целом успешность выполнения заданий базового уровня сложности составляет 31 – 95%. По сравнению с 2016 годом отмечается прогресс решения планиметрических задач, что связано с общим ростом уровня преподавания геометрии в рамках реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации. По сравнению с 2016 годом также отмечается прогресс при решении заданий базового уровня по математическому анализу на геометрический смысл производной – более 51% (в 2016 году менее 50%), что показывает реальный рост понимания идей анализа. Наиболее заметной проблемой остается овладение базовыми наглядными понятиями стереометрии (43–54%) – это один из существенных резервов повышения качества обучения. Успешность выполнения заданий повышенного уровня сложности составляет 31–58%. Наилучшие показатели при решении уравнений или вычислении значений выражений (более 55%). Наиболее заметной проблемой остается решение текстовых задач- 11 задание (более 31%), и решение неравенств- 15 задание в профильном ЕГЭ по математике.

Задание 15 на решение неравенств относится к алгебраическим заданиям повышенного уровня. Ненулевые баллы за выполнение этого задания получило около 15% участников экзамена, максимальный балл – около 11%.Типичные ошибки связаны с невнимательным чтением математической записи неравенства, непониманием алгоритма решения совокупностей и систем логарифмических неравенств. Очень много ошибок допущено участниками экзамена при решении дробно-рационального неравенства (забыт знаменатель). Следует отметить небрежность, которая была во многих работах, при изображении множеств на координатной прямой.

Далее проведем анализ и решение различных заданий по теме неравенства из ЕГЭ по математике профильного и базового уровней. Начнем с базового уровня.

Пример 2.6. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства	Решения
А)$2^x \geq 2$	1)$x \geq 1$
Б)$0,5^x \geq 2$	2)$x \leq 1$

В)$0{,}5^{x} \leq 2$ 3)$x \leq -1$

Г)$2^{x} \leq 2$ 4) $x \geq -1$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам [20]:

А	Б	В	Г

Решение: Разберем каждый из пунктов по отдельности. Решение для пункта А): 2x≥2⇒ 2x≥21. Так как 2>1⇒ знак неравенства сохраняется. x≥1- ответ 1)

Решение для пункта Б): 0,5x≥2⇒ 12x≥12−1. Так как 12<1⇒ знак неравенства меняется на противоположный. x≤−1- ответ 3).

Решение для пункта В): 0,5x≤2⇒12x≤12−1. Так как 12<1⇒ знак неравенства меняется на противоположный. x≥−1- ответ 4)

Решение для пункта Г): 2x≤2⇒2x≤21. Так как 2>1⇒ знак неравенства сохраняется. x≤1- ответ 2)

Ответ: 1342

Пример 2.7. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений из правого столбца. Установите соответствие между неравенствами и множествами их решениями.

Неравенства

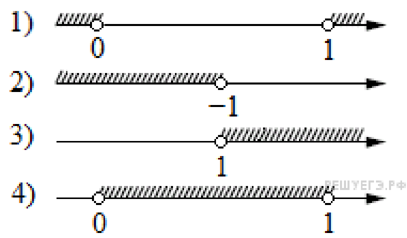
А) $\log_2 x > 0$

Б) $2^{-x} > 2$

В) $\frac{x}{x-1} < 0$

Г) $\frac{1}{x(x-1)} > 0$

Решения



Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам [21]:

А	Б	В	Г

Решение: Разберем решение всех пунктов по очереди. Решение для пункта А): $\log_2 x > 0 \Rightarrow \log_2 x > \log_2 1$. Так как основание логарифма 2>1, то знак неравенства остается прежним. $x > 1$- ответ 3).

Решение для Б): $2^{-x} > 2 \Rightarrow 2^{-x} > 2^1$. Так как 2>1, то знак неравенства сохраняется. $-x > 1 \Rightarrow x < -1$- ответ 2).

Решение для В): $\frac{x}{x-1} < 0$. Данное неравенство решается методом интервалов. Точки, которые необходимо отметить на координатной прямой: 0 и 1. Далее выберем интервал с отрицательными значениями ⇒ ответ 4).

Решение для Г): $\frac{1}{x(x-1)} > 0$. Применим метод интервалов. Точки, которые необходимо отметить на координатной прямой: 0 и 1. Далее выберем интервалы с положительным значениями ⇒ ответ 1).

Ответ: 3241

Пример 2.8. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

Числа	Отрезки
А) $\log_5 7$	1) $[0; 1]$
Б)$\frac{17}{6}$	2) $[1; 2]$
В)$\sqrt{0,5}$	3) $[2; 3]$
Г)$0,22^{-1}$	4) $[4; 5]$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам [20]:

А	Б	В	Г

Решение: Разберем каждое из чисел подробно. А) $\log_5 7$. Так как у логарифма основание 5, нам необходимо записать два логарифма, один из которых будет больше исходного числа, второе меньше. $\log_5 5 < \log_5 7 < \log_5 25$. Теперь вычислим наши логарифмы: $1 < \log_5 7 < 2 \Rightarrow$ ответ 2).

Б) $\frac{17}{6}$. Так как 17 не делится нацело на 6, нам необходимо подобрать две дроби со знаменателем 6 , одна из которых будет больше исходной дроби, а вторая меньше. $\frac{12}{6} < \frac{17}{6} < \frac{18}{6}$. Теперь нацело разделим первую и третью дробь: $2 < \frac{17}{6} < 3 \Rightarrow$ ответ 3).

В) $\sqrt{0,5}$. Так как мы не можем вычислить корень из 0,5, нам необходимо подобрать два таких числа, из которых можно будет вычислить корень, максимально приближенных к $\sqrt{0,5}$. $\sqrt{0} < \sqrt{0,5} < \sqrt{1} \Rightarrow 0 < \sqrt{0,5} < 1 \Rightarrow$ ответ 1).

Г) $0,22^{-1} = (\frac{22}{100})^{-1} = \frac{100}{22} = \frac{50}{11}$. Так как 50 не делится нацело на 11, нам необходимо подобрать две дроби со знаменателем 11 , одна из которых будет больше исходной дроби, а вторая меньше: $\frac{44}{11} < \frac{50}{11} < \frac{55}{11}$. Теперь нацело разделим первую и третью дробь: $4 < \frac{50}{11} < 5 \Rightarrow$ ответ 4).

Ответ: 2314

Перейдем к анализу и решению заданий по теме неравенства из профильного уровня ЕГЭ по математике.

Пример 2.9 Решите неравенство: $\frac{x^2-6x+8}{x-1} - \frac{x-4}{x^2-3x+2} \leq 0$. [25]

Решение: Для начала данное неравенство нам необходимо привести к общему знаменателю, первое, что сделаем, разложим знаменатель второй дроби, применив теорему Виета $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Применим теорему Виета и к числителю первой дроби $x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$. Приведем все к общему знаменателю: $\frac{(x-2)^2(x-4)-(x-4)}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Rightarrow$

$$\frac{(x-4)((x-2)^2-1)}{(x-1)(x-2)} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-4)(x^2-2x+4-1)}{(x-1)(x-2)} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-4)(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} \le 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(x-4)(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} \le 0 \\ x \ne 1 \\ x \ne 2 \end{cases}.$$

Применив метод интервалов (Рис. 2.1), выясним что $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup [3; 4]$.

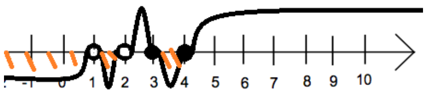


Рис. 2.2.1 Решение примера 2.9

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup [3; 4]$.

Пример 2.10 Решите неравенство $\frac{1}{6x^2-5x} \ge \frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$. [22]

Решение: Для того чтобы решить данное неравенство нам необходимо ввести замену $a = \sqrt{6x^2 - 5x + 1}$, но учтем что $a \ge 0$. Преобразуем знаменатель первой дроби :

$6x^2 - 5x = 6x^2 - 5x + 1 - 1 = \left(\sqrt{6x^2 - 5x + 1}\right)^2 - 1 = a^2 - 1$. Теперь у нас получается система: $\begin{cases} \frac{1}{a^2-1} \ge \frac{1}{a-1}, \\ a \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-a-1}{(a-1)(a+1)} \ge 0, \\ a \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{(a-1)(a+1)} \le 0, \\ a \ge 0. \end{cases}$.

Применив метод интервалов получим, что $0 \le a < 1$. Тогда : $\begin{cases} \sqrt{6x^2 - 5x + 1} \ge 0, \\ \sqrt{6x^2 - 5x + 1} < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 \ge 0, \\ 6x^2 - 5x + 1 < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) \ge 0, \\ x(6x - 5) < 0. \end{cases}$ Применив метод интервалов получим: $\begin{cases} x \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), \\ x \in \left(0; \frac{5}{6}\right). \end{cases} \Rightarrow x \in (0; \frac{1}{3}] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{3}] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

Пример 2.11 Решите неравенство $(\log_2 x)^2 + 6 > 5 \log_2 x$. [22]

Решение: Первое что мы сделаем, это введем замену $a = \log_2 x$, тогда: $a^2 + 6 > 5a \Rightarrow a^2 - 5a + 6 > 0$. Используя теорему Виета, получим

$(a-2)(a-3)>0 \Rightarrow \begin{cases} a<2, \\ a>3. \end{cases}$ Сделаем обратную замену : $\begin{cases} \log_2 x<2, \\ \log_2 x>3, \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} \log_2 x<\log_2 4, \\ \log_2 x>\log_2 8. \end{cases}$ Так как 2>1, знак неравенства не меняется $\Rightarrow \begin{cases} x<4, \\ x>8. \end{cases}$ Область допустимых значений: x>0.

Ответ: $x \in (0;4) \cup (8;+\infty)$.

Пример 2.12 Решите неравенство $\frac{1-\sqrt{1-4(\log_8 x)^2}}{\log_8 x}<2$.[24]

Решение: Введем замену $a=\log_8 x$, тогда: $\frac{1-\sqrt{1-4a^2}-2a}{a}<0$. Наша дробь будет отрицательной, если числитель больше 0 , а знаменатель меньше, либо если числитель меньше нуля, а знаменатель больше. Рассмотрим два случая:

$\begin{cases} 1-\sqrt{1-4a^2}-2a>0, \\ a<0. \end{cases}$ Или $\begin{cases} 1-\sqrt{1-4a^2}-2a<0, \\ a>0. \end{cases}$ Сначала решим первую систему: $\begin{cases} 1-2a>\sqrt{1-4a^2}, \\ a<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-4a+4a^2>1-4a^2, \\ 1-4a^2 \geq 0, \\ a<0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 8a^2-4a>0, \\ (2a-1)(2a+1) \leq 0, \\ a<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a(a-1)>0, \\ (2a-1)(2a+1) \leq 0, \\ a<0. \end{cases}$ Использовав метод интервалов, получим $-\frac{1}{2} \leq a<0$. Перейдем к обратной замене: $\begin{cases} \log_8 x \geq -\frac{1}{2}, \\ \log_8 x<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_8 x \geq \log_8 \frac{1}{\sqrt{8}}, \\ \log_8 x<\log_8 1. \end{cases}$ Так как 8>1, знак неравенства не изменится $\Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{\sqrt{8}}, \\ x<1. \end{cases}$

Решим вторую систему: $\begin{cases} 1-\sqrt{1-4a^2}-2a<0, \\ a>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2a<\sqrt{1-4a^2}, \\ a>0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-4a+4a^2<1-4a^2, \\ 1-4a^2 \geq 0, \\ a>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a(a-1)<0, \\ (2a-1)(2a+1) \leq 0, \\ a>0. \end{cases}$ Использовав метод интервалов, получим $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Перейдем к обратной замене: $\begin{cases} \log_8 x > 0, \\ \log_8 x \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow$

Так как 8>1, знак неравенства не изменится $\Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \leq \sqrt{8}. \end{cases}$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{8}}; 1\right) \cup \left(1; \sqrt{8}\right]$.

Пример 2.13 Решите неравенство $16^{x+\frac{1}{4}} - 9 * 4^{x-\frac{1}{2}} + 1 \geq 0$.

Решение: Применив свойство степеней $a^{в+c} = a^{в} * a^{c}$, получим: $2 * 16^{x} - \frac{9}{2} * 4^{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow 2 * 4^{2x} - \frac{9}{2} * 4^{x} + 1 \geq 0$. Введем замену $a = 4^{x}$, тогда: $2a^2 - \frac{9}{2}a + 1 \geq 0 \Rightarrow 4a^2 - 9a + 2 \geq 0 \Rightarrow (a-2)(a-\frac{1}{4}) \geq 0$ Применив метод интервалов, получим $\begin{cases} a \leq \frac{1}{4}, \\ a \geq 2. \end{cases}$ Введем обратную замену:

$\begin{cases} 4^{x} \leq \frac{1}{4}, \\ 4^{x} \geq 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{x} \leq 4^{-1}, \\ 4^{x} \geq 4^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$ Так как 4>1 знак неравенства не изменится $\Rightarrow$ $\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 0{,}5. \end{cases}$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [0{,}5; +\infty)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью моей выпускной квалификационной работы было проанализировать изучение неравенств в курсе математики средней школы. В рамках дипломного проекта мной был проведен полный анализ изучения неравенств в курсе математики средней школы, что способствовало достижению поставленной цели.

В I главе были рассмотрены основные понятия и свойства неравенств с доказательством некоторых из них. Я описала и рассмотрела такие виды неравенств как: линейные неравенства с одной и двумя переменными, квадратные неравенства и неравенства высших степеней, рациональные и иррациональные неравенства, логарифмические, тригонометрические и показательные неравенства. По каждому из видов неравенств, был приведен пример с полным разбором способов решения.

Во II главе в первом параграфе включена технологическая карта урока по теме «Логарифмические неравенства», проведенного мной в 11 классе при прохождении педагогической практики в ЦО №1. Так же был включен анализ данного урока. Во втором параграфе были рассмотрены алгебраические задания повышенного уровня сложности из ЕГЭ по математике, вызывающие проблемы у обучающихся. Так как в настоящее время ЕГЭ по математике делится на профильный и базовый уровень, примеры на тему неравенств были взяты из каждого из таких уровней. Решение таких типовых заданий были описаны в полной мере, с описанием каждого шага.

В ходе написания данной выпускной квалификационной работы, были достигнуты следующие задачи: была раскрыта сущность и понятие неравенства, рассмотрены различные виды неравенств, были выделены особенности методов решения неравенств, был проведен анализ заданий из ЕГЭ по математике и профильного и базового уровней, была разработана технологическая карта на тему «Логарифмические неравенства», с включением анализа проведенного урока на данную тему. В связи с решением данных задач, поставленная в начале исследования цель была достигнута мной в полном объеме.

В заключении хотелось бы отметить, что математика занимает одно из главных по важности предметов в школьном курсе. Изучая математику и решая неравенства и задачи другого рода, ребёнок учится: обобщать и выделять важное; анализировать и систематизировать; находить закономерности и устанавливать причинно-следственные связи; рассуждать и делать выводы; мыслить логически, стратегически и абстрактно. Как регулярные спортивные тренировки «прокачивают» тело, делают его здоровым, сильным и выносливым, так регулярные занятия математикой «прокачивают» мозг – развивают интеллект и познавательные способности, расширяют кругозор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азевич А.И. Система подготовки к единому государственному экзамену Математика в школе, 2005, № 4.

2. Аксенова, М.Д Энциклопедия для детей том 11. Математика./ М.Д. Аксёнова. - Аванта, 2008, 104 с

3. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. - 16-е изд. - М. : Просвещение, 2008. - 271 с.

4. Байокки, К. Вариационные и квазиварicционные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей / К. Байокки, А. Капело. - Москва: СИНТЕГ, 2012. - 278 с.

5. Бантова М.А. Методическое пособие к учебнику математики/М.А. Бантова, Т.В. Бельтюкова, С.В. Степанова.-М.: Просвещение,2001-64 с.

6. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов. - М.: Книга по Требованию, 2012. - 237 с.

7. Власова, А. П. Задачи с параметрами. Логарифмические и показательные уравнения, неравенства, системы уравнений. 10-11 классы / А.П. Власова, Н.И. Латанова. - М.: Дрофа, 2007. - 490 с.

8. Гейдман, Б. П. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства / Б.П. Гейдман. - М.: МЦНМО, 2013. - 185 с.

9. Денищева Л.О. Готовимся к единому государственному экзамену.- М.: Дрофа, 2004.-120 с.

10. Доценко В.С. Пятое правило арифметики//Наука и жизнь, № 12, 2004.-61 с.

11. Евдокимова Н.Н. Алгебра и начала анализа в таблицах и схемах. - Санкт-Петербург: Литера, 2005.- 98 с.

12. Егоров А. Иррациональные неравенства // Математика. Первое сентября.- 2002. - №15- 13-14 с.

13. Еремин, И. И. Линейная оптимизация и системы линейных неравенств / И.И. Еремин. - М.: Academia, 2007. - 256 с.

14. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов и др. - М.: Физматлит, 2007. - 248 с.

15. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов и др. - М.: Физматлит, 2010. - 240 с.

16. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры./ А.Г. Курош. - М.: 2007.- 324 с

17. Лекции по математике для физико-математических школ. Часть 2. Иррациональные уравнения, системы и неравенства, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, тригонометрия, обратные тригонометрические функции / В.В. Арлазаров и др. - М.: ЛКИ, 2008. - 264 с.

18. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. - 11-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2009. - 215 с.

19. Полиа, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа, Г. Сеге. - М.: КомКнига, 2006. - 338 с.

20. Садовничий, Ю. В. ЕГЭ 2015. Математика. Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. Практикум / Ю.В. Садовничий. - М.: Экзамен, 2014. - 128 с.

21. Садовничий, Ю. В. ЕГЭ. Практикум по математике. Решение уравнений и неравенств. / Ю.В. Садовничий. - М.: Экзамен, 2015. - 101 с.

22. Сергеев, И. Н. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. - М.: МЦНМО, 2011. - 484 с.

23. Сергеев, И. Н. ЕГЭ 2012. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. - М.: МЦНМО, 2012. - 900 с.

24. Сергеев, И. Н. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. - М.: МЦНМО, 2012. - 581 с.

25. Сергеев, И. Н. ЕГЭ 2014. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. - М.: МЦНМО, 2013. - 626 с.

26. Студенецкая В.Н., Сагателова Л.С.. Сборник элективных курсов.– Волгоград: Учитель, 2006.- 36 с.

27. Цыпкин, А. Г. Под ред. С.А. Степанова. Справочник по математике для средней школы./ А.Г. Цыпкин - М.: Наука, 1980 189 с.

28. Шахмейстер, А. Х. Дробно-рациональные неравенства / А.Х. Шахмейстер. - М.: ЧеРо-на-Неве, 2004. - 184 с.

29. Штейн, Е.А. Большая школьная энциклопедия том 1./ Е.А. Штейн. - М.: Москва, 2004.- 461 с.

30. https://fipi.ru

31. https://ru.wikipedia.org/wiki/Неравенство