Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИУ «БелГУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ В 11 КЛАССЕ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01
Педагогическое образование профиль Математика
очной формы обучения, группы 02041502
Мединцевой Надежды Геннадьевны

Научный руководитель
к.ф.- м.н., доцент кафедры математики
Витохина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание в курсе математики средней школы уделяется изучению тригонометрических функций и тригонометрических уравнений.

Решение тригонометрических задач создаёт предпосылки для систематизации знаний обучающихся, связанных со всем учебным материалом по геометрии (например, свойства тригонометрических функций, методы преобразования тригонометрических выражений) и устанавливает эффективные связи с изученным по алгебре (уравнения, эквивалентность уравнений, неравенства, одинаковые преобразования алгебраических выражений и т.д.).

В настоящее время необходимо усилить прикладные направления в преподавании математики. Согласно результатам анализа содержания школьного математического образования, возможности решения тригонометрических задач в этом плане достаточно широки.

Из – за небольшого количеством часов, отводимых на изучение темы «Тригонометрические уравнения» возникают большие проблемы из-за достаточно большого объема контента. Поэтому важно изучить с учащимися различные методы решения тригонометрических задач. Перед учителем стоит цель научить детей решать тригонометрические уравнения любого вида и любой сложности, что возможно только с помощью элективного курса. В этом и заключается **актуальность** темы моего исследования.

Проблема исследование заключается в том, что из-за недостаточного количества часов по разделу «Тригонометрия» учащиеся 11 класса на экзамене допускают очень много ошибок при выполнении заданий из этого раздела или не преступают совсем.

Объект исследования: тригонометрические задачи повышенной сложности в курсе старшей школы.

Предмет исследования – методика формирования умений решать тригонометрические задачи.

Цель исследования заключается в разработке элективного курса, направленного на формирование умений решать тригонометрические задачи повышенной сложности.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие **задачи**:

1. Определить роль тригонометрических задач в школьном курсе математики.
2. Выявить основные формирования навыков, необходимых для решения тригонометрических задач повышенной сложности.
3. Разработать технологию формирования навыков и умений для решения тригонометрических задач.
4. Составить программу элективного курса «Тригонометрические задачи повышенной сложности» в 11 классе.
5. Описать проведение педагогического эксперимента.

Дипломная работа состоит из введения, двух глав и заключения.

Первая глава, включает три параграфа. Основная часть первой главы посвящена видам и методам решения тригонометрических уравнений.

Вторая глава состоит из трех параграфов, в которых описано формирование умений и навыков решения тригонометрических задач. Представлен разработанный элективный курс «Тригонометрические задачи повышенной трудности в 11 классе». Приведено описание педагогического эксперимента и его результатов.

В заключении сформулированы выводы по теме исследования.

Список литературы состоит из 34 наименований.

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Роль и место тригонометрических задач в школьном курсе математики

Не зря считается, что математика - царица наук, ведь она является самой точной из всех ныне существующих. Это фундаментальная наука, способствующая нахождению и объяснению общих законов природы. Одним из основных и обязательных разделов школьного курса математики является тригонометрия[14].

Трудности, которые испытывают учащиеся в изучении тригонометрии, непосредственно связаны как с высоким уровнем абстракции понятий, так и с использованием числовой окружности как модели с помощью которой переопределяются тригонометрические функции и решаются многие задачи тригонометрии.

Эти трудности в основном состоят в том, что нужно многое учитывать: определение тригонометрических функций и их свойства; направление вращения начального радиуса; значения тригонометрических функций и др. Особенно трудным для изучения является раздел тригонометрии, посвящённый обратным тригонометрическим функциям.

У большей части выпускников школ каждый год обнаруживается слабая подготовка по данному разделу математика, об этом свидетельствуют результаты единого государственного экзамена. Анализ работ показывает, что данный раздел является самым проблематичным, именно в этом разделе ученики допускают много ошибок, либо не приступают к таким заданиям. И базовый и профильный экзамен по математике содержит задания по данной теме.

Тригонометрия – область математических знаний, специализирующаяся на изучении тригонометрических функций, которые применяются в геометрии.

История возникновения тригонометрических функций связана с определенным этапом развития науки и человеческими достижениями. Тригонометрия возникла в то время, когда в мире уже существовало зодчество, наука, ремесла. Зачатки тригонометрии замаячили на горизонте научных знаний в тот момент, когда люди стали усиленно изучать прямоугольные треугольники и прослеживать закономерную взаимосвязь между длинами сторон при острых углах и самими острыми углами[15].

Если обратиться к истории, то можно сказать, что именно древнегреческие математики, задавшись целью измерить длину круга, сообразили, что это можно сделать, предварительно измерив длину дуги (25 % всей длины круга), именно при помощью техники хорд. Первые тригонометрические таблицы были созданы древнегреческим математиком Гиппархом Никейским, который первым в истории человечества свел в таблицы величины дуг и хорд для набора различных углов[8].

Роль тригонометрических задач огромна. Тригонометрические знания сегодня используются практически во всех науках и отраслях точных знаний, что является феноменальным фактом. Эти знания достаточно активно применяются в физике, геометрии, инженерии, а также в астрономии, географии, музыке, финансовом анализе, электронике, статистике, теории вероятности, медицине, фармацевтике, архитектуре и компьютерной графике.

Набор тригонометрических функций в рамках школьного курса математики может быть представлен такой классификацией [19]:

Прямые функции - синус (sin x); косинус (cos x).

Производные функции - тангенс (tg x); котангенс (ctg x).

Другие функции - секанс (sec x); косеканс (cosec x).

Данные функции взаимосвязаны. Их практическое применение регламентируется несколькими основными формулами, остальные вычислительные процессы совершаются путем нахождения производных этих формул.

Таким образом, тригонометрия является частью специфического гармонического анализа в математике, который тщательно изучают и пытаются совершенствовать регулярно великие умы современности. В основе тригонометрии заложены специфические функции математического аппарата, который напрямую связан с исследованием колебательных движений и регулярно повторяющихся процессов [17].

1.2 Виды тригонометрических уравнений и методы их решения

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся виды тригонометрических уравнений и способы их решения:

1. Квадратные тригонометрические уравнения [9]. Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из функций sin x, cos x, tg x, ctg x, то такое уравнение с помощью замены $f(x)=t$ сводится к квадратному уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются основные тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 / \cos^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha * \mathrm{ctg}\ \alpha = 1$$

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 / \sin^2\alpha$$

Также используются формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\,\mathrm{Sin}\ \alpha * \cos\alpha$$

$$\sin\alpha * \cos\alpha = ½ * \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\ 2\alpha = 2\,\mathrm{tg}\ \alpha / 1 - \mathrm{tg}^2\alpha$$

$$ctg2\alpha = ctg^2\alpha - 1 / 2\, ctg\alpha$$

Пример 1. Решить уравнение

$6cos^2 x - 13sin\, x - 13 = 0$

С помощью формулы $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$ уравнение сводится к виду:

$$6sin^2 x + 13sin\, x + 7 = 0$$

Сделаем замену t = sin x, т.к. область значений синуса sin x э [-1;1], то tx э [-1;1]. Получим уравнение:

$$6t^2 + 13t + 7 = 0$$

Корни данного уравнения $t_1 = -\frac{7}{6}, t_2 = -1$.

Таким образом, корень t_1 не подходит. Сделаем обратную замену

$$sin\, x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Пример 2. Решить уравнение $5sin\, 2x = cos\, 4x - 3$

С помощью формулы двойного угла для косинуса $cos\, 2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ имеем: $cos\, 4x = 1 - 2sin^2 2x$

Сделаем эту подстановку и получим:

$$2sin^2 2x + 5sin\, 2x + 2 = 0$$

Сделаем замену $t = sin\, 2x$, т.к. область значений синуса sin x э [-1;1], то tx э [-1;1]. Получим уравнение:

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

Корни данного уравнения $t_1 = -2, t_2 = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, корень t_1 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$sin\, 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi n, x_2 = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z$$

Пример 3. Решить уравнение $tgx + 3ctgx + 4 = 0$

Т.к. $tgx \cdot ctgx = 1$, то $ctgx = \frac{1}{tgx}$. Сделаем замену $tgx = t$, п.к. область значений тангенса $tgx \in R$, то $t \in R$. Получим уравнение:

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{t^2 + 4t + 3}{t} = 0$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Таким образом:

$$\begin{cases} t^2+4t+3=0 \\ t\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-3 \\ t_2=-1 \end{array} \right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} tgx=-3 \\ tgx=-1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-arctg3+\pi n \\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n \end{array} \right. \quad n\in Z$$

2. Кубические тригонометрические уравнения. Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^3(x)+bf^2(x)+cf(x)+d=0$$

где $a\neq 0, f(x)$ — одна из функций $\sin x, cosx, tgx, ctgx$, то такое уравнение с помощью замены $f(x)=t$ сводится к кубическому уравнению.

Часто при решении таких уравнений в дополнение к предыдущим формулам используются формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Пример 4. Решить уравнение

$$11\cos 2x - 3 = 3\sin 3x - 11\sin x$$

При помощи формул $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ можно свести уравнение к уравнению только с $\sin x$:

$$12\sin^3 x - 9\sin x + 11\sin x - 3 + 11 - 22\sin^2 x = 0$$

Сделаем замену $\sin x = t, t\in[-1;1]$:

$$6t^3 - 11t^2 + t + 4 = 0$$

Подбором находим, что один из корней равен $t_1=1$. Выполнив деление в столбик многочлена $6t^3-11t^2+t+4$ на $t-1$, получим:

$(t-1)(2t+1)(3t-4)=0 \Rightarrow$ корнями являются $t_1=1, t_2=-\frac{1}{2}, t_3=\frac{4}{3}$.

Таким образом, корень t_3 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \; n \in Z \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$$

3. Однородные тригонометрические уравнения второй степени:

$I. a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0, a \neq 0, c \neq 0$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a\sin^2 x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$.

Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\cos^2 x$ или на $\sin^2 x$. Разделим, например, на $\cos^2 x$:

$$a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow a\,tg^2 x + b\,tgx + c = 0$$

Таким образом, данное уравнение при помощи деления на $\cos^2 x$ и замены $t = tgx$ сводится к квадратному уравнению: $at^2 + bt + c = 0$, способ решения которого вам известен.

Уравнения вида $I'. a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d, a \neq 0, c \neq 0$ с легкостью сводятся к уравнению вида I с помощью использования основного тригонометрического тождества:

$$d = d \cdot 1 = d \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Заметим, что благодаря формуле $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ однородное уравнение можно записать в виде $a\sin^2 x + b\sin 2x + c\cos^2 x = 0$/

Пример 5. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 3\cos^2 x + 1$$

Подставим вместо $1 = sin^2 x + cos^2 x$ и получим: $sin^2 x + 3sin\,x cos\,x - 4cos^2 x = 0$. Разделим данное уравнение на $cos^2 x$:

$$tg^2 x + 3tgx - 4 = 0$$

и сделаем замену $t = tgx, t \in R$. Уравнение примет вид:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Корнями являются $t_1 = -4, t_2 = 1$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -arctg4 + \pi n \end{array}\right. n \in Z$$

4. Однородные тригонометрические уравнения первой степени:

$II.asin\,x + bcosx = 0, a \neq 0, b \neq 0$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $cos\,x = 0$ или $sin\,x = 0$. Действительно, если $cos\,x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $asin\,x = 0$, откуда следует, что и $sin\,x = 0$.

Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $cos\,x = 0$, то $sin\,x = \pm 1$.

Аналогично и $sin\,x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $cos\,x$ или на $sin\,x$. Разделим, например, на $cos\,x$: $a\frac{sin\,x}{cos\,x} + b\frac{cos\,x}{cos\,x} = 0$, откуда имеем $atgx + b = 0 \Rightarrow tgx = -\frac{b}{a}$

Пример 6. Решить уравнение

$$sin\,x + cos\,x = 0$$

Разделим правую и левую части уравнения на $sin\,x$:

$$1 + ctgx = 0 \Rightarrow ctgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

4. Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени:

$II.asin\,x + bcosx = c, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Существует несколько способов решения подобных уравнений. Рассмотрим те из них, которые можно использовать для **любого** такого уравнения:

1 способ: при помощи формул двойного угла для синуса и косинуса и основного тригонометрического тождества:

$$sin\,x = 2sin\frac{x}{2}cos\,\frac{x}{2}, cos\,x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}, c = c\cdot(sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2})$$

данное уравнение сведется к уравнению I:

Пример 7. Решить уравнение

$$sin\,2x - \sqrt{3}cos\,2x = -1$$

Распишем:

$$sin\,2x = 2sin\,xcos\,x, cos\,2x = cos^2\,x - sin^2\,x, -1 = -sin^2\,x - cos^2\,x$$

Тогда уравнение примет вид:

$$(1 + \sqrt{3})sin^2\,x + 2sin\,xcos\,x + (1 - \sqrt{3})cos^2\,x = 0$$

Данное уравнение с помощью деления на $cos^2\,x$ и замены $tgx = t$ сводится к:

$$(1 + \sqrt{3})t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$$

Корнями этого уравнения являются $t_1 = -1, t_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{c} tgx = -1 \\ tgx = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = arctg(2 - \sqrt{3}) + \pi n \end{array}\right. n \in Z$$

2 способ: при помощи формул выражения функций через тангенс половинного угла:

$$sin\,\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad cos\,\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

уравнение сведется к квадратному уравнению относительно $tg\frac{x}{2}$.

Пример 8. Решить то же уравнение

$$sin\,2x - \sqrt{3}cos\,2x = -1$$

Сделаем подстановку $sin\ 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}, cos\ 2x = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ и замену $tgx = t$:

$\frac{(\sqrt{3}+1)t^2+2t+1-\sqrt{3}}{1+t^2} = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$

(т.к. $1 + t^2 \geqslant 1$ при всех t, то есть всегда $\neq 0$)

Таким образом, мы получили то же уравнение, что и, решая первым способом.

3 способ: при помощи формулы вспомогательного угла.

$asin\,x + bcosx = \sqrt{a^2+b^2} sin(x+\phi), cos\ \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Для использования данной формулы нам понадобятся формулы сложения углов:

$sin\ (\alpha \pm \beta) = sin\ \alpha \cdot cos\ \beta \pm sin\ \beta \cdot cos\ \alpha$ $\qquad cos\ (\alpha \pm \beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta \mp sin\ \alpha \cdot sin\ \beta$

Пример 9. Решить то же уравнение

$sin\ 2x - \sqrt{3} cos\ 2x = -1$

Т.к. мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части уравнения на

$\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\frac{1}{2} sin\ 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} cos\ 2x = -\frac{1}{2}$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно, например, взять за $\frac{1}{2} = cos\ \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} = sin\ \frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид:

$sin\ 2x cos\frac{\pi}{3} - sin\frac{\pi}{3} cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow sin(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

Решениями данного уравнения являются:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. n \in Z$$

Заметим, что при решении уравнения третьим способом мы добились «более красивого» ответа (хотя ответы, естественно, одинаковы), чем при решении первым или вторым способом (которые, по сути, приводят уравнение к одному и тому же виду).

Таким образом, не стоит пренебрегать третьим способом решения данного уравнения.

Если тригонометрическое уравнение можно свести к виду $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0, a \neq 0, b \neq 0,$ то с помощью формулы $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x\cos x(*)$ данное уравнение можно свести к квадратному.

Для этого необходимо сделать замену $t = \sin x \pm \cos x$, тогда $\sin x\cos x = \pm\frac{t^2-1}{2}$.

Заметим, что формула $(*)$ есть не что иное, как формула сокращенного умножения $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ при подстановке в нее $A = \sin x, B = \cos x$.

Пример 10. Решить уравнение

$3\sin 2x + 3\cos 2x = 16\sin x\cos^3 x - 8\sin x\cos x$

Вынесем общий множитель за скобки в правой части:

$3\sin 2x + 3\cos 2x = 8\sin x\cos x(2\cos^2 x - 1)$

По формулам двойного угла

$2\sin x\cos x = \sin 2x, 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

имеем:

$3(\sin 2x + \cos 2x) = 4\sin 2x\cos 2x$

Заметим, что полученное уравнение как раз записано в необходимом нам виде. Сделаем замену $t = \sin 2x + \cos 2x$, тогда $\sin 2x\cos 2x = \frac{t^2-1}{2}$. Тогда уравнение примет вид:

$3t = 2t^2 - 2 \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$

Корнями данного уравнения являются $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$.

По формулам вспомогательного аргумента

$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$, следовательно, сделав обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=2\\ \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Первое уравнение корней не имеет, т.к. область значений синуса находится в пределах от -1 до 1. Значит:

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=-\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n\\ 2x+\frac{\pi}{4}=\pi+\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\pi n\\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi n\end{array}\right. n\in Z$$

5. Формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте:

I Квадрат суммы или разности $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$:

$$(\sin x\pm\cos x)^2=\sin^2 x\pm 2\sin x\cos x+\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)\pm 2\sin x\cos x=1\pm\sin 2x$$

II Разность квадратов $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$:

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$$

III Сумма или разность кубов

$$A^3\pm B^3=(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2)$$

$$\sin^3 x\pm\cos^3 x=(\sin x\pm\cos x)(\sin^2 x\mp\sin x\cos x+\cos^2 x)=(\sin x\pm\cos x)(1\mp\sin x\cos x)=$$

$$=(\sin x\pm\cos x)\left(1\mp\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

IV Куб суммы или разности

$$(A\pm B)^3=A^3\pm B^3\pm 3AB(A\pm B)$$

$$(\sin x\pm\cos x)^3=(\sin x\pm\cos x)(\sin x\pm\cos x)^2=(\sin x\pm\cos x)(1\pm\sin 2x)$$

Таким образом, основными видами тригонометрических задач являются: квадратные тригонометрические уравнения, кубические тригонометрические уравнения, однородные тригонометрические уравнения первой и второй степени, неоднородные тригонометрические уравнения первой и второй степени, формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте [23].

1.3 Методы решения тригонометрических неравенств

Алгебраический метод

Этот метод нам хорошо известен из алгебры (метод замены переменной и подстановки).

Пример 1. Решить уравнение $2\,cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+1=0$

Решение: Используя формулы приведения, имеем

$$2cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\cos(\,x+\frac{\pi}{6})+1=0$$

делаем замену: $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=y,$ тогда $2y^2-3y+1=0,$ находим корни: $y_1=1\,, y_2=\frac{1}{2}$, откуда следует два случая:

1) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

$$x+\frac{\pi}{6}=2\pi k,$$

$$x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k; k\in\mathbb{Z}$$

2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,

$$x+\frac{\pi}{6}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,$$

$$x_2=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi n; n\in\mathbb{Z}.$$

Разложение на множители

Приводим уравнение к виду $f(x)=0$ и представляем левую часть уравнения в виде произведения $f_1(x)f_2(x)\ldots\ f_m(x)$. Тогда данное уравнение приводится к совокупности уравнений: $f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ldots,f_m(x)=0.$ Не нужно забывать, что эта совокупность не всегда равносильна исходному уравнению и что здесь надо руководствоваться правилом: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а все остальные при этом имеют смысл.[6]

Этот метод рассмотрим на примерах.

Пример 2. Решить уравнение: $sin\,x\ +\ cos\,x\ =\ 1$.

Решение. Перенесём все элементы уравнения влево, не забывая при этом, менять знак на противоположный:

$$sin\,x\ +\ cos\,x - 1\ =\ 0\ ,$$

преобразуем и разложим на множители выражение в левой части уравнения:

$$\sin x - 2sin^2\frac{x}{2} = 0\ ,$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2sin^2\frac{x}{2} = 0\ ,$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right) = 0\ ,$$

$$2\sin\frac{x}{2} = 0\ ,\qquad \text{или} \qquad \left(\cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right) = 0\ ,$$

$$\frac{x}{2} = \pi k\ ,$$

$$x_1\ = 2\pi k\ ; k \in \mathbb{Z}$$

$$tg\ \frac{x}{2} = 1\ ,$$

$$\frac{x}{2} = arctg\ 1 + \pi n\ ,$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n\ ,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n\ , n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Найдите корни уравнения: $cos^2\ x\ +\ sin\ x\ \cdot\ cos\ x\ =\ 1.$

Решение.

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x(\cos x - \sin x) = 0$$

1) $\sin x = 0$ или 2) $\cos x - \sin x = 0$

$x_1 = \pi k\ , k \in \mathbb{Z}$

$$tg\ x = 1$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n\ , n\ \in \mathbb{Z}$$

Пример 4. Найдите корни уравнения: $cos\ 2x$ – $cos\ 8x\ +\ cos\ 6x\ =\ 1.$

Решение.

$$\cos 2x + \cos 6x = 1 = + \cos 8x$$

$$2 \cos 4x \cos 2x = 2cos^2 4x$$

$$\cos 4x(\cos 2x - \cos 4x) = 0$$

$$2 \cos 4x \sin 3x \sin x = 0$$

$\cos 4x = 0$ или $2 \sin 3x = 0$ или $\sin x = 0$

$$3x = \pi n$$

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\qquad x_2 = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_3 = \pi m,$ $m \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Приведение к однородному уравнению

Определение 6. Уравнение называется однородным по отношению к sin и cos, если все его члены имеют одинаковую степень относительно sin и cos одного и того же угла.[2] Чтобы решить однородное уравнение, необходимо:

а) перенести все его члены в левую часть

б) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) высшей степени;

в) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tg .

Пример 5. Решить уравнение: $3sin^2x + 4\sin x \cos x + 5cos^2x = 2$.

Решение.

$$3sin^2x + 4\sin x \cos x + 5cos^2x = 2sin^2x + 2cos^2x$$

$$sin^2x + 4sin\, x\, cos\, x + 3cos^2x = 0$$

делим на $cos^2x \neq 0$

$$tg^2x + 4tg\, x + 3 = 0$$

делаем замену $tg\, x = y$

$$y^2 + 4y + 3 = 0$$

корни этого уравнения: $y_1 = 1, y_2 = 3$, отсюда

$tg\, x = -1$ или $tg\, x = -3$

$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k\,, k \in \mathbb{Z}$ $x_2 = -arctg\, 3 + \pi n\,, n \in \mathbb{Z}$

Переход к половинному углу

Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 6. Решить уравнение: $3\, sin\, x - 5\, cos\, x = 7$.

Решение.

$$6 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5cos^2\frac{x}{2} + 5sin^2\frac{x}{2} = 7sin^2\frac{x}{2} + 7\, cos^2\frac{x}{2}$$

$$2sin^2\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 12cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Разделим обе части на $2\, cos^2 x \neq 0$

$$tg^2\frac{x}{2} - 3tg\,\frac{x}{2} + 6 = 0$$

делаем замену $tg\, x = s$

$$s^2 - 3s + 6 = 0$$

решений это уравнение не имеет.

Введение вспомогательного угла

Рассмотрим уравнение вида:

$a\, sin\, x + b\, cos\, x = c,$

где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе эти части на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{cos\,\varphi}\sin x+\underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x=\underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C}$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1. Тогда можно обозначить их соответственно как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ (здесь φ - так называемый вспомогательный угол), и наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=C$$

$$\sin\ (x+\varphi)=C$$

и его решение:

$$x=(-1)^k\cdot\arcsin C-\varphi+\pi k$$

где

$$\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Заметим, что введенные обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

Пример 7. Найти корни данного уравнения: $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1$

Решение: $a=\sqrt{3}$, $b=-1$, поэтому разделим обе части на $\sqrt{3+1}=2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin 3x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

Отсюда, $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}\ ,k\in\mathbb{Z}$.

Уравнения, содержащие модуль функции и корень четной степени

Пример 8. $|\cos x|=\sqrt{3}\sin x$

т. к. $|f(x)|\geq 0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=\sqrt{3}\sin x\\ \cos x=-\sqrt{3}\sin x\end{array}\right.\\ \sin x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}tg\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \sin x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n\ ,n\in\mathbb{Z}\\ \sin x\geq 0\end{cases}$$

При отборе корней не нужно решать неравенство, достаточно вывести корни на окружность и выбрать нужные.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ \ m,n\in\mathbb{Z}$

Пример 9. $\sqrt{ctg\ x}=\sqrt{2\cos x}$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}ctg\ x\geq 0\\ 2\cos x\geq 0\end{cases}$

Получаем $\quad x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$

Возводим обе части в квадрат.

$$ctg\ x=2\cos x$$

$$ctg\ x-2\cos x=0$$

Умножаем на $sin\ x$

$$\cos x-2\cos x\sin x=0$$

$$\cos x\,(1-2\sin x)=0$$

$$\cos x = 0 \qquad \text{или} \qquad 1 - 2\sin x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad -$$

не удовлетворяет условиям ОДЗ

Учитывая ОДЗ функций, получим:

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \ m, n \in \mathbb{Z}.$

ГЛАВА II. ФОРМИРОВАНИЕ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

2.1 Формирование основных умений, необходимых для решения тригонометрических задач повышенной сложности.

В связи с введением нового ФГОС в исследованиях психологов и педагогов особое внимание уделяется формированию универсальных учебных действий школьников. Это возможно только в процессе целенаправленной учебной деятельности, при котором создаются условия для эффективного усвоения учащимися знаний и способов деятельности [25].

При обучении математике в старшей школе к числу таких условий относится деятельность учащихся по решению тригонометрических задач. При деятельностном подходе к обучению формирование учебной деятельности начинается с постановки учебной тригонометрической задачи [4]. При этом каждая учебная тригонометрическая задача решается на основе учебных действий, которые должны быть предметом целенаправленного формирования в процессе деятельности школьников по решению задач.

Чтобы научиться хорошо решать примеры, уравнения и неравенства по какой-либо определенной теме, надо тщательно изучить теоретический материал, владеть формулами, таблицами, чертежами.

Материал, который связан с тригонометрическими уравнениями и неравенствами, занимает значительное место в школьном курсе математики и нам известно, что эти темы широко используются в определенных разделах математики, в том числе и в решении прикладных задач.

Важную роль в формировании умений играет решение сложных задач в курсе тригонометрии в 11 классе.

Тема «Решение тригонометрических уравнений с повышенным уровнем сложности» продолжается изучаться в 11, сразу после рассмотрения темы «Обратные тригонометрические функции», далее изучаются тригонометрические неравенства. В некоторых учебниках изучение тригонометрических неравенств задач с повышенном уровнем сложности идет дополнительным материалом.

Метапредметные результаты освоения тригонометрических задач повышенной сложности включают в себя следующие умения:

– Преодоление формализма в решении задач.

– Установка на поиск способа решения всех задач данного типа, а не на получение ответа в конкретной задаче.

– Владение языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

– Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

– Владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

Опыт работы учителей математики показывает, что на первых порах старшие школьники неэффективно умеют самостоятельно ставить учебные цели и самостоятельно выполнять действия по решению тригонометрических задач повышенной сложности. Сначала им помогает учитель, но постепенно соответствующие умения приобретают сами ученики, формируя при этом у них самостоятельность.

Известно, что одна и та же предметная задача может быть использована для достижения нескольких конкретных учебных целей. Поэтому она может быть компонентом нескольких учебных задач. С другой стороны, та или иная учебная цель может быть достигнута несколькими предметными задачами. При этом учебные задания помогают учащимся осознать цели учебной деятельности, следовательно, они влияют на формирование ее положительных мотивов.

Учебные действия школьников при решении задач повышенной сложности курсе тригонометрии в 11 классе направлены на:

1) преобразование условий предметной задачи с целью выявления в ней основного отношения;

2) моделирование выделенного отношения в предметной, графической или буквенной форме;

3) преобразование модели отношения для изучения его свойств.

Учебные задания могут быть такими:

1) расскажите, какими знаниями вы воспользовались для решения данной задачи;

2) расскажите, в чем способ решения задачи, которым вы воспользовались;

3) путем сравнения различных способов решения задачи выделите наиболее рациональный, дайте оценку принятого вами решения и т.д.

При обучении решения тригонометрических задач повышенной сложности требуется осознание цели; выполнения действий по готовому алгоритму или по самостоятельно созданному учеником алгоритму; проверки результатов действия; коррекции результата.

Эти действия соответствуют общему приему, который имеет следующий состав:

1) изучить содержание задачи;

2) осуществить анализ – поиск решения;

3) составить план решения или сформулировать известный план решения задач данного класса;

4) решить задачу по составленному плану;

5) проверить или исследовать решение;

6) рассмотреть другие способы решения и выбрать из них наиболее рациональный способ;

7) записать ответ.

Часто при решении тригонометрических задач повышенной сложности приходится рассматривать различные способы решения и сравнить, какой из них наиболее рациональный. Одним из таких методов в математике является использование тригонометрической подстановки при решении задач. Он является одним из эффективных методов, особенно в тех случаях, когда требуется решить нестандартные задачи.

Действительно, иногда сложно сразу догадаться, какую именно подстановку необходимо применить для решения той или иной математической задачи. Для этого необходимо овладеть основными методами использования тригонометрической подстановки, уметь анализировать условия задачи, уметь относить задачу к определенному типу и т.д.

В связи с этим, прежде чем использовать метод тригонометрической подстановки, необходимо повторить с учащимися следующие темы: основные свойства тригонометрических функций; формулы тригонометрии; методы решения рациональных, дробно-рациональных, иррациональных уравнений и неравенств, их систем; исследование и построение графиков функций; нахождение наибольшего и наименьшего значений функции; вычисление интеграла и т.д.

Таким образом, для правильного формирования умений по решению тригонометрических задач повышенной сложности необходимо разработать элективный курс, который представлен в следующем параграфе.

2.2 Элективный курс «Тригонометрические задачи повышенной сложности»

Тригонометрия — это раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их использование в геометрии [3]. Тригонометрические функции используются для описания свойств различных углов, треугольников и периодических функций. Изучение тригонометрии поможет вам понять эти свойства. Занятия в техникуме и самостоятельная работа помогут вам усвоить основы тригонометрии и понять многие периодические процессы.

Было установлено, что в тригонометрии часто всего возникают ошибки у школьников 11 класса, и в целом идет непонимание материала.

Поэтому в рамках настоящего исследования нами предлагается Элективный курс «Тригонометрические задачи повышенной сложности» для учеников 11 класса.

Цель курса: более подробно раскрыть уже имеющиеся знания о разделе «Тригонометрия», а также дать знания и развить умения по решению задач повышенной сложности для учеников 11 класса.

Задачи курса:

1) расширение знаний студентов о тригонометрических функциях;

2) развитие навыков применения свойств тригонометрических функций и связи между тригонометрическими функциями при преобразовании тригонометрических выражений, решении тригонометрических уравнений и неравенств при решении нестандартных задач; развивать логическое мышление и математические навыки.

Программа элективного курса рассчитана на 11 класс и предполагает 34 часа (1 час в неделю).

Форма занятий: комбинированные уроки, на которых предполагается изучение теоретического материала и решение задач. Виды уроков: урок – лекция, урок – практикум, урок самостоятельного решения задач (по выбору преподавателя с учетом подготовленности класса).

В конечном итоге изучения программы данного элективного курса обучающиеся должны *знать:*

1) Как определять радианную меру угла;

2) Что такое синус, косинус, тангенс, котангенс и таблицу их значений;

3) Формулы приведения и корней тригонометрических уравнений;

4) Что такое периодичность функции;

5) Алгоритм решения тригонометрических задач.

Уметь:

1) Определять четверть, в которую попадает точка при повороте на заданный угол;

2) Находить значения функций по заданному значению одной функции;

3) Применять формулы тригонометрии при решении уравнений и упрощении выражений;

4) Решать тригонометрические неравенства;

5) Находить область определения сложных функций, содержащих тригонометрические функции;

6)Находить множество значений функций, содержащих тригонометрические функции; 7) Решать тригонометрические уравнения, содержащие модуль, параметр.

Формы контроля: самостоятельная работа, практическая работа, зачёт.

Содержание изучаемого курса.

Раздел №1. Тригонометрические уравнения и неравенства.

1) Уравнения вида cosx = a;
2) Решение уравнений вида sinx = a;
3) Решение уравнений вида tgx = a;
4) Решение уравнений вида ctgx = a;
5) Решение уравнений вида tgx = a и ctgx = a;
6) Решение тригонометрических уравнений и т.д.;
7) Контрольная работа № 1. Тригонометрические уравнения и неравенства

Раздел №2. Тригонометрические функции:

1) Область определения и множество значений тригонометрических функций;
2) Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций;
3) Свойства функции y = cosx и её график;
4) Самостоятельная работа по теме «Свойства функции y = cosx и её график»;

5) Свойства функции y = sinx и её график;

6) Самостоятельная работа по теме «Свойства функции y = sinx и её график»;

7) Свойства функции y = tgx и её график;

8) Свойства функции y =ctgx и её график;

9) Обратные тригонометрические функции и т.д.;

10) Контрольная работа № 2. Тригонометрические функции.

Далее составим тематический план элективного курса.

Таблица 1 Тематический план курса

№ Урока	Содержание учебного материала	Количество часов	Форма учебного занятия
1	Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.	1	Лекция
2	Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса	1	Комбинированное занятие
3	Радианная мера угла. Вычисление значений тригонометрических функций	1	Комбинированное занятие
4	Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.	1	Консультация
5	Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений.	1	Самостоятельная работа
6	Формулы приведения	1	Комбинированное занятие
7	Тригонометрические функции. Их свойства и графики.	1	Семинар
8	Тригонометрические функции. Их свойства и графики.	1	Практикум
9	Обратные тригонометрические функции и их графики.	1	Лекция
10	Обратные тригонометрические функции и их графики.	1	Комбинированное занятие
11	Формулы сложения.	1	Комбинированное занятие
12	Формулы кратных аргументов.	1	Комбинированное занятие
13	Формулы суммы и разности тригонометрических функций.	1	Комбинированное занятие
14	Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.	1	Самостоятельная работа
15	Решение тригонометрических уравнений.	1	Лекция
16	Решение тригонометрических	1	Комбинированное

	уравнений.		занятие
17	Решение тригонометрических уравнений.	1	Групповая работа
18	Решение тригонометрических уравнений.	1	Комбинированное занятие
19	Решение тригонометрических уравнений.	1	Комбинированное занятие
20	Решение тригонометрических уравнений.	1	Практикум
21	Решение тригонометрических уравнений.	1	Консультация
22	Решение тригонометрических уравнений.	1	Самостоятельная работа
23	Решение тригонометрических неравенств. Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Лекция
24	Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Комбинированное занятие
25	Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Групповая работа
26	Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Комбинированное занятие
27	Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Комбинированное занятие
28	Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Комбинированное занятие
29	Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Групповая работа
30	Решение тригонометрических неравенств и их систем.	1	Самостоятельная работа
31	Решение тригонометрических уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, радикалы, параметры.	1	Лекция
32	Решение тригонометрических уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, радикалы, параметры.	1	Комбинированное занятие
33	Решение тригонометрических уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, радикалы, параметры.	1	Самостоятельная работа
34	Итоговая зачетная работа	1	Зачёт
	Итого	34	

2.3 Описание педагогического эксперимента

В рамках исследования была проведена экспериментальная работа, состоящая из двух этапов: констатирующего и поискового, на базе МБОУ «Холоднянская ООШ». Цель констатирующего этапа эксперимента: выявить уровень подготовки одиннадцатиклассников по теме «Тригонометрия». В проведении эксперимента приняли участие всего 7 учащихся.

На этом этапе обучающимся было предложено решить контрольную работу, состоящую из 7 вопросов (Приложение 1).

При решении данной работы в основном ошибки были сделаны в задании №4 (на преобразование угла к острому) и задании №6 (на составление двойных неравенств по выделенным участкам графика). Учащиеся неверно определяли четверть, в которой находится угол, слабо решали тригонометрические неравенства, плохо ориентировались на тригонометрической окружности. Стоит отметить, что большинство обучающихся умеют преобразовывать выражения, хорошо знают тригонометрические формулы.

Анализ контрольной работы показан в таблице 2 (в процентном отношении)

Таблица 2 Результаты контрольной работы

№ задания	Всего учащиеся
1	85,7%
2	57,1%
3	57,1%
4	42,9%
5	71,4%
6	28,6%
7	85,7%

Результаты эксперимента показали, что уровень знаний одиннадцатиклассников по разделу «Тригонометрия» на низком уровне.

Поэтому был проведен поисковой эксперимент. Его цель: сформировать у обучающихся умение решать тригонометрические задачи. Для выполнения поставленной цели были проведены уроки, где одиннадцатиклассникам давались задачи соответственного уровня.

Фрагмент урока №23 «Решение тригонометрических неравенств»

Учитель: Дети, давайте с вами вспомним, как решать тригонометрические неравенства с помощью окружности. Нам дано неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$. Первое, что мы сделаем, это начертим единичную окружность. На оси абсцисс найдем точку $\frac{1}{2}$ и проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy. Данная прямая будет пересекать нашу окружность в двух точках. Эти точки являются числами, косинус которых равен $\frac{1}{2}$. Так как у нас косинус больше $\frac{1}{2}$, то отмечаем дугу, расположенную правее данной прямой.

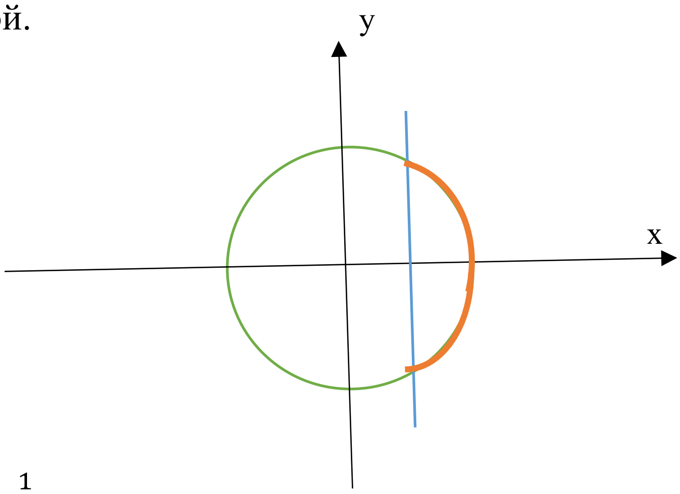

Рис. 3 Косинус $\frac{1}{2}$.

Запишем концы нашей дуги : $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$. (Незабываем: при движении против часовой стрелки числа увеличиваются, а по часовой – уменьшаются).

Получается, что $\cos x > \frac{1}{2}$ при $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$. Мы рассмотрели только один период, поэтому все решения неравенства записываются в таком виде $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Для лучшего усвоения материала нами разработаны рекомендации для школьников.

Изучите основы тригонометрии.

1.Ознакомьтесь с понятием треугольника.

В сущности, тригонометрия занимается изучением различных соотношений в треугольниках. Треугольник имеет три стороны и три угла. Сумма углов любого треугольника составляет 180 градусов. При изучении тригонометрии необходимо ознакомиться с треугольниками и связанными с ними понятиями, такими как:[1]

- гипотенуза — самая длинная сторона прямоугольного треугольника;
- тупой угол — угол более 90 градусов;
- острый угол — угол менее 90 градусов.

2.Научитесь строить единичную окружность.

Единичная окружность дает возможность построить любой прямоугольный треугольник так, чтобы гипотенуза была равна единице. Это удобно при работе с тригонометрическими функциями, такими как синус и косинус. Освоив единичную окружность, вы легко сможете находить значения тригонометрических функций для определенных углов и решать задачи, в которых фигурируют треугольники с этими углами.

Пример 1. Синус угла величиной 30 градусов составляет 0,50. Это означает, что длина противолежащего данному углу катета равна половине длины гипотенузы.

Пример 2. С помощью данного соотношения можно вычислить длину гипотенузы треугольника, в котором есть угол величиной 30 градусов, а длина противолежащего этому углу катета равна 7 сантиметрам. В этом случае длина гипотенузы составит 14 сантиметров.

3.Ознакомьтесь с тригонометрическими функциями.

Существует шесть основных тригонометрических функций, которые необходимо знать при изучении тригонометрии. Эти функции представляют собой соотношения между различными сторонами прямоугольного треугольника и помогают понять свойства любого треугольника. Вот эти шесть функций:[3]

- синус (sin);

- косинус (cos);
- тангенс (tg);
- секанс (sec);
- косеканс (cosec);
- котангенс (ctg).

4.Запомните соотношения между функциями.

При изучении тригонометрии крайне важно понимать, что все тригонометрические функции связаны между собой. Хотя синус, косинус, тангенс и другие функции используются по-разному, они находят широкое применение благодаря тому, что между ними существуют определенные соотношения. Эти соотношения легко понять с помощью единичной окружности. Научитесь пользоваться единичной окружностью, и с помощью описываемых ею соотношений вы сможете решать многие задачи.

Применение тригонометрии.

1.Узнайте об основных областях науки, в которых используется тригонометрия.

Тригонометрия полезна во многих разделах математики и других точных наук. С помощью тригонометрии можно найти величины углов и прямых отрезков. Кроме того, тригонометрическими функциями можно описать любой циклический процесс.

- Например, колебания пружины можно описать синусоидальной функцией.

2.Подумайте о периодических процессах.

Иногда абстрактные понятия математики и других точных наук трудны для понимания. Тем не менее, они присутствуют в окружающем мире, и это может облегчить их понимание. Приглядитесь к периодическим явлениям вокруг вас и попробуйте связать их с тригонометрией.

- Луна имеет предсказуемый цикл, продолжительность которого составляет около 29,5 дня.

3. Представьте себе, как можно изучать естественные циклы.

Когда вы поймете, что в природе протекает множество периодических процессов, подумайте о том, как можно изучать эти процессы. Мысленно представьте, как выглядит изображение таких процессов на графике. С помощью графика можно составить уравнение, которое описывает наблюдаемое явление. При этом вам пригодятся тригонометрические функции.

- Представьте себе приливы и отливы на берегу моря. Во время прилива вода поднимается до определенного уровня, а затем наступает отлив, и уровень воды падает. После отлива вновь следует прилив, и уровень воды поднимается. Этот циклический процесс может продолжаться бесконечно. Его можно описать тригонометрической функцией, например косинусом.

Изучайте материал заранее.

1.Прочтите соответствующий раздел.

Некоторым людям тяжело усвоить идеи тригонометрии с первого раза. Если вы ознакомитесь с соответствующим материалом перед занятиями, то лучше усвоите его. Старайтесь чаще повторять изучаемый предмет — таким образом вы обнаружите больше взаимосвязей между различными понятиями и концепциями тригонометрии.

- Кроме того, это позволит вам заранее выявить неясные моменты.

2. Ведите конспект.

Хотя беглый просмотр учебника лучше, чем ничего, при изучении тригонометрии необходимо неспешное вдумчивое чтение. При изучении какого-либо раздела ведите подробный конспект. Помните, что знание тригонометрии накапливается постепенно, и новый материал опирается на изученный ранее, поэтому записи уже пройденного помогут вам продвинуться дальше.

- Помимо прочего, записывайте возникшие у вас вопросы, чтобы затем задать их учителю.

3. Решайте приведенные в учебнике задачи.

Даже если вам легко дается тригонометрия, необходимо решать задачи. Чтобы убедиться, что вы действительно поняли изученный материал, попробуйте перед занятиями решить несколько задач. Если при этом у вас возникнут проблемы, вы определите, что именно вам нужно выяснить во время занятий.[10]

- Во многих учебниках в конце приведены ответы к задачам. С их помощью можно проверить, правильно ли вы решили задачи.

4. Берите на занятия все необходимое.

Не забывайте свой конспект и решения задач. Эти подручные материалы помогут вам освежить в памяти уже пройденное и продвинуться дальше в изучении материала. Проясняйте также все вопросы, которые возникли у вас при предварительном чтении учебника.

Ведите конспект.

1.Записывайте все в один конспект.

Различные разделы тригонометрии тесно связаны между собой. Лучше всего записывать все в одном месте, чтобы вы могли в любой момент освежить в памяти ранее пройденный материал. Отведите для записей отдельную тетрадь или папку.

- В конспект можно записывать также решения задач.

2. Будьте внимательны во время занятий.

Не отвлекайтесь на общение с товарищами или на выполнение домашнего задания по другому предмету. Уделяйте все свое внимание излагаемому предмету и задачам. Заносите в конспект всю важную информацию и то, что учитель пишет на доске.

3. Проявляйте инициативу.

Вызывайтесь к доске решать задачи и отвечайте на вопросы, которые задает учитель. Задавайте вопросы сами, если вам что-нибудь неясно. Обсуждайте изучаемый материал с учителем и однокурсниками (в рамках дозволенного). Это облегчит процесс обучения и сделает его более приятным.

- Если учитель предпочитает, чтобы его не перебивали, можно задать ему вопросы после занятий. Не стесняйтесь: работа учителя заключается в том, чтобы помочь вам в изучении тригонометрии.

4. Старайтесь решать больше задач.

Выполняйте все домашние задания. Домашняя работа помогает лучше усвоить пройденный материал. Проверьте, все ли вам понятно. Если учитель ничего не задал на дом, откройте учебник и порешайте задачи по последней пройденной теме.

Советы:

- Помните о том, что изучение математики состоит в усвоении определенного образа мышления, а не только в запоминании формул.
- Перед изучением тригонометрии освежите в памяти основы алгебры и геометрии.

Предупреждения:

- Тригонометрию нельзя выучить путем автоматического запоминания. Необходимо понимать основные идеи и методы.
- Простая зубрежка неэффективна при изучении тригонометрии.

Таким образом, разработанный нами курс весьма эффективен. Данный элективный курс можно использовать в школе для подготовки выпускников к экзамену.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По проведенному исследованию необходимо сделать ряд выводов.

В первой главе рассмотрены основные понятия тригонометрии, виды тригонометрических уравнений и методы решения. Некоторые методы были рассмотрены более подробно на примерах. Также были даны рекомендации по решению тригонометрических уравнений.

Было установлено, что роль тригонометрических задач огромна. Тригонометрические знания сегодня используются практически во всех науках и отраслях точных знаний, что является феноменальным фактом. Эти знания достаточно активно применяются в физике, геометрии, инженерии, а также в астрономии, географии, музыке, финансовом анализе, электронике, статистике, теории вероятности, медицине, фармацевтике, архитектуре и компьютерной графике.

Во второй главе были сформированы основные умения, необходимые для решения тригонометрических задач, разработана программа элективного курса «Тригонометрические задачи повышенной сложности». Данный элективный курс более подробно объясняет решение тригонометрических задач, показывает различные способы решения одной и той же задачи. Курс создан для помощи одиннадцатиклассникам при сдаче государственного единого экзамена.

Было установлено, что в тригонометрии часто всего возникают ошибки у школьников 11 класса, и в целом идет непонимание материала.

Поэтому в рамках настоящего исследования нами предлагается Элективный курс «Тригонометрические задачи повышенной сложности» для учеников 11 класса.

Цель курса: более подробно раскрыть уже имеющиеся знания о разделе «Тригонометрия», а также дать знания и развить умения по решению задач повышенной сложности для учеников 11 класса.

Задачи курса:

1) расширение знаний студентов о тригонометрических функциях;

2) развитие навыков применения свойств тригонометрических функций и связи между тригонометрическими функциями при преобразовании тригонометрических выражений, решении тригонометрических уравнений и неравенств при решении нестандартных задач; развивать логическое мышление и математические навыки.

Программа элективного курса рассчитана на 11 класс и предполагает 34 часа (1 час в неделю).

Цели и задачи, поставленные в дипломной работе, достигнуты. Данный элективный курс можно использовать в школе для подготовки выпускников к экзамену.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрова, О.В. Математика. Тригонометрия / О.В. Александрова, Е.А. Сагомонян, Ю.С. Семенов. – М.: ИЛЕКСА, 2016г. – 88 с.
2. Алексеев, А. Тригонометрические подстановки / А. Алексеев. - М.: Квант, 1995г. – 40-42 с.
3. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11 / Ш.А. Алимов. – М.: Просвещение, 2001. – 96 с.
4. Андрова, И.А. Модульный урок в 10 классе по теме «Решение тригонометрических нерпавенств» / И.А. Андрова, И.В. Ромашко. – М.: Квант, 2001г. – 28-32 с.
5. Бардушкин, В. Тригонометрические уравнения. Отбор корней / В. Бардушкин, А. Прокофьев. – М.: Математика, №12, 2005г. – 23-27 с.
6. Бескин, Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподования / Н.М. Бескин. – М.: Учпедриз, 1950г. – 57 с.
7. Вавилов, В.В. Задачи по математике / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник. – М.: Наука, 2007г. – 328 с.
8. Водинчар, М.И. Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенст / М.И. Водинчар. – М.: Народная асвета, 1999г. – 73-77 с.
9. Гельфанд, И. Тригонометрия / И. Гельфанд, С.М. Львовский, А. Тоом. – М.: МЦНМО, 2014г. – 247 с.
10. Гилемханов, Р.Г. О преподавании тригонометрии в 10 классе по курсу математика в школе / Р.Г. Гилемханов. - М.: Квант, 2001г. - 27 с.
11. Зарецкий, В.И. Изучение тригонометрических функции в средней школе / В.И. Зарецкий. – М: Народная асвета, 1997г. – 69 с.
12. Зарецкий, В.И. Изучение тригонометрических функции в средней школе / В.И. Зарецкий. – М: Народная асвета, 1997г. – 174 с.

13. Ивлев, Б. И. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2007. – 176 с.
14. Карп, А. П. Сборник задач по алгебре и началам анализа, 10-11 классы / А. П. Карп. - М.: Просвещение, 1995. – 176 с.
15. Кожухов И.Б. Универсальный справочник по математике / И.Б. Кожухов. – М.: Лист Нью, 2015г. – 327 с.
16. Крамор, В.С. Тригонометрические функции / В.С. Крамор. – М.: Просвещение, 2010г. – 298 с.
17. Локоть, В.В. Задачи с параметрами и их решение. Тригонометрия: уравнения, неравенства, системы. 10 класс / В.В. Локоть. – М.: АРКТИ, 2014г. – 49 с.
18. Лурье, М.В. Тригонометрия. Техника решения задач / М.В. Лурье. – М.: Высшая школа, 2016г. – 104 с.
19. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 / А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2003г. – 168 с.
20. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А.Г. Мордкович – М.: Мнемозина, 2002г. – 32-38 с.
21. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А.Г. Мордкович – М.: Мнемозина, 2002г. – 163-165 с.
22. Новиков, А.И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства / А.И. Новиков – Р.: РГРА, 2015г. – 88 с.
23. Панчишкин, А.А. Тригонометрические функции в задачах / А.А. Панчишкин. – М.: Наука, 2009г. – 113 с.
24. Пичурин, Л.Ф. О тригонометрии и не только о ней / Л.Ф. Пичурин. – М.: Просвещение, 1995г. – 97 с.

25. Потапов, М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции / М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко – М.: Высшая школа, 2016г. – 139 с.
26. Раббот, Ж. Тригонометрические уравнения / Ж. Раббот. – М.: Квант, 2011г. – 84 с.
27. Решетников, Н.Н. Тригонометрия в школе / Н.Н. Решетников. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006г. – 84 с.
28. Решетников, Н.Н. Тригонометрия в школе / Н.Н. Решетников. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006г. – 142 с
29. Садовничий, Ю.В. Математика. Профильный уровень. Тригонометрические уравнения / Ю.В. Садовничий. – М.: Экзамен, 2019г. – 78 с.
30. Сапунов, П.И. Преобразование и объединение групп общих решений тригонометрических уравнений / П.И. Сапунов. – М.: Просвещение, 2005г. – 37 с.
31. Синакевич, С.В. Тригонометрические функции / Синакевич С.В. - М: Учпедгиз, 2007г. – 65 с.
32. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Режим доступа: http://www.edu.ru/db/portal/obschee/, дата обращения: 19.03.2019.
33. Шабашова, О.В. Приемы отбора корней в тригонометрических уравнениях / О.В. Шабашова. – М.: Просвещение, 1997г. – 34 с.
34. Шахмейстер, А. Тригонометрия / А. Шахмейстер. – М.: МЦНМО, 2014г. – 163 с.