«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 04.03.05
Педагогическое образование, профиль математика и физика
очной формы обучения, группы 02041401
Клименко Ивана Ивановича

Научный руководитель
к.п.н., доцент
Цецорина Т.А.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрия как дисциплина появилась более трех тысяч лет назад. Из источников следует, что создателями тригонометрии считаются древнейшие астрономы. В настоящее время область использования тригонометрии значительно изменила свои рамки, сегодня она включает практически все естественные науки, технику и так далее.

Уже давно тригонометрия, как отдельная наука прекратила свое существование, и начала переходить в алгебру и геометрию, а также в алгебру и начала анализа основной школы.

Весьма уже давно греки называли тригонометрию наиболее значимой наукой. В результате этого сложилось, что особенное место в школьном курсе уделялось конкретно тригонометрии.

Тригонометрические уравнения занимают одно из основных мест в курсе математики старшей школы по содержанию учебного материала, а также и по способам учебно-познавательной деятельности, которые должны быть сформированы при их исследовании и применены к решению значительного числа задач теоретического и практического характера.

В школьном математическом образовании необходимо подчеркнуть несколько направлений в изучении тригонометрических уравнений и неравенств:

1. Решение уравнений и неравенств;
2. Решение систем уравнений и неравенств;
3. Отбор корней.

Анализ учебной и научно–методической литературы свидетельствует, что большое внимание уделяется абсолютно всем трем направлениям.

В настоящее время следует повысить практические тенденции в обучении математике. Как показал анализ содержания школьного математического образования, возможности и способности решения тригонометрических уравнений в этом плане довольно широки.

Отметим, что решение тригонометрических уравнений и неравенств систематизирует познания обучающихся, связанных с использованием учебного материала по тригонометрии и предоставляет возможность увеличить уровень познаний по данной теме.

Актуальность исследования: исследование использованного материала, посвященного решению тригонометрических уравнений в учебных пособиях «Алгебра и начала анализа» для 10 – 11 классов разных авторов, учет целей изучения тригонометрических уравнений, а так же обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, свидетельствует о том, что перед учителем стоит задача – формировать у обучающихся умения решать уравнения любого вида, формируя этим общие тригонометрические представления, которые помогут обучающимся и при подготовке к ЕГЭ.

Объект исследования: процесс обучения математике.

Предмет исследования: методика формирования у обучающихся умений решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Цель исследования: разработать методику, направленную на формирование у обучающихся умений решать тригонометрические уравнения и неравенства в курсах математики.

Под осознанным и качественным исследованием тригонометрии мы понимаем процесс обучения, осуществляемый с учетом идей личностно-ориентированного обучения, при реализации которого не допускается формальной передачи познаний и схоластической отработки умений, т.е. изучение тригонометрии должно опираться как на логическую, так и на образную составляющие, при этом обучающимся должны быть предоставлены возможности для дифференциации и индивидуализации.

В процессе исследования и проверке достоверности гипотезы необходимо решить следующие *задачи*:

1. Провести анализ психолого-педагогической, учебной и методической литературы по проблеме исследования.

2. Выявить роль тригонометрических уравнений и неравенств в обучении математики.

3. Выделить основы формирования умений необходимых для решения тригонометрических уравнений и неравенств.

4. Классифицировать методы решения тригонометрических уравнений.

5. Выявить проблемы, возникающие при отборе корней в хоре решений уравнений.

6. Классифицировать способы отбора корней.

Структура и объем работы. Работа состоит из двух глав, введения и заключения. Введение представляет собой описание актуальности изучения тригонометрии в современном мире. Первая глава посвящена рассмотрению значимости тригонометрического материала в школьном курсе математики, классификации тригонометрических уравнений и неравенств, а так же методов их решений. Во второй главе описаны основные умения, необходимые при решении тригонометрических уравнений и неравенств и методика формирования умений решать тригонометрические уравнения и неравенства. Список литературы включает 25 источников.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1.1 Виды тригонометрических уравнений и методы их решений.

При решении многих математических задач, в основном возникающих до 10 класса, порядок выполнения вычислительных операций, ведущих к конкретной цели, будет определен однозначно. Задачи данного типа содержат линейные и квадратные уравнения и неравенства, дробные уравнения, а также уравнения, которые сводятся к квадратным. Совершенно очевидно, что результат решения различных задач будет целиком зависеть от правильности выбора метода решения, а также последовательности этапов решения. В этом случае необходимо обязательно обладать навыками выполнения тождественных преобразований.

Совершенно иная ситуация возникает с тригонометрическими уравнениями. Установить, то, что уравнение является тригонометрическим, для нас особой проблемы не составляет. Последующие сложности возникают при определении последовательности действий, которые бы могли привести к истинному ответу.

При решении уравнений, глядя на его внешний вид, в некоторых случаях трудно установить его тип. А не зная этого типа практически невозможно подобрать необходимую формулу из большого их числа.

Основная проблема, с которой сталкиваются обучающиеся в школе состоит в том, что они никак не представляют для себя полный диапазон применения и использования материала тригонометрии, так как он не изучается в школе отдельным блоком, потому что изучение тригонометрии длится на протяжении изучения алгебры и начала анализа в 10-11 классах.

Постараемся выстроить такую очередность методов решения уравнений, чтобы школьники смогли уяснить для себя «базу», другими словами, простые методы решения, а потом уже двигаться к изучению более трудных методов. Таким образом, начнем наше исследование тригонометрических уравнений с определения.

К определению тригонометрического уравнения различные авторы относятся по-разному. Мы назовем тригонометрическим уравнением равенство тригонометрических выражений, которое содержит неизвестную (переменную) только под знаком тригонометрических функций. Уравнения $cos6x = sinx$; $tg\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - tg(\frac{3\pi}{2} - 5x) = 0$; $sin3x + sin5x = sin4x$ и т.д. суть тригонометрического уравнения. Уравнения $sinx = \frac{1}{2}x$; $cos2x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ и т.д не являются тригонометрическими. Они относятся к типу трансцендентных уравнений и, как правило, решаются приближенно или графически. Может случиться так, что уравнение не является тригонометрическим согласно определению, однако оно может быть сведено к тригонометрическому. Например, $2x(x-6)cos2x = x - 6$. Мы видим, что $x - 6$ не содержится под знаком тригонометрических функций, однако оно решается аналитически: $(x-6)(2cos2x - 1) = 0$, откуда $x - 6$ или $cos2x = \frac{1}{2}, x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,$ где $n \in Z$.

Для решения различных видов тригонометрических уравнений следует уметь решать простейшие тригонометрические уравнения. Перейдем к рассмотрению решения тригонометрических уравнений различных видов.

1) Уравнения, сводящиеся к простейшим

К уравнениям данного вида относят: $sinx = a$, cos x$= a$, $tgx = a, ctgx = a$. Таким уравнениям необходимо уделить особое внимание, т.к. это основные тригонометрические уравнения без которых невозможно решить другие.

Уравнение вида $sinx = a$.

Уравнение $sinx = a$, где $|a| \leq 1$, имеет бесконечно много корней. Например, уравнению $sinx = \frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения $x_1 = \frac{\pi}{6}$,

$x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ и т.д. Общая формула, по которой находят все корни этого уравнения определяется так: $x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$ (1), *где* $n \in Z$ Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения и $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$. Если $-1 < a < 0$, то формула (1) примет вид: $x = (-1)^{n+1} \arcsin|a| + n\pi,\ n \in Z$. Полезно знать, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Частные случаи.

1. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$.
2. Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$.
3. Если $\sin x = 0$, то $x = n\pi,\ n \in Z$. (Рис.1,з)

Уравнение вида $\cos x = a$.

Уравнение $\cos x = a$ может иметь решение только при $|a| \leq 1$. Известно, что решение данного уравнения находят по обобщенной формуле $x = \pm arccos\alpha + 2\pi k, k \in Z$ (Рис. 1, а) и $0 \leq \arccos a \leq \pi$. Полезно знать, что $0 \leq arccos\alpha \leq \pi$ $\arccos(-\alpha) = \pi - arccos\alpha$; $\cos(arccos\alpha) = \alpha$.

Частные случаи:

1. Если $cosx = 1$; то $x = 2\pi k, k \in Z$ (Рисунок 1, б)
2. Если $cosx = -1$; то $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$ (Рисунок 1, в)
3. Если $cosx = 0$; то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ (Рисунок 1, г)

Уравнение вида $tgx = \alpha$, где $a \in R$

Известно, что решение данного уравнения находят по обобщенной формуле: $x = arctga + n\pi,$ где $n \in Z$ (Рисунок 1, и) Полезно знать, что $arctg(-\alpha) = -arctg\alpha; -\frac{\pi}{2} < arctg < \frac{\pi}{2};\ tg(arctg\alpha) = \alpha.$

Уравнение вида $ctgx = \alpha,$ где $a \in R.$

Известно, что решение данного уравнения находят по обобщенной формуле: $x = arctg\alpha + \pi n, n \in Z$ (Рисунок 1, к). Полезно знать, что $0 < arcctg\alpha < \pi$; $arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha$; $ctg(arcctg\alpha) = \alpha$.

Уравнения, сводящиеся к простейшим, имеют вид $sinf(x) = \alpha$, $cosf(x) = \alpha$, $tgf(x) = \alpha$, $ctgf(x) = \alpha$ и решаются сначала относительно $f(x)$, а затем относительно x.

Примеры:

- $co\,s(3x-2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \to 3x - 2 = arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2n\pi, n \in Z \to 3x - 2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z, x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z.$
- $sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + n\pi \to \frac{3}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\frac{1}{3} + n \to \sqrt{x} = \frac{3}{(-1)^{n+1}*\frac{1}{3}+n} \to x = \frac{81}{(3n+(-1)^{n+1})^2}, n \in N.$
- $ctg\frac{3}{2}x = 5 \to \frac{3}{2}x = arcctg5 + n\pi, \to x = \frac{2}{3}arcctg5 + \frac{2}{3}n\pi, n \in Z.$

2)Уравнения, сводимые к алгебраическим.

Это уравнения, сводимые к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного выражения, входящего только под знак функции.

Тригонометрические уравнения $a\,sin^2x + b\,sin\,x + c = 0$, $a\,cos^3x + b\,cos\,x + c = 0$, $a\,tg^4x + b\,tg^{\,3}3\,x + c = 0$, $a\,ctg^2 2x + b\,ctg2x + c = 0$ уже сведены к алгебраическим. Действительно, положив в них соответственно $sin\,x = y$, $cos\,x = z$, $tg\,3x = t$, $ctg\,2x = u$, получим следующие алгебраические уравнения: $ay^2 + by + c = 0$, $az^3 + bz + c = 0$, $at^4 + bt^2 + c = 0$, $au^2 + bu + c = 0$. Решим каждое из них, найдем $si\,n\,x, co\,s\,x, t\,g\,3x, ctg\,2x$.

Уравнения $a\,sin^2x + b\,cos\,x + c = 0$, $a\,cos^2x + b\,sin\,x + c = 0$, $a\,tg\,x + b\,ctg\,x + c = 0$ не являются по виду алгебраическими, но их можно свести: $a\,cos^2x - b\,cos\,x - (a + c) = 0$, $a\,sin^2x - b\,sin\,x - (a + c) = 0$ и $atgx + \frac{b}{tgx} = 0$.

Примеры. Решите уравнения.

а) $2sin^2x - 7cosx - 5 = 0$

Решение $2(1 - cos^2x) - 7cosx - 5 = 0,$

$2 - 2cos^2x - 7cosx - 5 = 0,$

$2cos^2x + 7cosx + 3 = 0,$

Сделаем замену ($cosx = y$), тогда $2y^2 + 7y + 3 = 0$

$y_1 = \frac{1}{2}. y_2 = -3$

1) $cosx = -3 < -1, x = \emptyset$

2) $cosx = -\frac{1}{2}, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k. k \in Z$

Ответ: $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in Z.$

b) $2cos^23x + sin3x - 1 = 0.$

Решение. $2(1 - sin^23x) + sin3x - 1$=0

$2sin^23x - sin3x - 1 = 0$

Сделаем замену ($sin3x = y$), тогда $2y^2 - y - 1 = 0$

$y_{1,2} = \frac{1\pm3}{4}.$

1) $sin3x = 1, 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, 3x = \frac{\pi}{2}(4k + 1), x = (4k + 1)\frac{\pi}{6}, k \in Z;$

2) $sin3x = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + n\frac{\pi}{3}, n \in Z.$

Ответ: $x = (4k + 1)\frac{\pi}{6}, k \in Z; x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + n\frac{\pi}{3}, n \in Z.$

В ходе решения данных тригонометрических уравнений больших трудностей у нас не возникло. Формулы:

1) $sin^2x + cos^2x$=1;

2) $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha};$

3) $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha};$

4) $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha};$

5) 1+$tg^2\alpha$=$\frac{1}{cos^2\alpha};$

6) 1+$ctg^2\alpha$=$\frac{1}{sin^2\alpha};$

7) $1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha;$

8) $1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha;$

9) $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};$

10) $sin2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha};$

11) $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha;$

12) $cos2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+\alpha}$;

13) $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

или $cos2a = 2cos^2a - 1$, или $cos2a = 1 - 2sin^2a$;

14) Формулы приведения.

Формулы необходимо учить сразу группами, но не по одной, пытаясь раскрыть схожесть и отличие среди формул из разных групп. Кроме того необходимо запоминать вывод формулы, т.е. преобразования, которые устанавливают связь с другими формулами. Немаловажно донести обучающимся, насколько важно твердо понимать формулы и компетентно применять в необходимой ситуации.

3)Однородные уравнения

Тригонометрическое уравнение вида $R(sinx, cos$x) можно свести к алгебраическому относительно tg x. Такие уравнения характеризуются тем, что они не меняются при одновременной замене $sinx$ на $-sinx$ и $\cos x$ на $-cosx$. Примерами таких уравнений являются однородные уравнения: $a\,sinx + b\cos x = 0$; $a\,sin^2x + b\,sin\,x\cos x + c\,cos^2x = 0$ (соответственно первой и второй степени).

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Разделим обе части первого уравнения на $cosx$, а обе части второго cos^2x. В результате получим уравнения, алгебраические относительно tg x:

$atg\,x + b = 0$; $a\,tg^2x + b\ tg\,x + c = 0$

Заметим, что при а $\neq 0$ однородному уравнению не удовлетворяют те значения x, при которых $cos\,x = 0$. Поэтому деление на $cosx$ (или cos^2x) обеих частей однородного уравнения в случае а $\neq 0$ не приводит к потере корней.

Уравнение $a\,sin^2x + b\,sin\,x\cos x + c\,cos^2x = d$ в таком виде не является однородным, но его можно привести к однородному умножив его правую часть на $sin^2x + cos^2x = 1$: $a\,sin^2x + b\,sin\,x\cos x + c\,cos^2x = d\,(sin^2x + cos^2x)$ т.е $a\,sin^2x + b\,sin\,x\cos x + c\,cos^2x = d\,sin^2x +$

$dcos^2x$ или $(a-d)\,tg^2x+b\,tgx+(c-d)=0.$ (4) При $a\neq d$ уравнения (3) и (4) равносильны. Из уравнения (4) находим $tgx,$ а затем соответствующие значения x.

Примеры. Решите уравнения.

a) $2sinx-3cosx=0,$ где $cosx\neq 0.$

Решение. Разделим обе части уравнения на $cosx$: $2tgx-3=0$ и $tgx=\frac{3}{2}, x=arctg\frac{3}{2}+n\pi, n\in Z.$

Ответ: $x=arctg\frac{3}{2}+n\pi, n\in Z.$

b) $4sin^2x+2sinxcosx=3$

Решение. Умножим правую часть уравнения на $sin^2x+cos^2x.$ Получим: $4sin^2x+2sinxcosx=3sin^2x+3cos^2x,$ $sin^2x+2sinxcosx-3cos^2x=0.$ Очевидно, что $cosx\neq 0.$ Разделим на $cos^2x,$ получим $tg^2x+2tgx-3=0,$ $tgx=-3$ и $tgx=1,$ $x=-arctg3+k\pi$ и $x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\, k,n\in Z.$

Ответ: $x=-arctg3+k\pi;\, x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\, k,n\in Z.$

c) $sin2x+cos2x=0, cos2x\neq 0$

Решение. Разделим обе части данного уравнения на $cos2x$:

$tg2x+1=0$

$tg2x=-1$

$$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n\,, 2x=(4n-1)\frac{\pi}{4}$$

$x=(4n-1)\frac{\pi}{8}, n\in Z.$

Ответ: $x=(4n-1)\frac{\pi}{8}, n\in Z.$

4) Уравнения вида $\alpha sinx+bcosx=c,(a,b,c\neq 0)$

В уравнении $\alpha sinx+bcosx=c,$ где а, b и с- любые действительные числа. Если $a=b=0$, а $c\neq 0$, то уравнение теряет смысл; если же $a=b=$ с $=0$, то x - любое действительное число, т.е. уравнение обращается в тождество. Простейшие уравнения этого вида нам уже встречались, при этом их решение не требовало новизны подхода.

Рассмотрим способ решения уравнений такого вида при помощи введения вспомогательного угла:

Мы знаем, что если $a^2 + b^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $a = cos\varphi$, $b = sin\varphi$ или наоборот. Для решения нашего уравнения вынесем за скобки множителем выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$. Получим: $\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx\right) = c$. Обозначим $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = sin\varphi$. Преобразовав левую часть нашего уравнения по формулам, получим:

$$acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi) \text{ , где } \begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Примеры. Решите уравнения.

a) $3sinx + 4cosx = 2$

Решение. $a = 3,\ b = 4,\ c = 2, a^2 + b^2 = 25, c^2 = 4, a^2 + b^2 > c^2$; следовательно, уравнение имеет решение.

Применив формулу: $\sqrt{3^2 + 4^2}(cos\varphi sinx + sin\varphi cosx) = 2,\ 5\sin(x + \varphi) = 2,\ \sin(x + \varphi) = \frac{2}{5}$, откуда получим: $x + \varphi = (-1)^n arcsin\frac{2}{5} + n\pi, x = (-1)^n arcsin\frac{2}{5} - n\pi - \varphi, n \in Z, \varphi = arctg\frac{4}{3}$(можно найти по четырехзначной математической таблице)

b) $5cosx + 12sinx = 13$

Решение. $a = 5, b = 12$. Определим $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 13^2} = 13$.

$\varphi = arctg\frac{12}{5}$, так как является решением системы $\begin{cases} cos\varphi = \frac{5}{13} \\ sin\varphi = \frac{12}{13} \end{cases}$

Подставим $\cos\left(x - arctg\frac{12}{5}\right) = 1 \to x = arctg\frac{12}{5} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = arctg\frac{12}{5} + 2\pi n, n \in Z.$

Формула $\alpha sinx + bcosx = c$, в некоторых учебниках выглядит так $acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi)$, где $tg\varphi = \frac{b}{a}$.

5)Уравнения, решаемые разложением на множители

Для решения таких уравнений необходимо использовать следующие формулы:

1) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\beta \tan\alpha}$;

2) $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4\,sin^3\alpha$;

3) $cos3\alpha = 4\,cos^3\alpha - 3cos\alpha$.

Примеры. Решите уравнения.

а) $sin2x + sin^2x = 0$

Решение. Используя формулу синуса двойного аргумента сразу вынесем общий множитель за скобки, получим:

$$2\,sin\,x(\cos x + sin\,x) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx = 0, \\ sinx = -cosx \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ tgx = -1 \end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow \begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}$$

Ответ: $\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}$

b) $2sin^2x - \sqrt{3}sin2x = 0$

Решение. Используя формулу синуса двойного аргумента сразу вынесем общий множитель за скобки, получим:

$$2sinx\left(sinx - \sqrt{3}cosx\right) = 0$$

Приравняем каждый множитель к 0.

$sinx = 0, \qquad x = \pi k \in Z.$

$sinx = \sqrt{3}cosx$

$tgx = \sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z.$

Ответ: $x = \pi k \in Z, x = \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z.$

6)Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций.

Для того, чтобы решить тригонометрические уравнения данным способом, необходимо знание и понимание следующих формул:

1) $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{sin(\alpha \pm \beta)}{cos\alpha * cos\beta}$;
2) $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha * sin\beta}$;
3) $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{sin(\beta-\alpha)}{sin\alpha * sin\beta}$;
4) $sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha cos\beta;$
5) $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \pm sin\alpha sin\beta.$

Примеры. Решить уравнение.

a) $\sin(2\alpha + 3x) - sin2\alpha cos3x = cos2\alpha$, где α- некоторое число.

Решение. $sin2\alpha cos3x + cos2\alpha sin3x - sin2\alpha cos3x = cos2\alpha$, $cos2\alpha sin3x - cos2\alpha = 0$, $cos2\alpha(sin3x - 1) = 0$. 1) $cos2\alpha = 0$, тогда $x \in R$, или 2) $sin3x - 1 = 0, sin3x = 1, 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (4n + 1)\frac{\pi}{6}$, где $n \in Z$.

Ответ: R, если $x = (4n + 1)\frac{\pi}{6}$

b) $cos3xcos2x = sin3xsin2x$.

c) Решение. $cos3xcos2x - sin3xsin2x = 0$, $\cos(3x + 2x) = 0$, $cos5x = 0$, $5x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $x = (2n + 1)\frac{\pi}{10}$, $n \in Z$.

Ответ: $x = (2n + 1)\frac{\pi}{10},\ n \in Z$.

Существуют и другие типы решений тригонометрических уравнений, но они встречаются реже, чем представленные выше. Такие как:

- Уравнения смешанного типа.
- Системы уравнений, содержащих только тригонометрические функции.
- Уравнения, решаемые понижением их порядка
- Уравнения вида $\alpha sinx + bcosx = c$ и др.

1.2 Виды тригонометрических неравенств и методы их решений

Неравенства, которые мы называем тригонометрическими, могут быть представлены тождественными (безусловными) и условными. На практике тождественные неравенства нам необходимо доказать, а вот условные – решить. Тригонометрическое неравенство считается тождественным, которое справедливо при всех допустимых значениях неизвестных, входящих в заданное неравенство. Пример:

1.$|sinx| \leq 1$ при всех $x \in R$

2. $tg^2x \geq 0$ при $\forall\ x \in R$, кроме $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, n$\in Z$

3. $\frac{sinx+cosx}{2} \geq \sqrt{sinxcosx}\,, x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, n $\in$ Z

Тригонометрическое неравенство считается условным, когда оно справедливо не при всяком значении неизвестных. Пример:

1.$sinx \geq \frac{1}{2}$, выполняется на $[\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k], k \in Z$

2.$cosx \leq 0$, выполняется на $[\pi/6 + 2\pi n; 3\pi/6 + 2\pi n], n \in Z$

3.$ctgx < -\sqrt{3}$, выполняется в интервале $(-\ \pi/6 + \pi k; \pi k), k \in Z$

Решая данные тригонометрические неравенства учитель должен помнить, что тригонометрические функции $sin\,x$ и $cos\,x$ имеют наименьший положительный период 2π, а функции $t\,g\,x$ и $ctgx$ имеют наименьший положительный период π. В ходе решения неравенств с тригонометрическими функциями необходимо обязательно использовать периодичность заданных функций и конечно же их монотонность на промежутках.

Решая неравенство, содержащее только функции $sin\,x$ или $cos\,x$, необходимо произвести решение на любом отрезке 2π. Для того чтобы получить решение, достаточно прибавить к каждому найденному на этом промежутке корню числа вида $2\pi n$, где $n \in Z$. Аналогично поступим с неравенствами, которые содержат только функции $tg\,x$ и $ctgx$, но только их решения будут находиться на промежутке длиной πn, $n \in Z$,

Еще одним способом решения тригонометрических неравенств считается при помощи графиков функций $y = sin\,x, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$. Также для решения неравенств будем использовать единичную окружность.

1.3 Использование единичной окружности при изучении школьного курса тригонометрии

Числовая (или координатная) окружность весьма активно используется в исследовании тригонометрии, потому что при помощи нее удобно демонстрировать множества чисел, которые объединены по конкретным свойствам.

Считается, что именно на четырех основных тригонометрических функциях: $sin(x)$, $cos(x), tg(x), ctg$ был основан общий курс тригонометрии. Сделаем полный анализ и убедимся, как же геометрически можно определить эти функции.

В тригонометрии мы часто сталкиваемся с углами поворота. Они, в свою очередь, связаны с вращением по окружности. Величины углов поворота не зависят от радиуса окружности, по которой совершается вращение, именно поэтому удобно работать непосредственно с окружностью единичного радиуса, это позволяет нам избавляться от коэффициентов при математическом описании. Это и объясняет тот факт, что используется единичная окружность.

Пусть дана декартова система координат на плоскости, и построена окружность с радиусом R и центром в начале координат O. Любой угол можно рассматривать, как поворот от положительного направления оси абсцисс до некоторого луча OB, при этом направление поворота против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке —

отрицательным. На рисунке 1 абсциссу точки B обозначимx_b, ординату обозначим y_b

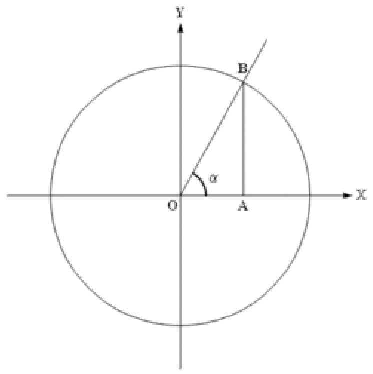

Рис.1. - Обозначение координат точки B.

В тригонометрии определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса дается через координаты точек на единичной окружности. При использовании данных определений мы имеем возможность обосновать свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

- Синусом называется отношение $sin\alpha = \frac{y_b}{R}$
- Косинусом называется отношение $cos\alpha = \frac{x_b}{R}$
- Тангенс определяется как $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{y_b}{x_b}$
- Котангенс определяется как $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{x_b}{y_b}$

Единичная окружность задается уравнением вида $x^2 + y^2 = 1$. Это уравнение, вместе с определениями синуса и косинуса, позволяют записать основное тригонометрическое тождество: $sin^2x + cos^2x = 1$. Применение единичной окружности ко всему прочему позволяет доказать основные формулы тригонометрии.

Отображение числового множества R на координатную окружность наглядно можно представить на рисунке 1, как «наматывание» координатной прямой на координатную окружность: положительный луч координатной прямой – в положительном направлении, отрицательный луч – в отрицательном направлении.

Отметим на рисунке 2, что отображение числового множества R на координатную окружность не является взаимно однозначным, так как каждая точка на окружности изображает бесконечное множество действительных чисел, а каждому действительному числу будет соответствовать действительная точка на заданной окружности.

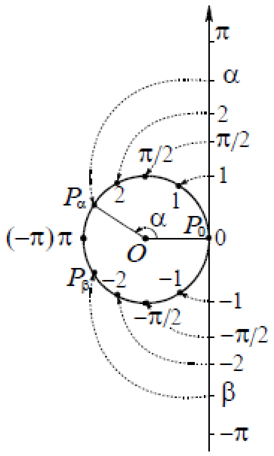

Рис.2. – Отображение числового множества R.

Решение простейших тригонометрических неравенств, с помощью геометрических иллюстраций.

Все числа вида $\alpha + 2\pi n,\ n \epsilon Z$ соответствуют единственной точке числовой окружности $P\alpha$, так как при обходе окружности в положительном или отрицательном направлении на целое число оборотов из данной точки P_α приходим в эту же точку.

Уравнения вида sin x=a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$ на числовой окружности изображаются точкой P_α или $P_{-\alpha+\pi}$ соответственно. Данные точки располагаются на окружности симметрично относительно оси у . Эти два множества чисел можно записать в виде $(-1)n\alpha + \pi n, n \epsilon Z$

Пример 1. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $sinx\ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n\epsilon Z.$

Наблюдаем две точки на окружности $P_{\pi/4}$ и $P_{3\pi/4}$, которые изображают решение этого уравнения, симметрично относительно оси координат (рис. 3).

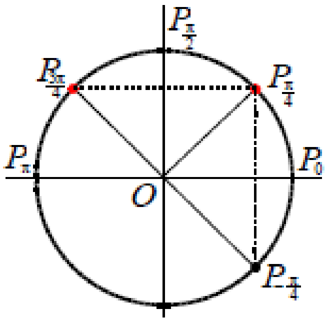

Рис.3. – Геометрическое решение уравнения $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уравнения вида cos x = a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + 2\pi n, n \epsilon Z$, отмечаются точкой P_{α} или $P_{-\alpha}$ на числовой окружности соответственно. Точки симметрично располагаются на числовой окружности относительно оси x . Эти два множества чисел запишем в виде $\pm\alpha + 2\pi n, n \epsilon Z.$

Пример 2. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$. На рисунке 4 изображены две точки на окружности $P_{\cdot\pi/6}$ и

$P_{\cdot-\pi/6}$, которые изображают решение заданного уравнения, располагаются симметрично относительно оси абсцисс.

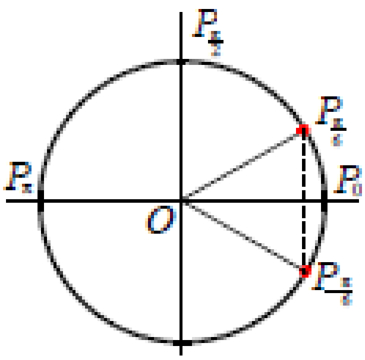

Рис.4. - решение уравнения $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Уравнения вида tg x = a или ctg x = a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $\alpha + \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$, на числовой окружности изображаются точками P_α или $P_{\alpha+\pi}$. Точки расположены на окружности симметрично относительно начала координат. Эти множества чисел записываются в виде $\alpha+\pi n$, $n \epsilon Z$.

Пример 3. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $tgx = \sqrt{3}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\ n\epsilon Z.$ Две точки на окружности $P_{\pi/3}$ и $P_{4\pi/3}$, изображающие решение этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат на рисунке 5.

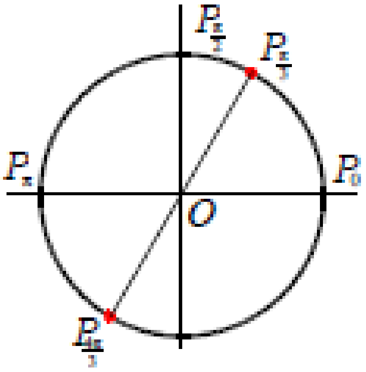

Рис.5. – геометрическое решение уравнения $tgx = \sqrt{3}$.

Пример 4. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $ctg\ x = \sqrt{3}$.

Решение: Решение уравнения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$ Точки окружности $P_{\pi/6}$ и $P_{7\pi/6}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат на рисунке 7.

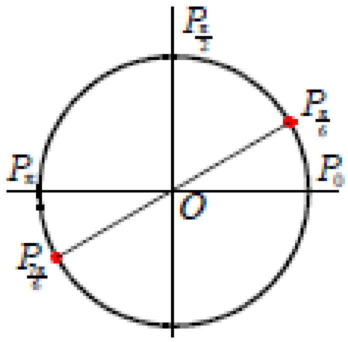

Рис.6. – Геометрическое решение уравнения $ctgx = \sqrt{3}$.

Методические рекомендации, необходимые в процессе изучения тригонометрического материала:

1. На начальной стадии изучения тригонометрии следует без помощи учителя заполнить таблицу значений тригонометрических функций для углов, которые наиболее часто употребляются в заданиях и выучить.

2. При введении понятия тригонометрической окружности:

- Отметить точки, соответствующие поворотам радиуса на 30°, 45°, 60°, затем на $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$.
- Записать значения углов для вышеуказанных точек с учетом периода движения по окружности.
- Записать значения углов для вышеуказанных точек с учетом периода движения по окружности при заданных значениях параметра (например, при $n = 2;\ n = -1;\ n = -5$).
- Найти при помощи тригонометрической окружности значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для вышеуказанных углов.
- На окружности отметить точки, которые соответствуют требуемым значениям тригонометрических функций.
- Найти и записать числовые промежутки, удовлетворяющие заданным ограничениям значения функции.
- Самостоятельно подобрать формулу для записи углов, соответствующих нескольким точкам на тригонометрической окружности (к примеру, объединить записи $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ и $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \epsilon Z$.)

3. При изучении тригонометрических функций, их свойств и графиков:

- Отметить на графике функции точки, соответствующие указанным выше углам как значениям аргументов.
- При заданном значении функции (например, $ctgx = 1$) отметить как можно больше точек на графике функции и записать соответствующие значения аргумента.
- Отметить как можно больше точек, соответствующих данным значениям функции (например, $|sin\,x\,| = 1/2$).
- Отметить промежутки, соответствующие заданным ограничениям на значения функции (к примеру, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le cosx \le \frac{1}{2}$).
- При заданных значениях функции и ограничениях на значения аргумента отметить соответствующие точки и записать значения аргумента (к примеру, указать на графике и сделать соответствующие записи для точек, удовлетворяющих условиям $tgx = \sqrt{3}$ и $-3\pi < x < 5\pi/2$).

Все эти рекомендации помогут решении задачи №13, входящей в структуру ЕГЭ по математике. Помимо решения тригонометрического уравнения следует сделать отбор корней. Тригонометрия является одним из наиболее популярным элементом на экзамене, поэтому обучающемуся необходимо владеть соответствующими навыками, а именно:

- решать тригонометрические уравнения и неравенства любого типа;
- производить отбор корней;
- умение применять тригонометрические формулы;
- решать двойные линейные неравенства;
- оценивать значение иррационального числа.

ГЛАВА 2. СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

2.1 Анализ содержания учебного материала по тригонометрии в школьных учебниках

Проведем анализ школьной литературы по теме тригонометрических уравнений и неравенств в различных учебниках по математике для 10-11 классов. Но для этого сначала выделим ведущих авторов этих учебников: Алимов Ш.А. (2012г.) «Алгебра и начала анализа» для обучающихся 10-11 классов; Колмогоров А.Н. (2016г.) «Алгебра и начала анализа» для обучающихся 10-11 классов; Мордкович А.Г. (2014г.) «Алгебра и начала математического анализа» для обучающихся 10-11 классов.

Для того, чтобы сделать сравнение и анализ школьных учебников по выбранной теме, необходимо задать критерии:

1. Структура школьного учебника;
2. Специфика изложения материала.

Алимов Ш.А включает в свое пособие 13 глав, после каждой главы автор дает упражнения на повторение изученного материала. Также после каждой главы идут вопросы, ответы на которые можно найти при изучении теоретической части каждой главы. Задания структурируются по уровням сложности: базовые, средние и сложные. В конце учебника есть задания для закрепления материала.

Автор для исследования тригонометрии как науки отвел целых три главы. Это показывает, что тригонометрия является неотьемлемой частью математики. Тема «Тригонометрические уравнения и неравенства» изложена в пяти параграфах, причем последний из них помечен звездочкой, что указывает на его сложность.

Алимов вводит понятие косинуса, синуса и тангенса угла, область определения и множество значений тригонометрических функций. Также рассматривает поворот точки вокруг начала координат, формулы сложения, приведения, формулы двойного и половинного угла, в результате чего следует наша тема исследования.

На изучение конкретно нашей темы отведено три параграфа. Первый параграф раскрывает решение простейших тригонометрических уравнений (с помощью единичной окружности). Второй параграф знакомит обучающихся с обратными тригонометрическими функциями и их свойствами. Далее имеются основные формулы для нахождения корней тригонометрических уравнений. В третьем рассматриваются методы решения тригонометрических уравнений: уравнения, сводящиеся к квадратным, уравнения вида $asinx + bcosx = c$ и уравнения, решаемые разложением левой части на множители. Все эти методы решения были приведены на разобранных примерах, которые идут после теоретической части параграфа. Также в конце каждого параграфа приведен список упражнений для закрепления знаний о материале.

Что касаемо тригонометрических неравенств, то автор отделяет всего лишь один параграф, в котором рассматриваются примеры простейших тригонометрических неравенств.

Вывод: Совершенно не упоминалось о понятие однородных уравнений, а в разобранных примерах было однородное уравнения только первой степени, то есть у учителя должен быть дополнительный материал. Приведен всего лишь один способ решения уравнения вида $asinx + bcosx = c$, хотя для решения такого уравнения есть и другие способы. Способов решения тригонометричских неравенств было приведено крайне мало. Однако, данный учебник обладает большой теоретической базой, что очень удобно при самостоятельном изучении материала, а также после каждой главы приведен очень большой список упражнений, которые помогут укрепить знания и навыки решения уравнений и неравенств разными способами.

Колмогоров А.Н. разбивает учебник на 6 глав. В отличии от предыдущего учебника этот автор делит главы на параграфы, а параграфы в свою очередь на пункты. Задачи, входящие в каждый пункт, делятся на два уровня. Первый уровень подразумевает обязательное решение задач для всех учеников, необходим для получения удовлетворительной оценки. Второй уровень - задачи чуть более сложного характера, соответственно для получения оценок четыре или пять. В конце каждой главы приведены вопросы и упражнения на повторение пройденного материала. Последняя глава посвящена изучению задач повышенной сложности.

Данное издание начинает изучение тригонометрии с самой первой главы и выделяет этому четыре пункта. Решение тригонометрических уравнений и неравенств изучается после рассмотрения тригонометрических функций.

Автор данного учебника не приводит понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла. Первый пункт описывает: основные формулы тригонометрии, формулы приведения, формулы сложения и двойного аргумента, формулы суммы и разности синусов (косинусов). Во втором пункте рассматриваются тригонометрические функции и их графики. При изучении этих пунктов можно смело перейти к исследованию нашей темы.

Как и любое изучение новой темы всегда начинается с повторения. Автор предлагает вспомнить определение радианной меры угла и основных формул тригонометрии. Далее изучаются тригонометрические функции, их графики и свойства. Завершается первая глава решением тригонометрических уравнений и неравенств. Здесь вводятся определения аркфункций числа при помощи графиков тригонометрических функций, затем с помощью единичной окружности выводятся формулы корней для решения простейших тригонометрических уравнений.

В третьем пункте Колмогоров А.Н. приводит основные идеи решения тригонометрических уравнений и систем, обязательно сопровождая каждое решение разобранным примером. В разобранных примерах используется метод введения новой переменной, метод разложения на множители, способ решения однородных уравнений первой, второй и высших степеней, метод подстановки для решения систем уравнения. В данном пособии рассматриваются решения только простейших тригонометрических неравенств. Тригонометрические уравнения и неравенства должны изучаться после формул преобразования тригонометрических выражений, а также после введения графиков тригонометрических функций.

Автор почему-то не дал понятия однородным уравнениям и не рассматриваются способы решения уравнений вида $asinx + bcosx = c$. Уравнения подобного типа попадаются лишь в задачах повышенной трудности шестой главы, возможно автор надеялся на широкую базу знаний учителя. А также список упражнений, который приведен в этом учебнике не является самым наилучшим, ведь при таком количестве заданий база знаний и умений не сможет выработаться.

Вывод: Если сравнивать издания Колмогорова А.Н. и Алимова Ш.А, то можно выявить такую закономерность: в учебниках этих авторов приведен достаточно большой объем тригонометрических формул, но, к сожалению, они рассматривают достаточно мало методов для решения тригонометрических уравнений и неравенств. Как мы отмечали ранее, Колмогоров не рассмотрел однородные уравнения, уравнения вида $asinx + bcosx = c$, безусловно, не рассматривая способы решения таких уравнений, а также нет систематизации по видам. Проанализировав задания шестой главы, можно сказать, что она направлена только на учеников с высокой мозговой активностью.

Структура учебника Мордкович А.Г. состоит из задачника и самого учебника. Пособие состоит из восьми глав, после которых идут параграфы. Изучение тригонометрии начинается с первой главы, как и в учебнике Колмогорова А.Н. В конце каждой главы есть основные результаты, то есть это вся теоретическая часть, которая собрана из всей главы.

Изучение новой темы начинается с повторения, затем автор вводит понятие косинуса, синуса, тангенса и котангенса, тригонометрические функции числового и углового аргумента, формулы приведения, формулы двойного и половинного угла, в результате чего следует наша тема исследования. Следует отметить, что в этом учебнике совершенно ничего не сказано про решение тригонометрических неравенств.

Вывод: Как мы отвечали, этот учебник состоит из двух частей: теоретическая и практическая. Следовательно, теории и практики для обучающихся больше. Учебник наделен большой теоретической базой, что очень хорошо как для учителя, так и для учеников. Учителю не нужно будет искать дополнительный материал и что-то из учебника может задать для самостоятельного изучения детям. Изложение материала представлено очень удобно, разнообразно, а также использовано достаточное количество примеров. Задачник состоит из большого количества заданий, которые распределены на три уровня сложности, что очень помогает стремиться решить задания из уровня, который предполагает лучшую оценку. Единственным минусом для этого учебника будет то, что автор ничего не упомянул про способы решения тригонометрических неравенств.

Анализ школьных учебников алгебры и начала анализа Ш.А. Алимова, А.Н. Колмогорова и А.Г. Мордковича показал, что все три автора исследуют тему «решение тригонометрических уравнений и неравенств» каждый по - разному. Например, Алимов Ш.А. и Мордкович А.Г. изучение темы «Тригонометрические функции» вводят раньше и причем в самом начале учебника, чем «Тригонометрические уравнения», как это сделал Колмогоров Н.А.

Стоит отметить, что в представленных учебниках мы выявили тот факт, что рассматриваются не все методы решения тригонометрических уравнений, а тем более методы решения тригонометрических неравенств. Но, при этом авторы приводят огромное количество задач разных уровней сложности.

2.2 Методические рекомендации и разработка элективного курса на тему «Решение тригонометрических уравнений и неравенств»

Для того чтобы мы смогли разрабатывать элективный курс, нам необходимо выявить первичные знания обучающихся в исследуемой теме. Чтобы осуществить задуманное, выбрали базу исследования и класс, в котором проведем испытание. Апробация элективного курса была проведена в МБОУ «Наголенская СОШ» Ровеньского района Белгородской области. Задания проверочной работы и апробация исследования приведены ниже.

Метод эксперимента делится на три этапа:

1. **Констатирующий эксперимент**

Целью эксперимента является: выявление уровня познаний обучающихся в области тригонометрия.

В самом начале нашего эксперимента мы провели массовую проверочную работу, которая была ориентирована на получение единой картины уровня знаний обучающихся по разделам тригонометрические уравнения и неравенства. На самом первом же уроке, который был посвящен решению тригонометрических уравнений и неравенств, мы выявили ряд пробелов обучающихся, которые ученикам мешали успешно справиться с заданиями. После того как мы приступили к активному решению тригонометрических уравнений и неравенств, стало сразу ясно, что есть пробелы в знания - незнание методов и способов решений, тригонометрических формул, неумение пользоваться единичной окружностью, а были случаи, когда ученики знали методы решений, но к какому примеры применить не знали.

Далее представим проверочную работу для обучающихся десятого класса, которая рассчитана на 30 минут. В классе 18 учеников и все из них участвовали в нашем исследовании.

Вариант №1	Вариант №2
1. Задание $sinx = 1$	1. Задание $cosx = 0$

2. Задание $2cosx - 1 = 0$	3. Задание $2cosx + 1 = 0$
3. Задание $cosx \leq \frac{1}{2}$	1. Задание $ctgx \geq -1$
4. Задание $3tg2x = \sqrt{3}$	2. Задание $2sin\frac{x}{3} = -1$
5. Задание $cos^2x - 2cosx = 0$	3. Задание $2sin^2x + 5cosx = 4$
6. Задание $1 + cosx = 2cos\frac{x}{2}$	4. Задание $3 - 3cosx = 2sin^2x$
7. Задание $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$	8. Задание $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - cosx = \frac{1}{2}$

Весьма полезными для нас оказались результаты незначительного исследования, которые мы получили при проверке:

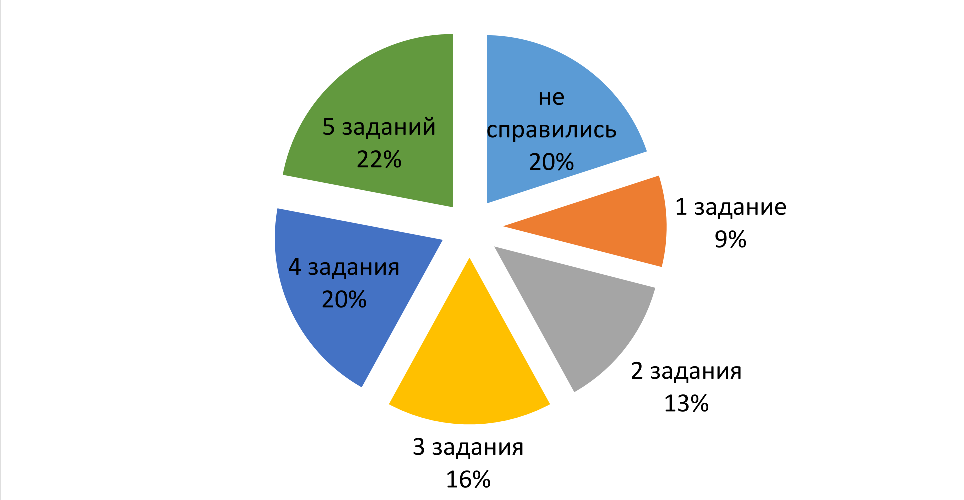

Рис.1. – Первичный уровень знаний

Исходя из нашего рисунка можно заметить, что из 18 обучающихся четыре вообще не справились с предложенными заданиями. Четыре человека решили 5 заданий, хотя они старались решить все задания, но 2 было решено неправильно. Также четыре человека решили только 4 задания, три человека-3 задания, два человека -2 задания и два ученика одно задание. Все из учеников пытались решить как можно больше примеров, но мы учитывали правильное решение и ответ задания, поэтому получили такие данные.

2. **Формирующий эксперимент**

Данный эксперимент проводился в 10 классе в течение двух недель. Темы, которые дети плохо уяснили, для понимания мы выделяли по 20 минут на уроках алгебры и геометрии. В ходе работы были повторены и изучены основные тригонометрические формулы, при помощи которых решается большинство задач. Рассматривали основные способы решения, которые характерны для решения определенного типа задач. Особую сложность для ребят составляла - единичная окружность как один из способов решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Результаты проведенного нами анализа позволяют сделать некоторые частные выводы, представляющие интерес для нашего исследования – разработать элективный курс на тему «Решение тригонометрических уравнений и неравенств», с целью повышения успеваемости среди школьников и успешной сдачи ЕГЭ.

Основополагающие утверждения, определяющие концепцию требований к содержанию, организации и методике обучения при разработке элективного курса можно выделить следующие дидактические принципы:

- Принцип сознательности и активности;
- Принцип наглядности;
- Принцип последовательности и систематичности;
- Принцип прочности;
- Принцип научности;
- Принцип доступности;
- Принцип связи теоритической части с практической.

Рассмотрим наиболее расширенно только те дидактические принципы, которые мы считаем, что именно на них нужно обратить внимание при изучении обучающимися темы «тригонометрические уравнения и неравенства». Такими принципами являются наглядность, последовательность и систематичность.

Принцип наглядности – действительная основа на реальные представления обучающихся.

Наглядность в обучении предполагает, что учитель старается сделать учебный материал, в превую очередь, доступным для чувственного восприятия обучающихся. То есть создает некие образы зрительно восприятия, как в случае демонстрации фотографии ученого ил создает образы слухового восприятия, когда приводит конкретные примеры из учебника изучаемой темы, или создает образы тактильного восприятия, когда обучающиеся имеют возможность на тактильном уровне повзаимодействовать с объектом изучения.

Наглядность обучения предполагает использование совершенно различных форм предъявления учебного материала. Например: знаковых, графических, диаграммных. Для гуманитарных дисциплин часто используют метод моделирования профессиональных ситуаций, деловые игры.

Основным критерием реализации наглядности в обучении учеников является наличие технических средств, таких, как компьютера, проектора, наличие таблиц, схем, плакатов, учебной доски, моделей изучаемых объектов. Имеются специальные методические материала, которые представлены только при помощи таблиц, что облегчает процесс запоминания. Наличие всех перечисленных средств не всегда в полной мере может гарантировать эффективность применения наглядного материала в обучении. Информация, которую мы получили при помощи зрения, очень хорошо усваивается в памяти.

Практические весь курс тригонометрии строится на принципе наглядности. Начиная с самого начала изучения курса, сразу строим графики функций синуса, косинуса, тангенса, котангенса и т.д. Далее при помощи единичной окружности в заданиях ЕГЭ мы производим отбор корней. В некоторых школах есть специальные программы, которые помогают детям только вводить значения полученных корней, а корни, которые не подходят отображаются на единичной окружность, что ускоряет решение определенной задачи.

В итоге хотелось бы подчеркнуть, что наглядность есть средство для обучения школьников, но не является самой целью. И необходимо понимать, что любое абстрактное представление должно быть постоянно подкреплено определенными фактами или примерами, иначе дети быстро забывают эти картинки. Обучающиеся должны постоянно самостоятельно искать источник новых знаний, и организовывать поисковую и исследовательскую деятельность. Использование учителем на уроках наглядных средств развивает интерес, внимательность, развивает культуру мышления.

Еще одним важнейшим принципом при изучении данной темы является принцип последовательности и систематичности.

Для изложения любого материала требуется определенная последовательность, которая в дальнейшем приведет к успешному усвоению. Надо разделять содержимое каждого материала на логически завершенные части. Данный принцип предлагает обязательно повторять и систематизировать знания в конце каждой главы или курса, для предотвращения забывания знаний, которые понадобятся в дальнейшем.

Принцип прочности – залог успешного усвоения материала. Успешное усвоение материала зависит от очень многих факторов. Попытаемся перечислить всевозможные факторы: учебник, который предоставляет общеобразовательная организация, мы уже делали анализ методической литературы и увидели, что все представленные учебники обладали хорошей и полной методической базой; условия обучения; многое зависит от учителя, он может ограничиться только учебником, в котором может быть не весь материал, лишь часть, а может учитель найти другой дополнительный материал и преподнести в хорошем виде детям.

Для более прочного запоминания при изучении тригонометрии, необходимо избегать многоповторного решения легких тригонометрических уравнений или неравенств, а также решать задания разных типов, чтоб не было быстрой утомляемости.

При организации процесса обучения данной теме, весьма немаловажно соблюдать установление связи между тригонометрией и другими науками. В ходе обучения следует обнаружить взаимосвязь между единством преподавания и обучения. Непосредственно когда два эти процесса взаимосвязаны, процесс обучения достигнет запланированного результата.

Если учитель пытается донести информацию до ученика, а ученик при этом не проявляет свою активность, при этом не выполняет домашние задания, на уроках совсем не активничает, то как бы учитель не старался - желаемого результата он не дождется. Каждый учитель ждет хорошего эффекта, но в таком случае нет обратной связи от ученика, при этом на выходе такие обучающиеся несут минимум знаний. Вывод: активность с обеих сторон имеет колоссальное значение.

Суть принципа активности – ясное понимание целей и задач предстоящей работы, ее важности и значения. Безусловно, если подростку не доложили смысл того, чем ему предстоит заниматься, динамичность станет нулевой, таким образом, значение всей деятельности будет потеряна. Обучать необходимо таким образом, чтобы обучающийся понимал, что и как необходимо выполнять. Применять все без исключения разновидности и формы познавательной деятельности, обнаруживать аналогичное и сравнивать. Немаловажно обеспечивать понимание каждой фразы, любого понятия и определения. Только лишь в этом случае тема будет хорошо изучена и усвоена.

Одним из важнейших условий поддержания активности на уроке - это своеобразное задавание вопросов. Например: слишком активные и активные школьники задают достаточно мало вопросов, а если и задают, то только лишь для подтверждения своих мыслей. А вот что касается малоактивных учеников, они в большинстве случаев не задают вопросов, чтоб лишний раз не привлекать внимание учителя.

Пояснительная записка

Рабочая программа элективного курса по математике «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» составлена на основе программы для 10 класса по математике и методических пособий «Тригонометрические уравнения и неравенства. Подготовка к ЭГЭ» Смолов А.М.; «Техника решения тригонометрических задач в 10 классе» Ивницкая Т.С. в соответствии с требованиями ФГОС. Курс построен с опорой на знания и умения, которые обучающиеся получили на уроках математики. Эта программа нацелена на учеников 10 класса с целью успешного усвоения материала по теме тригонометрических уравнений и неравенств, а также для повышения эффективности подготовки обучающихся к единому государственному экзамену, так как именно в заданиях с тригонометрией ученики больше всего допускают ошибок. Программа курса предполагает 1 час в неделю Весь курс займет 17 часов и рассчитан для изучения после основных занятий в школе.

Материал элективного курса содержит эффективные методы, которые можно будет применять для решения различных нестандартных задач. Наряду с основной задачей математики, данный курс предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, развитию математических способностей, необходим для развития логического мышления обучающихся, углубления и систематизации знаний по тригонометрии. Также этот курс нацелен на подготовку учеников успешной сдачи ЕГЭ и устранения пробелов в области тригонометрии. Ученик должен не только приобрести знания, но и владеть различными способами познавательной деятельности.

Любой курс, хоть элективный или факультативный, он нацелен на расширение базовых знаний обучающихся по математике, и содержит нестандартный задачи, которые требуют усилий для их решения, проявлять смекалку и находчивость. Вместе с этим наш курс будет максимально приближен к курсу алгебры 10 класса. Обычно, в конце 10 класса ученики осознанно выбирают себе профессию и некоторые знают, что им необходимо уже заранее готовить к ЕГЭ, поэтому на этом курсе они уже смогут определить свои силы. Но слушателями это курса могут стать обучающиеся с различным уровнем подготовки.

Так как мы находимся на формирующем этапе, то по завершению данного курса будут подводиться итоги в форме самостоятельных и контрольных работ. Все полученные результаты мы будем фиксировать и сравнивать. Исходя из этого, будет происходить корректировка нашего элективного курса, т.е. если возникнет, что этот курс является малодейственным, то потребуется его усовершенствование и корректировка.

Образовательная область и предмет изучения

Математика во все времена была и есть основной частью культуры каждого народа, являясь ключиком ко всем знаниям и познаниям целой вселенной, а также двигателем научно-технического прогресса. Исторически так сложилось, что из года в год математика появляется все чаще и чаще в нашей жизни, а школьное математическое образование содействует овладению всевозможными навыками, которые нам необходимы для существования обществе.

Исследование тригонометрических функций обширно используется на практике в процессе исследования каких-либо физических процессов в индустрии и иных областях. В каждом разделе элективного курса «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» имеются задания, которые направлены на систематизацию и актуализацию знаний обучающихся, то есть там будут задания, что не входят в программу курса средней школы, а помогут самоопределению и выбору его дальнейшей профессии.

Актуальность и педагогическая целесообразность курса

С вводом обязательной сдачи единого государственного экзамена у учителей математики появилась такая тенденция. Они могут пропускать немаловажные темы из курса алгебры и начала анализа, только потому, что этих заданий нет в экзамене. А это ведет к плохим последствиям, которые дети потом испытывают в вузах или других учебных заведениях. К счастью, тригонометрия является неотъемлемой частью заданий в ЕГЭ.

Элективный курс повысит уровень математической подготовки обучающихся, позволит овладеть в полном объеме знаниями и умениями в рассматриваемой области. Практика показывает, что содержание школьной программы и задания, которые предлагаются на экзамене имеют большой разрыв. Поэтому многие дети допускают ошибки в решении уравнений и неравенств, а некоторые и вовсе не могут решить подобные задания. А последние десять лет задание в ЕГЭ С1(13) носит тригонометрический характер.

Цели образовательной программы:

Образовательные

1. Углубить курс алгебры и начал анализа 10 класса;
2. Изучить современные нестандартные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств;
3. Рассмотреть тригонометрические функции при помощи графиков;
4. Повторить материал по пройденной теме
5. Провести самоконтроль обучающихся

Развивающие

1. Развитие пространственного воображения;
2. Развить по максимуму логическое мышление и память обучающихся;
3. Развитие алгоритмической культуры.

Воспитательные

1. Постараться воспитать заинтересованность к математике, умению контактировать и общаться с другими на математические темы;
2. Развивать в обучающихся творческую личность, которая умеет интегрировать в системе математической культуры.

Для того чтобы успешно освоить данный элективный курс, обучающиеся должны понимать суть темы, место нахождения и значения ее в математике. По завершению курса, ученик сможет: самостоятельно работать с предложенным материалом; определить метод решения тригонометрических уравнений и неравенств и сможет его решить.

Основные методы обучения и контроля будут разные. Подача информации слушателям будет в урока - лекции, урока - семинара, урока-зачета, урока - практикума, а также урок - подведение итогов. Распространенным типом таких занятий будет комбинированный урок. Как и на обычном уроке начало будет с постановки задачи, потом небольшое, по полное теоретическое изложение материала, а затем дети будут закреплять свои знания в практической части при помощи решения заданий. Будет предложена ребятам и работа с индивидуальными карточками, в виде тестов. Занятия элективного курса будут учитывать индивидуальные особенности каждого ребенка, при этом каждый сможет задавать учителю свои вопросы. По завершению определенной темы обучающиеся должны сдать письменный зачет.

Учебно-тематическое планирование элективного курса

п/п	**Название темы**	**Кол-во час**	**Формы занятий**	**Форма оценивания**
	Основные формулы тригонометрии	4	Урок - лекция	Тестовая работа
	Понятие градусной и радианной меры угла	1	Урок- семинар	практикум
	Решение задач с помощью формул приведения. Обобщение и систематизация знаний.	1	Комбинированный урок	практикум

	Решение уравнений при помощи формул сложения и следствий из них. Применение формул двойного, половинного углов. Использование формул суммы и разности тригонометрических функций.	2	Комбинированное	практикум
	Итог пройденного материала	1	Урок - зачет	зачет
	Тригонометрические функции и их графики	4		зачет
	ОДЗ тригонометрических функций и графики функций	2	Комбинированный урок	практикум
	Свойства тригонометрических функций и знаки тригонометрических функций	2	Урок - практикум	практикум
	Тригонометрические функции сложения.	1	Урок - зачет	зачет
	Решение тригонометрических уравнений и неравенств	1 4		зачет
	Решение	1	Урок -	практикум

	тригонометрических уравнений с помощью разложения на множители.		практикум	м
	Решение тригонометрических уравнений, которые сводятся к квадратным. Однородные уравнения первой и второй степени.	2	Урок - практикум	практикум
	Решение преобразованием суммы функций в произведение	1	Комбинированное	практикум
	Решение тригонометрических уравнений с помощью формул приведения и понижения степени	2	Урок - практикум	практикум
	Решение тригонометрических уравнений методом введения вспомогательного аргумента	2	Комбинированное	практикум
	Решение тригонометрических уравнений при помощи формул сложения	2	Комбинированное	практикум

	Решение простейших тригонометрических неравенств	2	Урок - практикум	практикум
	Решение тригонометрических неравенств методом подстановки	2	Урок - практикум	практикум
	Подведение итогов по пройденному материалу.	1	Урок – зачет	зачет
	Решение уравнений и неравенств с параметром	5		
	Линейные уравнения с параметром. Решение линейных уравнений с параметром. Решение систем линейных уравнений с параметром	2	Комбинированное	практикум
	Линейные неравенства с параметром. Решение линейных неравенств с параметром. Решение систем линейных неравенств с параметром	2	Комбинированное	практикум

	Подведение итогов по ранее пройденным темам	1	Урок - зачет	зачет

Учебно - тематический план.

Тема 1. Уравнения. Неравенства.

Определение способов решения различных уравнений (линейных, квадратных и сводимых к ним, дробно-рациональных). Способы решения различных неравенств (числовых, линейных, квадратных). Метод интервалов. Область определения выражения.

Тема 2. Формулы тригонометрии. Формулы приведения, сложения, двойных углов и их применение. Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений.

Рассмотрение всех необходимых тригонометрических формул. Изучить каждую формулу отдельно, подкрепляя различными примерами. В ходе изучения ликвидировать все вопросы, возникающие у учеников.

Тема 3. Тригонометрические функции и их графики.

ОДЗ и область существования тригонометрических функций. Ознакомить с четностью и нечетностью, периодичностью тригонометрических функций. Обобщить понятие тригонометрических функций; свойства функций и умение строить графики.

Тема 4. Тригонометрические уравнения и неравенства.

Ознакомить обучающихся с различными методами решения тригонометрических уравнений и неравенств. А также нацелить их работу на решение задач различного уровня сложности.

Тема 5. Уравнения и неравенства с параметрами. Способы решения уравнений и неравенств с параметрами.

Список литературы

1. «Алгебра и начала анализа 10 – 11». Автор А.Г.Мордкович. Москва «Мнемозина», 2007 г.

2. Захарова О.В. «Тригонометрические уравнения» - Волгоград: «Учитель», 2018г.

3. Книга для учителя. Изучение геометрии в 10-11 классах. Авторы: С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов. – М.: Просвещение, 2004.

4. «Тригонометрические уравнения и неравенства и методика их преподавания» П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков.

5. Дидактические материалы к программе курса С.П. Гулько «Еще раз о функциях»

6. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе: Учебно-методические материалы по математике. – М.: Илекса, Ставрополь: Сервисшкола, 2006.

7. Семенко Е.А., Некрасов С.Д. Задания для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа, Москва «Просвещение», 2011г.

8. Пособие для подготовки ЕГЭ. Математика. ЕГЭ-2015. 11 класс / Под редакцией Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион, 2018.

Рассмотрим подробно один из наших уроков на тему «Решение простейших тригонометрических уравнений»

Технологическая карта урока

Тема урока: «Решение простейших тригонометрических уравнений».

Тип урока: обобщение и систематизация знаний.

Цель урока:

Образовательная: формирование умения обучающихся к воспроизведению контрольной функции, выделять главные понятия: тригонометрическое уравнение, корень уравнения, область допустимых значений уравнения, алгоритм решения и проводить умозаключения;

Развивающая: развитие умений и навыков по решению простейших тригонометрических уравнений, формирование умений сравнивать, анализировать, обобщать, развитие умений правильно и кратко выражать свои мысли;

Воспитательная: формирование коммуникативной активности обучающихся; создание благоприятных условий для проявления индивидуальности, выбора своей позиции, формирование умения аргументировано и спокойно отстаивать свою точку зрения, а также математической речи обучающихся;

Задачи урока: сформировать навыки работы с простейшими тригонометрическими уравнениями.

Формы работы обучающихся: фронтальная, в парах, групповая, индивидуальная.

Оборудование: мультимедийный проектор, компьютер, интерактивная доска, раздаточный материал с индивидуальными заданиями.

Этап урока	**Деятельность учителя**	**Планируемая деятельность учащихся**	**УУД**	**Время**
1.Организационно - мотивационный.	Приветствие обучающихся и создание благоприятного психологического настроя на продуктивную работу. Ребята, сегодня подходит завершение изучения нашей темы «Тригонометрические уравнения», поэтому нашей целью на сегодняшнем уроке будет-повторить и	Обучающиеся настраиваются на урок, происходит быстрое включение в деловой ритм.	**Л**: Самоопределение **К**: целеполагание, планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками.	2минуты

	систематизировать полученные знания по данной теме с предыдущих уроков и хорошо подготовиться к контрольной работе. Также хочу вам напомнить, что тригонометрия обязательно входит в задания единого государственного экзамена.			
2.Актуализация теоретических и практических знаний.	1. Предлагает повторить некие теоретические вопросы и для того чтобы изучить новый материал, необходимо повторить пройденный. (работа с презентацией, фронтальный опрос по теме домашнего задания) Задает вопросы: • Какие тригонометрические формулы изучили	Работают всем классом Вспоминают и дают ответы с комментариями	**Л**: осуществляют самооценку, оценивание усваиваемого материала. **Р**: коррекция знаний обучающихся **К:** осуществляют решение учебной задачи под руководством	5 минут

	ранее? • Что значить решить уравнение • Какие вы знаете основные способы решения уравнений • Что необходимо знать для решения тригонометрического уравнения: На слайде представлены выражения, надо продолжить их запись (для выполнения задания предоставляется 3 минуты)		учителя. **П:** структурирование собственных знаний	
3.Постановка цели и задач урока.	Задает вопросы и предлагает научиться правильно оформлять запись решения простейших тригонометрических уравнений и выявить необходимые формулы для успешного решения тригонометрических	Работают индивидуально и в парах. Отвечают на вопросы. Решают тестовые задания со сайда.	**Л**: самоопределение. **Р**: определять последовательность действий для достижения результата; **К**:	5 минут

	уравнений. Производит дальнейшую работу с презентацией, где приведены задания из первой части экзаменационной работы, без умения решать их нельзя справиться с более сложными уравнениями. Спрашивает про формулы, которые понадобятся, чтобы свести другие уравнения к простейшим? Какие затруднения у вас возникли при решении тестов и как вы с этими затруднениями справились?		осуществлять учебные действия по намеченному плану. Умение высказывать свою точку зрения и аргументировать ее.	
4.Реализация намеченного	Рассаживает класс на 2 группы, в первой команде 7 человек, а во второй 8, учитывая	Записывают решение уравнений в тетрадях, а один представитель от группы решает данное	**Л:** Контроль, самооценка, оценивание результатов	15 минут

(работа в группах). Повторение видов уравнений и способов их решения.	индивидуальны способности каждого. На слайде каждой группе представлен список тригонометрических уравнений, которые необходимо решить в тетради, а одно или два нужно решить у доски, причем ученик обязан назвать способ решения и комментировать свое решение уравнения. А если возникнут вопросы со стороны других учеников или от учителя надо постараться ответить на них. Осуществляет индивидуальный контроль	уравнение на доске, обязательно называя метод решения и производит решение комментариями. Остальные внимательно следят и, если нужно исправляют решение.	деятельности одноклассников **Р**: Планирование своих действий опираясь на задачи, умение оформлять решение; формирование познавательной инициативы. **К:** участвовать в коллективном обсуждении вопроса; дети анализируют и оценивают выполненную работу; умение высказывать свою точку зрения и аргументировать ее.	
5	Предлагает на	Ребята сначала	**Л**:	5

Самостоятельное решение уравнений.	слайде 3 блока уравнений (по сложности). Всем обучающимся необходимо решить минимум три уравнений из каждого блока. После того как решили уравнения необходимо соседу по парте рассказать: какой метод используется при решении, какие формулы тригонометрии необходимы для успешного решения уравнения. Как отмечали ранее, блоки расположены по уровням сложности, при решении первого - «удовлетворительно», второго - «хорошо» и третьего - «отлично». Успехов вам, ребята.	анализируют уравнения, предполагают метод решения и формулы преобразования. Производят отбор корней. Оформляют решения на листиках и потом сдают учителю на поверку.	контроль, самооценка, оценка **Р**: умение применять полученные знания в конкретной ситуации	минут
6. Домашнее	Предлагает ученикам зайти на сайт	Обучающиеся слушают учителя и	**Р:** саморегуляция	2 минуты

задание.	https://oge.sdamgia.ru/ и выписать оттуда 6 уравнений разной сложности и представить для каждого уравнения по 4 ответа. Примеры привел на слайде.	записывают задание.	и преодоление препятствий **К**: коллективная работа с учителем и сверстниками. **П**: выделение существенной информации из слов учителя.	
9.Рефлексия	Вот и подошел к концу урок, многие из вас вместе со мной сделали очередное маленькое открытие, за что я вас поздравляю. Ребята, продолжите фразу: «Сегодня на уроке…» «Для меня было важно…» И всевозможные варианты: Собрать все мысли в порядок		**Л:** проводят самооценку своей работы на уроке **Р:** формирование положительной мотивации **К**: Анализ и оценивание выполненной работы	2 минуты

	Научиться решать уравнения, чтоб успешно сдать ЕГЭ Узнать больше тригонометрических формул Выявить большее число методов решения уравнений И многое др. Вы молодцы! Спасибо за урок!			

3. Контрольный эксперимент

Этот вид эксперимента мы провели в период зимней практики и наш элективный курс продлился на протяжении 3 месяцев. Вспоминая начало нашего эксперимента, напомним, что задания, которые мы дали ребятам решили далеко не все. Теперь в конце изучения курса обучающиеся решили опять решили такую самостоятельную работу и результаты были совершенно другие.

По - прежнему в исследовании было задействовано 18 обучающихся. Девять учеников справились совершенно со всеми заданиями, но у некоторых ребят были мелкие неточности в оформлений решений заданий. Шесть обучающихся решили пять заданий, что тоже очень неплохо. И остальные три человека решили всего четыре задания, что является для них большой мотивацией в дальнейшем.

Рис.2. – Итоги исследования знаний обучающихся

Получение таких хороших результатов, в первую очередь, заслуга учителя, который смог сделать из сложного для понимания материала простое осмысление тригонометрии. Такой успех возможен лишь при обоюдном взаимодействии ученика и учителя, когда учитель является компетентным в своей области и может донести это детям.

На сегодняшний день проблема коммуникативной компетентности педагога остается одной из наиболее важных не только для родителей, а также и для школьных учителей, которым следует быть не только настоящим специалистом в своем деле, но и обладать определенным стилем общения.

Перечислим только основные приемы, которые могут быть использованы при организации урока:

1. Ассоциации (запоминание материала с чем-то схожим или наоборот).

2. Выделение опорных пунктов.

3. Выделение основной части материала каждого абзаца, параграфа или главы.

4. Классификация – группировка материала по определенным известным основаниям.

5. Представление материала при помощи схем, таблиц или графиков.

Используя элективный курс такого рода, необходимо учитывать, что каждый учитель преподнесет информацию до осознания обучающихся совершенно по разному. Потому что у каждого своя методика объяснения учебного материала, стиль общения с учениками, организация и формы проведения занятий, а также способ снижения эмоциональной перегруженности (например: физкультминутка).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовав предложенную психолого-педагогическую и методическую литературу по данной теме исследования, следует заметить, что умение и навыки решать тригонометрические уравнения и неравенства в школьном курсе алгебры и начал анализа являются очень важными, развитие которых требует значительных усилий со стороны учителя математики.

Таким образом, учитель сам обязан в достаточной мере владеть методиками формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения. С учётом того, что тригонометрические уравнения разделяются на несколько типов, то соответственно и методика для каждого типа различна.

Переработав множество различной психолого-педагогической и методической литературы по данному вопросу, соответственно, сделать вывод, что мастерство и навык решать тригонометрические уравнения в школьном курсе алгебры и математического анализа, являются несомненно важными не только для усвоения школьного курса, но и для дальнейшего процесса обучения. Каждый школьник может поступить в ВУЗ, где обязательно понадобятся расширенные знания алгебры, в том числе тригонометрии. Также знания тригонометрии необходимы для подготовки к ЕГЭ, важнейшему экзамену в жизни ученика.

Несомненно, при обучении, как тригонометрии, так и остальным темам алгебры, необходимо опираться на знания, умения и индивидуальные особенности каждого обучающегося. В современном мире это очень сложная задача, ведь каждый ребенок понимает предложенный материал свое определенное количество времени.

Уровень обучения, а также воспитания в школе в основном определяется ориентированностью педагогического процесса на психологию индивидуального и возрастного развития ребенка, как личности. Это предполагает наблюдение и выявление способностей каждого ребенка, и ко всему прочему, развития не только мыслительных, но и творческих способностей учащегося, укрепления его активной социальной и образовательной позиции, раскрытия неповторимости личности, а также своевременная помощь при затруднениях в образовательном процессе. Педагогу нужно очень постараться, чтобы сделать сложный материал доступным для всех учащихся.

В данной работе рассматривались методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Были рассмотрены методы подбора корней, широко описаны функции и польза единичной окружности.

Также приведены основные теоретические аспекты, такие как определения и свойства тригонометрических функций, выражение тригонометрических функций через другие. Это очень важно для преобразования тригонометрических выражений, а, следовательно, и для всего курса школьной тригонометрии. В дипломной работе были приведены важнейшие формулы, помогающие при решении уравнений, неравенств и остальных тригонометрических заданий. Приведены решения элементарных тригонометрических уравнений и неравенств, широко расписан алгоритм действий при решении определенным методом.

Апробация факультатива показала, что представленный курс способствует боле глубокому усвоению темы «Тригонометрические уравнения», вследствие чего, приведет к успешной сдаче единого государственного экзамена. Таким образом, задачи данной исследовательской работы решены, цель – выявить методические особенности по теме «Тригонометрические уравнения» – достигнута. Представленные материалы могут быть использованы в качестве методического пособия как учителями, так и школьниками, готовящимися к поступлению в высшие учебные заведения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бордовская, Н.В. Педагогика: учебное пособие / Н. В. Бордовская, А. А. Реан. – СПб.: Питер, 2006. – 304 с.

2. Выгодский, М.Я.: Справочник по элементарной математике. Таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики. - М.: Элиста, 1996. – 208с.

3. Галицких, Е. О. Диалог в образовании как способ становления толерантности: учебно-методическое пособие / Е. О. Галицких. – М.:Академический Проект, 2004. – 25с.

4. Денищева, Л.О.: Дидактические материалы по алгебре и началам анализа. - М.: Изд. дом "Генжер", 1996. – 115с.

5. Ильенков, Э.В. Школа должна учить мыслить [Текст] / Э.В. Ильенков. – М.; Воронеж, 2002. – 278 с.

6. Истомина, Н.Б. Методика обучения математике в старших классах [Текст] / Н.Б. Истомина – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 288 с.

7. Кулагина, И.Ю. Возрастная психология [Текст] / И.Ю. Кулагина. – М.: Исток, 2008. – 456 с.

8. Литвиненко, В.Н.: Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. - М.: Просвещение, 1991. – 78с.

9. Мордкович, А.Г.: Краткое справочное пособие по школьному курсу математики. - М.: Новая школа, 1994. – 154с.

10. Никольский, С.М.: Алгебра. - М.: АО "Столетие", 1994. – 215с.

11. Олехник, С.Н Задачи по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям / Олехник, С.Н. и. - М.: Высшая школа, 2001. - 134 с.

12. Осипов, В.Ф.: Конкурсные задачи по математике с решениями и указаниями. Алгебра и тригонометрия. - СПб. С.-Петербургский университет, 1996. –236с.

13. Потапов, М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции / М.К. Потапов. - М.: Высшая школа, 2001. - 586 с.

14. Семенов, Е.М. Развитие мышления на уроках математики [Текст] / Е.М. Семенов, Е.Д. Горбунова. – М.: Педагогика, 2006. – 356 с.

15. Талызина, Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся [Текст] Н.Ф. Талызина. – М.: Академия, 2003. – 426 с.

16. Тихомиров, О.К. Психология мышления [Текст] / О.К. Тихомиров. – М.: Просвещение, 2004. – 272 с.

17. Кан-Калик, В. А. Учителю о педагогическом общении: кн. Для учителя / В. А. Кан-Калик. – М.: Просвещение, 1987. –196с.

18. Колесникова, И.А. Коммуникативная деятельность педагога: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений / И. А. Колесникова; под ред. В. А. Сластѐнина. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. –248с.

19. Шаталов, В.Ф.: Методические рекомендации для работы с опорными сигналами по тригонометрии. - М.: Новая школа, 1993. –258с.

20. Шаталов, В.Ф.: Учебные задания для учащихся по курсу тригонометрии. - М.: Новая школа, 1993. –356с.

21. http://www.bestreferat.ru/referat-200101.html

22. http://mat.1september.ru/1999/no19.htm

23. http://abkov.ru/ege/2011-mys/C1-2011-kornv.pdf

24. http://alexlarin.net/ege/2012/C12012.pdf

25. http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/unit_circle.html