ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа
обучающейся по направлению подготовки 44.03.05, Педагогическое образование, профиль математика и физика
очной формы обучения, группы 02041401
Евдокимовой Екатерины Николаевны

Научный руководитель
доцент кафедры математики
Цецорина Т.А.

БЕЛГОРОД 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Функция является одним из фундаментальных понятий школьного курса математики, и хотя широкое использование функциональной линии при решении различного рода задач стало применяться не так давно, на сегодняшний день функция уже прочно вошла в круг основных вопросов математики: подтверждением этому могут служить КИМы основного государственного экзамена и единого государственного экзамена последних лет. Помимо этого, умение работать с различными видами функциональных линий необходимо обучающимся при решении задач по физике, географии, информатики и биологии. Это приводит к выводу, что раскрыть перед ребенком понятие функции, научить его применять полученные знания при решении практических задач является важнейшей задачей для учителя математики.

Также подчеркнем, что в ФГОС второго поколения основной акцент сделан на активном использовании обучающимися знаний, укреплении межпредметных связей и приложении изученного материала к реальной жизни. В этом случае функция предоставляет возможность упорядочить представления о различных зависимостях, полученные в повседневной жизни и из других предметов, позволяет развить у обучающихся способность мыслить в терминах функциональной зависимости, развить представление о взаимозависимых величинах — это сыграет огромную роль в познании ребёнком реального мира и повысит уровень усвоения функциональной линии.

В наше время в основе современного школьного курса математики лежат содержательно-методические линии — из года в год в научной литературе больше внимание уделяется проблеме изучения функциональной содержательно-методической линии в курсе математики основной и старшей школы. Разнообразные аспекты этой проблемы освещаются в работах известных математиков и методистов: Василия Сергеевича Владимирова, Льва Семеновича Понтрягина, Андрея Николаевича Тихонова, Александра

Яковлевича Хинчина, Георгия Владимировича Дорофеева, Александра Григорьевича Мордковича, Федора Федоровича Нагибина и других.

В данных публикациях прослеживается идея о довольно низком уровне сформированности у обучающихся функциональных знаний, умений и навыков: понятие функции воспринимается поверхностно, прежде всего, отожествляясь с формулой. Среди причин, которые способствуют этому, можно выделить: отсутствие у школьников интереса к математики вообще или к изучению функций в частности; каждый новый вид функции и его свойства изучается фактически без связи с предыдущим; существование разрыва между вычислительными и функционально-графическими умениями у обучающихся.

В условиях информационно-объяснительного подхода к обучению, реализующегося на уроках математики, понятие функции и ее свойства воспринимаются обучающимися формально и не связаны с соответствующими геометрическими образами. Следствием этого может быть то, что школьникам трудно оперировать изученными понятиями и отвечать на достаточно простые вопросы. Между тем, правильное и быстрое графическое представление аналитических объектов и, наоборот, аналитическое задание графических изображений значительно облегчает усвоение многих понятий, развивает математическую интуицию детей, свидетельствует о развитой математической культуре. Таким образом, формирование у обучающихся понятия функции и обучение построению и чтению графиков функций, а также методам решения задач и графических упражнений выступает в качестве самостоятельная методическая проблема, которой посвящено данное исследование.

Проблема нашего исследования заключается в нахождении эффективных форм и методов обучения функциональным знаниям и умениям обучающихся основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: различные виды функций и методы их исследования.

Целью данного исследования стало обобщение теоретических и практических вопросов методики изучения функций в основной школе.

Основные **задачи** исследования следующие:

1. Исследование научно-методической литературы по данной теме.
2. Проведение логико-дидактического анализа изложения этой темы в современных учебных пособиях.
3. Обобщение и систематизация полученных сведений.
4. Разработка методической схемы изучения функции на основе проанализированного материала.
5. Разработка системы уроков для изучения элементарных функций в основной школе.

Проблема исследования, его цель и задачи обусловили выбор **методов исследования,** основу которых составили: педагогическое наблюдение, изучение школьной документации и продуктов деятельности обучающихся.

Практическая значимость результатов исследования: полученная информация может быть непосредственно использована учителями в школьной практике в целях повышения эффективности уроков алгебры.

Диплом состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

1.1. Различные подходы к трактовке и основные направления введения понятия функции в курсе математики основной школы

Функция – одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанное с реальной действительностью. В ней наиболее полно воплощается изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Феликс Клейн считал понятие функции центральным понятием всей математики [2].

Понятие функции менялось и совершенствовалось в течении нескольких столетий. Одним из наиболее обсуждаемых вопросов педагогической печати изучение функциональной зависимости в школьном курсе математики стала во второй половине XIX века. Данному вопросу уделялось внимание в работах многих известных методистов – Семена Ильича Шохор-Троцкого, Владимира Елисеевича Сердобинского и Владимира Петровича Шереметевского, Михаила Васильевича Остроградского, Владимира Николаевича Шкларевича [7].

Самым первым и важным этапом введения функции в школьный курс математики было определение понятия функции – не смотря на то, что еще в глубокой древности высказывались идеи функциональной зависимости, введение общей концепции функции стало необходимым лишь в восемнадцатом веке, после появления идеи переменных, которая привела к тому, что в математике стали рассматриваться различные виды движения и другие процессы, изменяющиеся с течением времени. Первоначально интерпретация понятия функции была только геометрической или механической: ординаты точек произвольных кривых – функции от абсцисс или путь и скорость – функции от времени. Также, в это время Готфрид Лейбниц ввел следующие термины: «функция» – в переводе с латинского означает «выполнение», – «переменная», «константа». В последствии, на некоторый промежуток времени стала доминировать аналитическая трактовка функции, то есть отожествление функции с формулой, задающей ее, было впервые введено обозначение $y = f(x)$. Таким образом, середина XIX века характеризуется освобождением понятия функции от единовластия формулы, а созданная годами позже теория множеств помогло расширить понятие функции: теперь функциональная зависимость могла рассматриваться на объектах произвольной природы [7], [2].

Существует несколько вариантов определения понятия функции (Рисунок 1.1.1): понятие функции может выступать как первичное (неопределяемое) математическое понятие (правило или закон), либо, при другом варианте, первичным будет считаться понятие отображения, а под функцией пониматься отображение одного числового множества в другое, либо функция может определяться и как особое отношение, установленное между элементами множеств и так далее [12], [7].

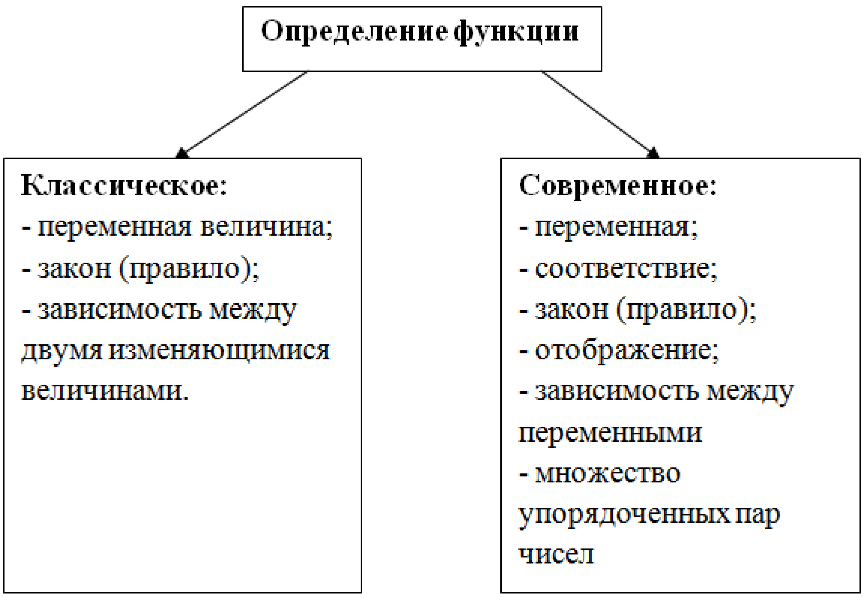


Рисунок 1.1.1 – Определение понятия функции.

Среди разнообразных математических трактовок понятия функции выделяют две основные: логическую и генетическую [4].

Основой генетической интерпретации понятия функции является методологическая разработка принципов и свойств, входящих в понятие функции до середины XIX века. Основные понятия, используемые в генетической интерпретации, включают в себя: переменную, функциональную зависимость переменных, формулу, выражающую одну переменную через некоторую комбинацию других, декартову систему координат на плоскости. Преимущества этого подхода включает в себя тот факт, что он помогает подчеркнуть динамический характер концепции функциональной зависимости и выявить модельный аспект понятия функции относительно изучения явлений природы. Генетическая интерпретация понятия функции не противоречит остальному содержанию курса алгебры, так как большинство функций, которые мы используем в нем, выражены аналитически или в табличной форме [7].

Общая последовательность действий в рассматриваемом подходе такова: чтобы применить функцию для описания результатов эксперимента, прежде всего, проводится сам эксперимент, затем, на основе полученных результатов составляется таблица значений – величин, которые являются связанными друг с другом. На следующем этапе стоится график функции, в качестве основы берутся полученные нами табличные знания, с его помощью происходит подбор формулы для данной функции, после чего и происходит развернутая характеристика ее свойств или, иначе говоря, – дается истолкование установленных свойств на языке эксперимента [5].

Логическая интерпретация понятия функции основана на методическом анализе – функция здесь становится особым видом отношений между двумя множествами, удовлетворяющее условию функциональности. Изучение начинается со знакомством школьников с понятием «отношение» – в процессе работы используются различные иллюстративные материалы [11].

Сравним два различных подхода к математической трактовке понятия функции: некоторой недостаточности для формирования обобщенного понятия функции при генетическом подходе противопоставляется избыточность логического. Эта разница отчетливо видна на начальных этапах, когда только вводится понятие функции [11], [4].

Помимо указанных различий, рассмотренные подходы имеют определенные сходства: термином «функция» обозначаются числовые функции, являющиеся объектом изучения на уроках математики в основной школе; термин «переменная», подчеркивающая наличие двух неравноправных объектов; характерная черта функции – однозначность [17].

Система обучения построена так, чтобы при введении понятия функции происходит выделение его компонентов, а затем устанавливается связь между ними: другими словами, обучающиеся начинают обращать внимание то, как выделяются и четко разграничиваются представления функциональной зависимости, и на возможность установить их взаимодействие при развертывании учебного материала. Поэтому в современном школьном курсе математики в качестве ведущего принимается генетическая трактовка понятия функции, дополненная идеями логического подхода [14].

В школьном курсе математики часто ограничиваются теми функциями, чей диапазон значений является числовым набором (поэтому данные функции называются числовыми), иначе это сразу же упоминается в заголовке (например, векторная функция или функция, которая принимает значения матрицы и так далее) [14].

На сегодняшний день Федеральный государственный образовательный стандарт под успешным усвоением функциональных знаний понимает следующее: в метапредметном направлении – умение пользоваться наглядными средствами для иллюстрации изученных знаний; в предметном направлении – умение пользоваться понятийным аппаратом по основным темам изученного материала, умение пользоваться функциональным языком и так далее. Требования к степени подготовки обучающихся отражены в кодификаторе (Рисунок 1.1.2):

Код раздела	Код контролируемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
		Функции
	5.1	*Числовые функции*
	5.1.1	Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции
	5.1.2	График функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, чтение графиков функций
	5.1.3	Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы
	5.1.4	Функция, описывающая прямую пропорциональную зависимость, ее график
	5.1.5	Линейная функция, ее график, геометрический смысл коэффициентов
	5.1.6	Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, ее график. Гипербола
	5.1.7	Квадратичная функция, ее график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии
	5.1.8	График функции $y = \sqrt{\delta}$
	5.1.9	График функции $y = \delta^2$
	5.1.10	График функции $y = \lvert x \rvert$
	5.1.11	Использование графиков функций для решения уравнений и систем

Рисунок 1.1.2 – Кодификатор элементов содержания.

Введение понятия функции проводится по трём основным направлениям:

1) упорядочение основных представлений о функции; раскрытие системы понятий, характерных для функциональных линий (способы задания и общие свойства функций, графическое истолкование области определения, области значения, возрастания и так далее на основе метода координат);

2) глубокое изучение отдельных функций и их классов;

3) расширения области приложения алгебры за счёт включения в нее идеи функции и разветвлённой системы действий с функцией [7].

Использование перевода задания функции из одной формы представления в другую является необходимым методическим приёмом приведении понятия функции. В качестве реализации выступает система заданий, в которых представлены все случаи такого перевода [7].

При втором типе направления введения понятия функции она задается посредством оптимизации ее представления без изменения средств представлений. В качестве типовой задачи можно привести следующий пример: «Упростите формулу, задающую функцию $y = \frac{(x-2)^2+8}{2+x}$». Цель подобных заданий – показать, что одна и та же функция может определяться различными формулами. Связь функциональной линии с числовой системой при введении понятия функции осуществляется при вычислении её значения по формуле или словесному описанию. Обучающиеся должны понимать, что если о некоторой функции известно, что она определена на множестве, то это значит, что для каждого можно найти соответствующее значение. [18], [7].

Таким образом, введение понятия функции — длительный процесс, завершающийся формированием представлений обо всех компонентах этого понятия в их взаимной связи и о роли, играемой им в математике и в ее приложениях. На сегодняшний день, существуют две трактовки понятия функции – генетическая и логическая, – со своими достоинствами и недостатками. Введение понятия функции осуществляется по трем направлениям. Изучение разных способов задания функции – важный методический прием [4].

1.2. Методика формирования понятий общих свойств функций

С понятием функции неразрывно связана определенная система общефункциональных понятий – таких как числовая функция, область определения, область значения, возрастание и убывание функции, четность и нечетность, нули функции, обратная и сложная функция и другие. Многие из перечисленных понятий именуются и свойством функции, и название определенного вида функции. Например, свойство периодичности одновременно указывает на принадлежность к периодическим функциям, выделяемых данным свойством [4].

В школьном курсе математики функции образуют классы (получившие название элементарных), обладающие общностью аналитического способа задания, сходными особенностями графиков, областей применения. Классификацию элементарных функций можно представить следующим образом (Рисунок 1.2.2):

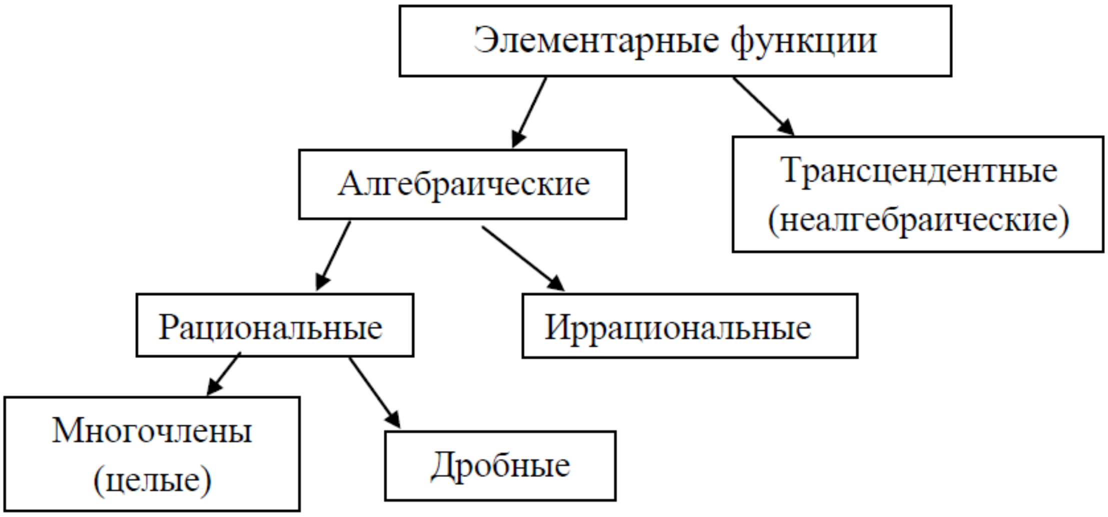


Рисунок 1.2.1 – Классификация элементарных функций.

В школьном курсе математики основной школы понятие функции вводится в седьмом классе, хотя многие общие функциональные понятия вводятся в теме «Числовые функции» еще в четвертом классе. Чтобы подготовить обучающихся к сознательному усвоению идеи функциональной зависимости, понятий функции и уравнения в седьмых и более старших классах школы, необходима последовательная подготовка к знакомству с данными понятиями. В плане подготовки используются всевозможные упражнения, которые не ведут непосредственно к каким-либо обобщениям, но доступны для обучающихся младших классов и могут служить для накопления ими опыта. Впоследствии этот опыт будет создавать у них необходимые представления, ведущие к образованию соответствующих понятий на конкретной числовой и графической основе [3], [8].

Существует следующая последовательность введения понятия функции: само понятие функции вводится конкретно-индуктивным способом, так, на основе конкретной формулы устанавливаются характеристические свойства общего понятия функции: области определения, значения, зависимость. После этого формулируются определения функции, сообщается учителем область определения и область значения. Все сказанное иллюстрируется рисунком. Затем, приводится контр пример понятия функции и рассматриваются упражнения, помогающие закрепить у обучающихся формулировку понятия функции [12].

По этой же последовательности можно изучать и остальные общие функциональные свойства: чётность, монотонность, периодичность и так далее [12].

Связи внутри функциональной линии при изучении функций могут рассматриваться несколькими способами:

1) Индивидуально-заданная функция: при этом способе из общего понятия функции вытекает понятие данной функции и ее характерных приёмов изучения и исследования.

2) Функция, входящая в класс: из общего понятия функции переходят к понятию данной функции и общих свойств класса функций, которому она принадлежит, а также к характерным приёмам изучения и исследования функций данного класса и ведущим примерам функций данного класса [9].

С понятием функции связана система функциональных понятий, используемых для изучения (исследования) различных свойств функций. В общем случае примерная схема исследования функций (изучения ее свойств) в школьном курсе математики основной школы предусматривает решение следующих задач:

1) выявление в явном виде области определения и области значений функции, которые, как правило, заданы неявно тем или иным способом – задания функции;

2) построение, если нужно, графика функции (или другого наглядного вида);

3) исследование функции на четность – нечетность (сравнением $f(x)$ с $f(-x)$);

4) исследование функции на периодичность (сравнением $f(x)$ с $f(x+1)$);

5) отыскание нулей (корней) функции с помощью решения уравнения $f(x)=0$;

6) отыскание промежутков знакопостоянства функции (решением неравенств $f(x)>0$ и $f(x)<0$);

7) исследование функции на дифференцируемость (отыскание производной $f(x)$, если она существует);

8) исследование функции на монотонность (определением знака разности $f(x_2)-f(x_1)$ при $x_2-x_1>0$) [14].

Существует два основных метода исследования свойств функций:

1) элементарными средствами, то есть с помощью графика или другого графического или наглядного способа задания и с помощью аналитической формулы на основе определения.

2) средствами дифференциального исчисления – с помощью производной на основе связи ее свойств с некоторыми свойствами функции, выраженных соответствующими теоремами. Например, для линейной функции $y=kx+b$ можно по графику определить, что при $k>0$ она возрастает, а при $k<0$ убывает на всей области определения. Так как если двигать точку по ее графику слева направо, то эта точка при $k>0$ поднимается вверх, а при $k<0$ движется вниз; пусть $x_2-x_1>0$, составим разность $f(x_2)-f(x_1)=kx_2+b-(kx_1+b)=k(x_2-x_1)$ и это произведение положительно при $k>0$, что означает возрастание функции при любых x_1 и x_2 из области определения, а при $k<0$ – убывание; при $f'(x)=k>0$

функция возрастает, при $f'(x) = k < 0$ – убывает. Эта же функция – не периодическая, потому что на ее графике нет одинаковых ординат (никакие отрезки графика не повторяются) и $f(x + l) = kx + b + l = kx + b = f(x)$, только при $l = 0$ [14].

Наиболее распространенным способом является построение графика «по точкам» – в основе него лежит определение функции как множества точек координатной плоскости. Помимо этого все больше времени уделяется преобразованиям графиков – параллельный перенос, растяжение и осевую симметрию относительно координатных осей. Данные преобразования называются линейными, часть из них, которые совершаются без деформации графика функции, называются «механическими» [16].

Некоторые учебные пособия предлагают при построении преобразования графика функции использовать движение координатных осей: другими словами, происходит создание новой системы координат из уже существующей с последующим «связыванием» этих двух систем координат [16].

Умение строить графики сложных функций базируется на умении обучающегося работать с графиками элементарных функций, так как они являются основой, из которой путем комбинации получаются графики сложных функций [4].

В девятилетней школе аналитическое исследование функции представляет слишком большие трудности для обучающихся. Исходным, а часто и единственным способом должен служить график функции, построенный по точкам, и свойства функции разбирают при рассмотрении графика. Более того, в девятом классе многие свойства функции вовсе не рассматривают [6].

1.3 Реализация методических принципов изучения функций в основной школе

Одновременно с вопросом об изучении понятия функции в школьном курсе математики возникла проблема подготовки обучающихся к усвоению данного понятия. Еще в прошлом столетии русские методисты работали над вопросом предварительного ознакомления школьников с понятием функциональной зависимости [10].

Так, Семен Ильич Шохор-Троцкий отмечал, что начало формирования понятия о зависимости между величинами у детей происходит в тот момент, когда они устанавливают взаимосвязь между данными задачи при ее решении, поэтому уже на данном этапе необходимо помогать образованию понятия о зависимых и независимых величинах. По мнению Семена Ильича, усвоение данных умений является залогом успешного овладения понятием функции. Владимир Петрович Шереметевский, еще один известный русский методист, отмечал, что понятие функциональной зависимости обращает на себя внимание обучающихся сразу же, как только начинают рассматриваться изменение результатов арифметических действий или изменение величины дроби в зависимости от изменения числителя и знаменателя [13].

На сегодняшний день понятия функции школьного курса математики можно разделить на два взаимосвязанных компонента: функциональные понятия (понятие функции и функциональные свойства) и прикладная направленность (решение уравнений, неравенств, доказательство тождеств, решение текстовых задач на функциональной основе), которая отвечает основной цели математического образования – воспитание у обучающихся умения математически исследовать явления реального мира [9].

Заметим, что в школе рассматривают только зависимости между числами, поэтому изучаются только числовые функции. Формирование данного понятия можно разделить на шесть этапов:

Первый этап — пропедевтический, осуществляется в начальной школе, когда при изучении различных тем обучающимся объясняется принцип зависимости между величинами. Так как мы ограничиваемся рассматриванием формирование понятия функции в курсе математики основной школы, пропустим механизм, с помощью которого дети усваивают первичную информацию о функциональной зависимости. Отметим только, что по окончании начальной школы у обучающихся в теории должны иметься все знания, необходимые для решения простейших линейных уравнений [17].

Второй этап, также являющийся пропедевтическим, приходится на пятый и шестой классы, когда понятие функции еще явно не вводится. Но второй этап отличается от первого самостоятельностью деятельности обучающихся [17].

Третий этап, приходящийся на седьмой и восьмой класс, реализуется на содержательной основе. Под понятием функции подразумевается связь, закон (например, как в учебнике «Алгебра-7», под редакцией Сергея Александровича Теляковского) или как зависимая переменная (например, учебник «Алгебра-7», Шавкат Арифджанович Алимов и другие). На данном этапе вводится понятийный аппарат, включающий в себя зависимую и независимую переменные, график, область определения, область значения, и рассматриваются различные способы задания функции — аналитический и графический. Перечисленные выше понятия могут вводиться либо через примеры, либо явно. Акцент на изучении функциональной линии делается в учебниках Александра Григорьевича Мордковича — в них определение понятия функции вводится на основе сформированного объема знаний обучающихся о функциональной зависимости [17].

Наиболее полно и доступно для обучающихся понятие функции раскрывается в УМК Александра Григорьевича Мордковича за счет того, что в качестве основной содержательно-методической линии обучения в основной школе приоритет отдается функционально-графической линии. То есть, вне зависимости от того, какой класс функций изучается на данном этапе, построение материала учителем будет придерживаться некоторой схеме: функция – уравнение – преобразование. Понятие функции вводится только в первом полугодие девятого класса, когда обучающие будут располагать необходимым опытом, чтобы оперировать изученными понятиями [12].

Помимо этого, внимание обучающихся обращается на то, что в математике название одного и того же предмета может различаться. Например, аналитически заданная линейная функция может называться линейным уравнением, равенством с двумя переменными, линейной функцией, одной из математических моделей, соотношением между зависимой и независимой переменной [12].

Согласно УМК Александра Григорьевича Мордковича классы функций распределяются по годам обучения следующим образом (Рисунок 1.3.2):

Класс	Виды функций	
	Базовый уровень	Добавляются на углубленном уровне
7	• $y = kx+m$ и ее виды $y = kx$, $y = b$ • $y = x^2$, $y =- x^2$ • Кусочная функция	
8	• $\acute{o} = \sqrt{\tilde{o}}$ • $y = \|x\|$ • $y = ax^2$ • $y = \frac{k}{x}$ • $y = ax^2 + bx + c$ • *кусочная функция*	дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
9	• $y = x^n$, где $n \in N$ • $y = x^{-n}$, где $n \in N$ • $y = \sqrt[3]{x}$,	

Рисунок 1.3.1 – Распределение классов функций по годам обучения на основе УМК Александра Григорьевича Мордковича.

УМК для углубленного изучения алгебры, созданное Наумом Яковлевичем Виленкиным, также охватывает седьмые и девятые классы, но основное изучение функций переносится в девятый класс. Так, в восьмом классе рассматривается лишь гипербола, а в седьмом – линейная функция. Это сделано в расчете на то, что обучающиеся не могут сразу в полном объеме усвоить понятие функции, поэтому необходимые умения и навыки вырабатываются у них постепенно (Рисунок 1.2.5).

Класс	Виды функций	
	Углубленный уровень	
8	• $y = \frac{1}{x}$	
9	• $y = kx + b$ (повторение), • $y = \lvert x \rvert$ • $y = [x]$ • $y = \{x\}$ • $y = \mathrm{sgn}x$ • $y = x^2$	• $y = \frac{k}{x}$ • $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^2 + px + c$, • $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ • $y = x^n$, где $n \in N$ $y = \sqrt[n]{x}$

Рисунок 1.3.2 – Распределение классов функций по годам обучения на основе УМК Наума Яковлевича Виленкина.

В данном курсе рассматриваются функции, имеющие сложную аналитическую запись, и кусочные функции. Элементарные функции изучаются с помощью функционально-графических методов решения, где , например, при определении свойств функции проводятся разнообразные исследования переменных в общей формуле, задающей функцию. Так же курс предусматривает решение экономических задач [13].

Для работы с данным УМК необходима хорошая математическая подготовка обучающихся, способности воспринимать сложный материал и работать с ним [13].

Таким образом, исходя из вышесказанного, мы можем выделить следующие задачи третьего этапа:

1) Осознание обучающимися, что функция является одной из основных математических моделей, позволяющих описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, и овладение простейшими методами исследования функций.

2) Функциональный материал помогает развитию всех познавательные процессов обучающихся, в частности, диалектического мышления, функционального стиля мышления, мировоззрения (диалектика) и раскрывает общенаучную и общекультурную роль математики [14].

Схема изложения функционального материала в действующих учебниках алгебры принимает следующий вид:

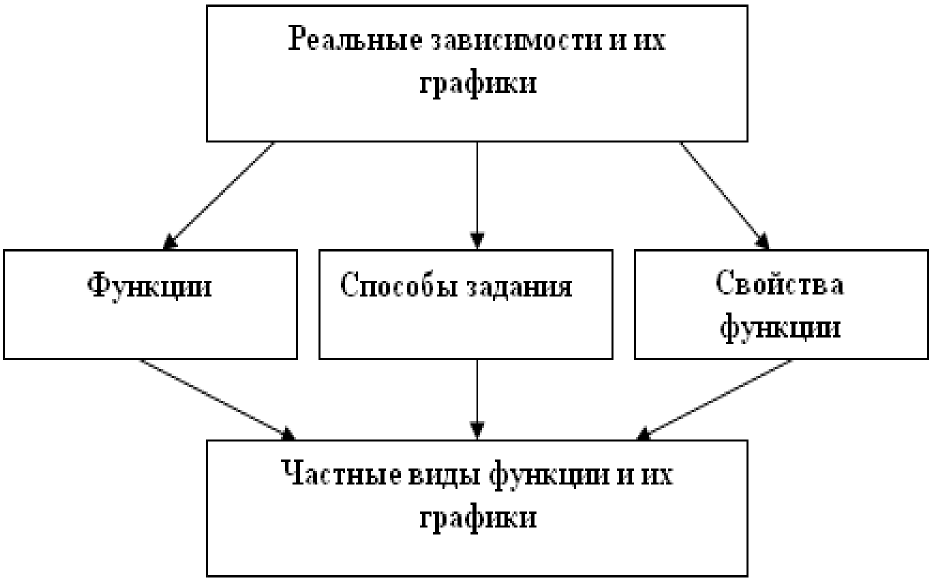


Рисунок 1.3.3 – Одна из схем изложения функционального материала.

На данный момент существует шесть альтернативных комплектов учебников, рекомендованных Министерством образования РФ в качестве учебных пособий по алгебре для основной школы. Это учебники алгебры для седьмого, восьмого и девятого класса под редакцией Сергея Александровича Теляковского; учебники алгебры под редакцией Андрея Николаевича Тихонова, Константина Саломоновича Муравина и Георгия Константиновича Муравина, Александра Григорьевича Мордковича, Сергея Михайловтча Никольского и других, Георгия Владимировича Дорофеева [2].

Рассмотрим отличия и сходства при введении понятия функции в указанных учебниках. В учебнике алгебры под редакцией Андрея Николаевича Тихонова функция вводится в седьмом классе при рассмотрении текстовой задачи на движение как зависимость переменной S от переменной t. В определении не уточняется, какая зависимость рассматривается: все примеры в учебнике даны для однозначной зависимости, хотя это и не подчеркнуто [2].

В учебниках под редакцией Сергея Александровича Теляковского, Константина Саломоновича Муравина и Григория Константиновича Муравина определение функции вводится в седьмом классе на основе рассмотрения ряда примеров на зависимость между величинами. Функция рассматривается как зависимость одной переменной (зависимой) от другой (независимой), при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Аналогичные определения мы встречаем в учебниках для восьмого класса Сергея Михайловича Никольского, Георгия Владимировича Дорофеева, учебнике для девятого класса Александра Георгиевича Мордковича. Причем у последнего понятие функции впервые встречается в седьмом классе, как математическая модель $y = f(x)$, выражающая зависимость y от x [15].

Таким образом, проанализировав современные учебники, делаем вывод, что при введении понятия функции чаще всего используется конкретно-индуктивный путь, причем, на рассмотрение берутся только числовые функции — это связано с тем, что курс геометрии не строится на основе геометрических преобразований [15].

В учебниках Александра Георгиевича Мордковича, Георгия Владимировича Дорофеева и С. А. Теляковского первым конкретным функциональным материалом, изучаемым в школьном курсе математики, являются линейные функции. В учебнике Константина Соломоновича Муравина и Григория Константиновича Муравина сначала рассматривается частный случай линейной функции — $y = kx$, — с последующим выходом к обобщенному понятию линейной функции. Напротив, Андрей Николаевич Тихонов рассматривает обе функции отдельно, указывая на графическую связь между ними (график функции $y = kx + t$ получается сдвигом графика функции $y = kx$ на t единиц вдоль оси ординат). Получение из аналитического выражения линейной функции $y = kx + b$ функции вида $y = b$, при $k = 0$ является, на наш взгляд, очень важным этапом в формировании математического мышления школьников. Для обучающихся – это первый опыт работы с параметрами. Во множестве линейных функций выделятся функции $y = x$ $(y = -x)$, являющаяся частным случаем прямой пропорциональности при $k = 1$ $(k = -1)$ и линейной функции, когда $k = 1$ $(k = -1)$ и $b = 0$, причем график ее функции является биссектрисой первого и третьего координатных углов, служит осью симметрии для графиков взаимообратных функций [8].

Большинство изучаемых в школьной математике функций образует классы, обладающие общностью аналитического способа задания функции из него, сходными особенностями графиков, областей применения. Освоение индивидуально заданной функции происходит в сопоставлении черт, специфических для неё, с общим представлением о функции непосредственно, без выделения промежуточных звеньев [6].

Типичный и одновременно важнейший для математики класс функций — линейные функции, которые мы рассмотрим с точки зрения изучения характерных для этого класса свойств и представлений, формируемых в курсе алгебры [6].

Первоначальное представление о линейной функции выделяется из рассмотрения задачи, обычно связанной с равномерным прямолинейным движением, а также при построении графика некоторой линейной функции. Рассмотрим второй из этих источников. Основная мысль, которую мы попытаемся обосновать, состоит в том, что рассмотрение графика отдельно взятой линейной функции не может привести к формированию представлений об основных свойствах графиков всех линейных функций [9].

Для этого рассмотрим два наиболее широко распространенных в начале изучения темы приема построения графиков линейной функции [10].

Первый способ. Использование «загущения» точек на графике. Предполагается следующая последовательность действий по этому приему:

а) нанесение нескольких точек;

б) наблюдение — все построенные точки расположены на одной прямой; проведение этой прямой;

в) проверка: берем произвольное значение аргумента и вычисляем по нему значение функции; наносим точку на координатную плоскость — она принадлежит построенной прямой. Отсюда делается вывод о графике данной линейной функции [6].

Второй способ. По двум точкам. Этот способ уже предполагает знание соответствующего свойства графиков линейных функций. Выявления новых свойств здесь не происходит, поскольку внимание, как и при первом способе, сосредоточивается на конкретной функции из класса. Заметим, что в обучении происходит последовательная смена этих способов: когда общее свойство графиков усвоено (при рассмотрении первого способа), начинают применять второй — он более экономен, и обоснован геометрически, поскольку через две точки проходит одна и только одна прямая [13].

Для того чтобы изучить класс линейных функций в совокупности его общих свойств, необходимо поставить новую для учащихся познавательную задачу: исследовать класс функций $y = kx + b$ в зависимости от параметров, установить геометрический смысл параметров. Эта задача возникает сразу же вслед за введением понятия функции. Наиболее естественный прием, который может быть применен, состоит в рассмотрении одновременно нескольких функций, у которых один из параметров изменяется, а другой остается постоянным. Простейшая система, реализующая этот прием, состоит из четырех заданий с их последующим анализом и установлением связей между ними [13].

Если параметры, определяющие класс функций, имеют ясный геометрический смысл, то описанный прием изучения дает достаточно полное представление об этом классе. Однако в школьном курсе алгебры рассматриваются и такие классы, при изучении которых оказывается необходимым использовать и другие приемы [12].

Изучение класса квадратичных функций начинается с изучения функций вида $y = ax^2$; при этом выясняется геометрический смысл коэффициента a. Далее вводится более широкий класс функций, имеющий вид $y = ax^2 + c$. Помимо этого, коэффициент c получает ясную геометрическую интерпретацию, подойти к которой можно либо явно используя понятие параллельного переноса вдоль оси ординат, либо независимым рассуждением [8].

Отметим здесь один частный, но полезный прием, который состоит в использовании системы заданий, имеющих цель — дать представление о тех или иных чертах данной функции или целого класса без указания точного значения величин, связанных с рассматриваемым вопросом. Этот прием можно назвать качественным или оценочным исследованием функции [5].

К изучению класса кубических функций привлекается прием, аналогичный изучению квадратичных функций, основанный на использовании геометрических преобразований для построения графика произвольной кубической функции из кубической параболы стандартного положения — графика функции $y = ax^3, a \neq 0$ [5].

Как и в случае с квадратичной функцией $y = ax^2$ видим, что характер изменения значений функции $y = x^3$ неравномерный: на одних участках она растет быстрее, на других — медленнее. Эта особенность выявляется при построении графика, причем целесообразно рассмотреть два графика: один — в крупном масштабе на промежутке, $-1 \leq x \leq 1$, другой — в мелком масштабе на промежутке, например, $-2 \leq x \leq 2$. Построение можно вести описанным выше методом загущения. Важно отметить свойство кубической параболы — симметричность её графика относительно начала координат [7].

Рассмотренные выше подходы к изучению функций в школе не охватывают все многообразие способов и методов изучения этого понятия. Они лишь являются основными, наиболее разработанными подходами к вопросу об изучении функций в школе, ориентируясь на которые можно разрабатывать новые, специфические методы обучения, которые были бы лишены недостатков вышеперечисленных подходов и были бы следующим шагом в деле обучения математике в школе [4], [14].

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

2.1. Методическая схема изучения функций

Как нами было отмечено выше, введение понятие функции — одно из центральных понятий в школьном курсе математики. Процесс изучения функции в основной школе можно разделить на несколько основных частей: изучение понятия функция, а также способов ее задания, и исследование функций с помощью элементарных средств.

Свойства функции определяются обучающимися с помощью ее графика, на основе наглядных соображений и соответствующих приемов. По мере того, как происходит постепенное овладение теоретическим материалом, растет и перечень свойств функций, подлежащих к рассмотрению.

В процессе формирования представлений о функциональной зависимости создаются условия для развития познавательных процессов обучающихся, в частности, функционального стиля мышления и раскрытия общенаучной и общекультурной роли математики. Направление подобной работы выражается в характере задач, предлагаемых обучающимся. Школьники учатся исследовать функцию несколькими приемами: графическим, словесным и символическим [14].

Так как уровень требований к объему и глубине знаний обучающихся о функциональной зависимости постепенно повышается, нами, на основе опыта накопленного отечественной школы, была разработана следующая методическая схема изучения конкретных функций в основной школе, дополненная примерами и задачами:

Первый этап: рассмотрение конкретных ситуаций и задач, приводящих к понятию данной функции.

На данном этапе могут рассматриваться следующие задачи:

Задача 1: Известно, что бак объемом 14 л заполняется водой за 5 минут. Рабочий заполняющий бак отлучился. Через 7 минут после того, как наполнился бак, напарник рабочего вытащил пробку и через три минуты бак оказался пустым. С помощью графика определите, сколько воды было в баке через минуту после того, как была вытащена пробка [7].

Задача 2: За 5 часов поезд прошел 500 км. Сколько километров поезд пройдет за первые 3 часа, если его скорость была постоянна? [7].

Задача 3: Для отопления охотничьего домика заготовлено дров на 150 дней при норме расхода 0,5 кг дров в день. Хозяин домика сэкономить решил и расходовать по 0, 2 кг в день. На сколько дней хватит запаса дров в данном случае? [7].

Задача 4: Ученый предположил, что если на Земле произойдет катастрофа, то все живые существа на планете замедлят свою скорость в 200 раз. Вычислите, какова была на Земле скорость поезда (80 км/ч), пешехода (6 км/ч) самолета (1600 км/ч)? Является ли данное замедление функциональной зависимостью?

Задача 5: С помощью таблицы задали некоторую функциональную зависимость (Рис.2.1.1). Дайте название данной зависимости и определите ее формулу, если одно из значений функции неверно.

Х	–2	–1	0	1	2
У	–8	–4	–2	1	4

Рисунок 2.1.1 – Заданная условием некая функциональная зависимость.

Задача 6: Определите периметр и площадь клумбы у дома Ани, если ее длина a м, а ширина b м.

Второй этап: формулировка определения функции, и ее запись в виде формулы.

На данном этапе обучающиеся должны научиться выявлять существенные свойства данной функции, формулировать ее определение, записывать функцию формулой и проводить исследование, входящих в данную формулу параметров. Помимо этого, на данном этапе происходит усвоение определения функции и выполняются упражнения на ее распознавание.

На данном этапе могут рассматриваться следующие задачи:

Задача 1: Исследуя таблицу, составьте формулу зависимости y от x [5].

Задача 2: При увеличении аргумента функции $y = kx + b$ на 2, значение функции увеличилась на 4. Найдите коэффициент k [5].

Задача 3: Дана функция $y = kx + b$. Значению абсциссы $x = 3$ соответствует ординаты $y = 1$, а значению $x = 5$, значение ординаты $y = -1$. Определите коэффициенты k и b функции [7].

Задача 4: Дана функция $y = x^2 - 5x + 6$. Определите, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами $(1; 2)$?

Задача 5: Укажите область определения следующих функций и постройте их графики: $y = 2x$, $y = 3x - 2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{5x}{x - 3}$, $y = \frac{x}{4}$.

Третий этап: ознакомление обучающихся с графиком данной функции.

Обучающие начинают работать с графиком функции: изображать изучаемую функцию, отличать графики разных функций друг от друга, определять, как меняется график функции при изменении ее параметров.

На данном этапе могут рассматриваться следующие задачи:

Задача 1: Постройте график функции $y = 4x + 5$. Определите по графику: значение y соответствующее значению x равному −1; 2; 3; 5 и значение x, если значение y равно 1; 4; 0; −1 [7].

Задача 2: Найти координаты точки пересечения прямых $y = 7x + 12$ и $y = -7x + 6$ [7].

Задача 3: Какой из функций соответствует график, изображенный на рисунке (Рис. 2.1.3)?

1) $y = -x^2 + 2x + 5$

2) $y = x^2 - 2x + 5$

3) $y = -x^2 - 2x + 4$

4) $y = -x^2 + 2x + 4$

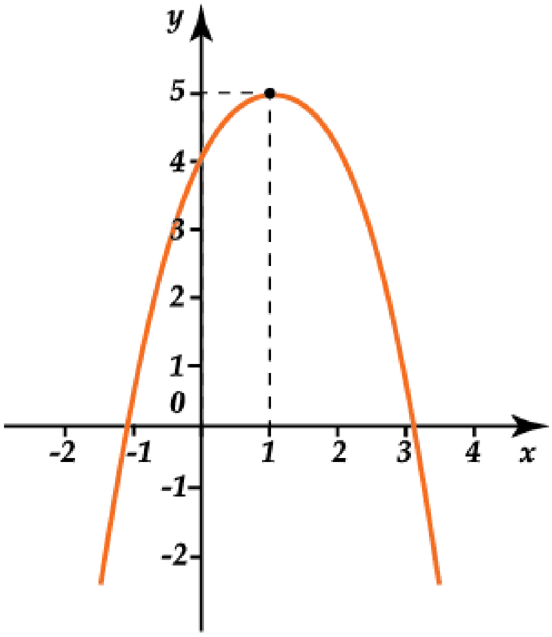


Рисунок 2.1.2 – Графическая иллюстрация к поставленной задаче.

Задача 4: Определите, в каких координатных четвертях расположены графики следующих функций: $y = 4017x$, $y = 0{,}0002x$, $y = -54x$, $y = -178x$.

Задача 5: Дана функция $y = \frac{15}{x}$. Постройте ее график и по нему определите значение y при $x = 1$ и значение x , если $y = -1$.

Четвертый этап: исследование изучаемой функции на основные свойства.

Обучающие учатся находить область определения функции и множество ее значений, определять аналитически или с помощью графика промежутки возрастания и убывания функции, четность и нечетность, нули и так далее.

На данном этапе могут рассматриваться следующие задачи:

Задача 1: Найдите область определения и область значения функции $y = \sqrt{x+6}$. Изобразите данную функцию графически [5].

Задача 2: Определите, является ли четной функция $y = \frac{x^2 + x}{x^4 + 4}$, используя свойства четных и нечетных функций [5].

Задача 3: Найдите нули линейной функции $y = 5x + 20$ [5].

Задача 4: Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$, определите коэффициенты *b* и *c* (Рис 2.1.4).

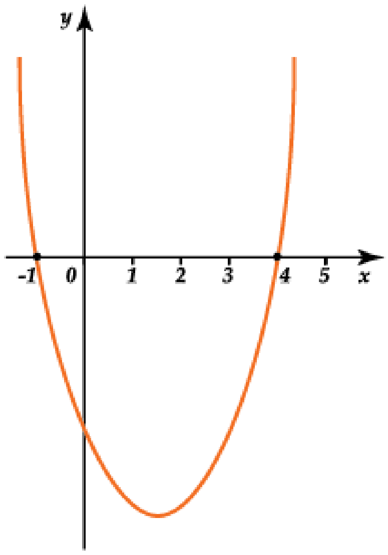


Рисунок 2.1.3 – Графическая иллюстрация к поставленной задаче.

Задача 5: Для каждой формулы укажите номер соответствующего графика (Рис. 2.1.6):

А) $y = x^2 - 3x + 1$

Б) $y = x^2 + 2x + 1$

В) $y = -x^2 - 2x - 1$

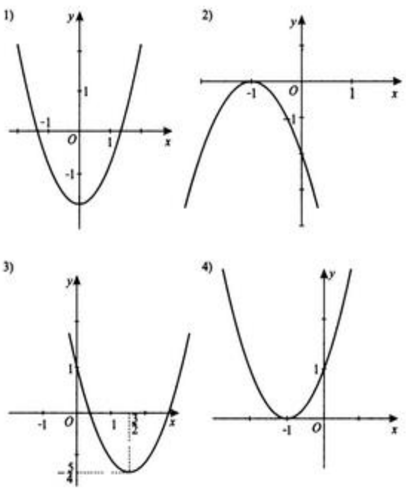


Рис. 2.1.4 – Графическая иллюстрация к поставленной задаче.

В школьном курсе математики основной школы лишь немного свойства функции обосновываются аналитически, большинство определяется по ее графику.

Пятый этап: закреплению основных понятий, связанных с изучаемой функцией, а также формированию соответствующие умения и навыки, помогут задачи следующего типа:

Задача 1: Решите уравнение $\sqrt{3+x} = 3 - x$ [7].

Задача 2: Может ли уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ при каком-либо значении *a* иметь три корня? [7].

Задача 3: Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$ (Рис 2.1.3), найдите сумму корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

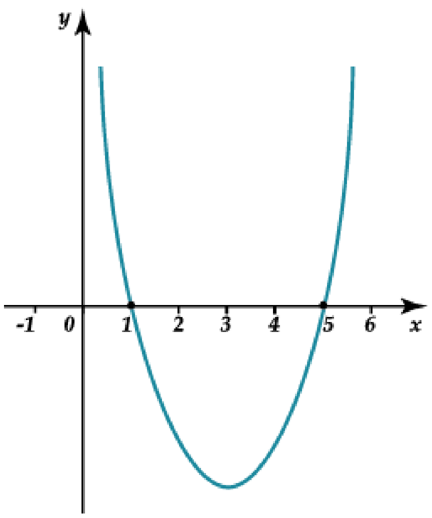


Рисунок 2.1.5 – Графическая иллюстрация к поставленной задаче.

Задача 4: Сколько корней имеет уравнение?

А) $\sqrt{x} = -2x + 5$

Б) $x + 5 = x^2$

В) .

Задача 5: Графически решите уравнение $x^2 = |x + 5|$

Приведенная нами методическая схема подходит для изучения любой функции. Осуществление всех этапов схемы поможет обучающимся сформировать целостное представление о том или ином виде функций (график, свойства, применение). Обучающиеся должны прийти к выводу, что рассмотренные функции определенного вида обладают общностью аналитического способа задания, сходными особенностями их графиков, свойств, области определения.

2.2. Разработка системы уроков по теме «Квадратичная функция»

Квадратичная зависимость обнаруживается не только в математике, но и в ее приложениях в других науках и в технической практике: с помощью квадратичной функции выражаются законы многих явлений в природе и технике, что и обуславливает повышенное внимание к ней в школьной программе.

Изучение квадратичной функции в основной школе происходит поэтапно. Нами была разработка системы уроков по данной теме для обучающихся восьмого класса по учебнику «Алгебра. 8 класс» А. Г. Мордковича.

Система уроков по теме «Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$ ».

Глава 3. Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$.

Параграф 17. Функция $y = kx^2$, ее свойства и график. Урок 1. Урок усвоения новых знаний.

Цель: расширение понятия квадратичной функции, формирование у обучающихся умений реализации новых способов действия.

I. Этап актуализации и фиксирования индивидуального затруднения в пробном действии

1) Повторение ранее изученных функций $y = x^2, y = -x^2$.

2) Построение графиков функции $y = \pm 4x^2, y = 0{,}5x^2$.

3) Постановка перед обучающимися следующих вопросов: «Что это за функции? Как они называются?».

II. Этап построения проекта

Постановка перед обучающимися следующих вопросов: Какова тема урока? Что мы должны изучить сегодня на уроке? Как мы это будем делать? Какие типы заданий мы сможем выполнить после изучения графика функции $y = kx^2$ и их свойств?

III. Этап реализации построенного проекта

1) По построенному графику $y = 2x^2$ описать его свойства.

2) Аналогично, описать свойства функции $y = -2x^2$.

3) Решить графически уравнение . Далее обучающиеся формулируют алгоритм для решения уравнений графическим способом.

4) Решить графически систему уравнений $\begin{cases} y + x^2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$. Далее обучающиеся формулируют алгоритм для решения систем графическим способом.

IV. Этап первичного закрепления

№№ 17.12, 17.18 (а, б), 17.24, 17.30 (б), 17.32 (а, б).

V. Этап рефлексии.

Учитель: Какой материал мы сегодня изучили? Кто может сказать, что все понял? У кого остались вопросы? Сформулируйте свои вопросы.

Дополнительная информация.

Квадратичная функция находит широкое применение в математике и физике:

а) $S = a^2$ – формула для нахождения площади квадрата.

б) $S = \pi r^2$ – формула для нахождения площади круга.

в) $E = \frac{mv^2}{2}$ – формула для нахождения кинетической энергии тела массой m, движущегося со скоростью v.

VI. Этап постановки домашнего задания

Повторить по учебнику стр. 88-90 свойства функции. Решить №№ 17.13, 17.25.

Параграф 17. Функция $y = kx^2$, ее свойства и график. Урок 2. Урок исследования и рефлексии.

Цель: фиксирование и преодоление затруднений в собственных учебных действиях.

I. Этап актуализации и пробного учебного действия

1) Проверка по готовым чертежам выполнение номеров из домашней работы 17.13, 17.25. Одновременно два человека у доски записывают свойства функций $y = kx^2$ и $y = -kx^2$.

2) Решить графически уравнение $x + 6 = x^2$.

3) Решить графически систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

4) Описать свойства «кусочной» функции.

II. Этап локализации индивидуальных затруднений. Этап целеполагания. Этап обобщения затруднений

Самостоятельная работа № 1.

1) Построить график функции № 17.4 (а).

2) Решить графически уравнение № 17.27 (б).

3) Решить графически систему уравнений № 17.30 (г).

Далее самопроверка по эталону.

III. Этап самостоятельной работы

1 уровень. Если допущена ошибка в № 1 самостоятельной работы, то решают № 17.1

2 уровень. Если допущена ошибка в № 2 самостоятельной работы, то решают № 17.27 (в),17.28 (б,в).

3 уровень. Если допущена ошибка в № 3 самостоятельной работы, то решают № 17.31 (в),17.41.

IV. Этап рефлексии.

Учитель: Какой материала мы сегодня закрепили? Кто может сказать, что он все понял, что делали на уроке? У кого остались затруднения? Сформулируйте вопросы к следующему уроку.

V. Этап постановки домашнего задания. Решить №№ 17.32 (в, г), 17.42 (б, в).

Параграф 18. Функция $y = \frac{k}{x}$, ее свойства и график. Урок 1. Урок усвоения новых знаний.

Цель: изучение функции $y = \frac{k}{x}$, ее свойства и графика.

I. Этап актуализации и фиксирования индивидуального затруднения

Учитель: Рассмотрим задачу. Площадь прямоугольника равна 24 кв.см. Одна из его сторон *x* см. Выразите другую, смежную с ней, сторону. $y = \frac{24}{x}$ см. Какие значения может принимать число *x*? (В дальнейшем мы будем изучать и отрицательные значения *x*). Что происходит с переменной *y*, если значение переменной *x* увеличивается (уменьшается)?

II. Этап построения проекта

Постановка перед обучающимися следующих вопросов: Кто догадался, какова тема урока? Чему мы должны научиться? Что мы должны уметь делать?

III. Этап реализации построенного проекта

$$y = \frac{k}{x}$$

Учитель: Рассмотрим функцию , которая называется обратной пропорциональностью: *x* – независимая переменная, *y* – зависимая переменная, $y = k \neq 0$.

Построим график функции $y = \frac{6}{x}$ и $y = -\frac{6}{x}$:

а) Составить таблицу значений.

б) Название – гипербола, ветви гиперболы.

в) Расположение ветвей гиперболы.

г) При $x = 0$ функция не определена (то есть график не пересекает ось *Oy*). При любых значениях *x* $y \neq 0$ (то есть график не пересекает ось *Ox*).

д) Прямые *x* = 0 и *y* = 0 называются асимптотами графика. е) Центр симметрии графика – точка (0;0). Ось симметрии графика *y* = *x*.

$$y = \frac{k}{x}$$

По готовым чертежам описать свойства функций при $k > 0, k < 0$. Какие типы заданий мы можем выполнить, изучив график и свойства функции?

IV. Этап первичного закрепления с проговариванием во внешней речи

Решить фронтально у доски №№ 18.6, 18.10 (а,б), 18.14 (б), 18.17 (г).

V. Этап самостоятельной работы самопроверкой по эталону.

Решить №№ 18.5, 18.15 (б).

VI. Этап рефлексии.

Какой материал мы сегодня изучили? Кто может сказать, что все понял? У кого остались вопросы? Сформулируйте свои вопросы.

VII. Этап постановки домашнего задания.

Повторить свойства функций стр. 103-104 учебника, решить №№ 18.12, 18.16 (в).

Параграф 18. Функция $y = \frac{k}{x}$, ее свойства и график. Урок 2. Урок исследования и рефлексии.

Цель: освоение свойств функции, применение их в типовых заданиях, фиксирование и преодоление затруднений в собственных учебных действиях.

I. Этап актуализации и пробного учебного действия

1) Проверка домашней работы по готовым чертежам.

2) Выявление индивидуальных затруднений.

3) Повторение свойств функции $y = \frac{k}{x}$. Повторение алгоритма решения уравнений графическим способом.

4) Самостоятельная работа № 1.

1) № 18.13 (а); 2) № 18.15 (в); 3) 18.18 (г).

5) Самопроверка по эталону.

II. Этап локализации индивидуальных затруднений

III. Этап самостоятельной работы

1 уровень. Если ошибка в № 1 самостоятельной работы, то построить все функции отдельно из №18.14, 18.16.

2 уровень. Если ошибка в № 2 самостоятельной работы, то решить графически уравнения $-x^2 = \frac{8}{x}$, .

3 уровень. Если ошибка в № 3 самостоятельной работы, то решить

а) графически систему уравнений $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$

б) построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4x^2}, -2 \le x \le 2 \\ 2 - x, \quad x > 2 \\ x + 2, \quad x < -2 \end{cases}$$

IV. Этап рефлексии

Учитель: Какой материала мы сегодня закрепили? Кто может сказать, что он все понял, что делали на уроке? У кого остались затруднения? Сформулируйте вопросы к следующему уроку.

V. Этап постановки домашнего задания

Повторить материал параграфов 17,18. Решить №№ 18.19 (а), 18.24.

Параграф 19. Построение графика функции $y = f(x + l)$ на основе заданного графика $y = f(x)$.

Урок 1. Урок усвоения новых знаний.

Цель: изучение алгоритма построения графика функции , используя уже изученные функции.

I. Этап актуализации опорных знаний

Какие функции мы изучили? Как называется график функции $y = kx^2$? От чего зависит направление ветвей параболы? Как называется график функции $y = \frac{k}{x}$? От чего зависит расположение ветвей гиперболы?

II. Этап проверки базовых знаний учащихся.

III. Этап выявления затруднений

Учитель: Обратите внимание на задания 1-3. Все ли функции вам знакомы? Мы видим, что существуют функции, которые внешне вроде нам знакомы, но мы не умеем такие функции строить. Кто догадался, какова тема нашего урока? Чем мы будем заниматься на уроке?

IV. Этап составления плана и его реализация

Рассмотрим функцию. Что это за функция? Как она называется? Как мы решим эту задачу? Что мы будем делать? Построим график по точкам. Учащиеся самостоятельно пробуют строить в группах. Обсуждают решение. Проверяют по эталону. Делают вывод о сдвиге графика функции.

Два человека у доски строят графики функций и делают вывод о сдвиге графиков функций.

V. Этап закрепления. Решить фронтально у доски №№ 19.7-19.10 (а).

VI. Этап самостоятельной работы с самопроверкой №№ 19.7 (а), 19.8 (б). На данном этапе для самостоятельного решения обучающимися также подойдут задачи из Приложения 1.

VII. Этап рефлексии.

Какой материал мы сегодня изучили? Кто может сказать, что все понял? У кого остались вопросы? Сформулируйте свои вопросы.

VIII. Этап постановки домашнего задания.

Решить №№ 19.7-19.10.

Параграф 19. Построение графика функции $y = f(x + l)$ на основе заданного графика $y = f(x)$.

Урок 2. Урок закрепления.

Цель: образовательная: способствовать дальнейшему закреплению в памяти учащихся метода построения графиков указанных функций, если известен график функции ; способствовать расширению знаний учащихся о способах построения графиков функций и развитию умений и навыков решений задач функциональным способом; воспитательная: формирование навыков самоконтроля; воспитание терпеливости, ответственности при выполнении заданий; развивающая: развитие памяти, логического мышления, внимания.

I этап. Этап актуализации опорных знаний.

Теоретический опрос.

1) Как называется график функции $y = kx^2$?

2) От чего зависит направление ветвей параболы?

3) Как с помощью сдвига построить график функции $y = (x - 3)^2$?

$$y = \frac{k}{x}$$

4) Как называется график функции ?

5) От чего зависит расположение ветвей гиперболы? (От значения коэффициента *k*)

II этап. Этап целеполагания, мотивации

Учитель: Изучив сдвиг графиков $y = kx^2$ и $y = \frac{k}{x}$ на прошлом уроке, мы продолжаем изучать данную тему. Как вы думаете, где мы будем применять эти функции? Что будем делать сегодня на уроке? (Строить кусочные функции, решать графически уравнения и системы).

III этап. Этап проверки базовых знаний, выявление затруднений, ликвидация индивидуальных затруднений

Учащиеся выполняют тест, а после проверяют результаты по готовым ответам. Оценивают себя. Проговаривают вслух правила построения графиков с помощью сдвига.

IV этап. Этап решения задач, включения в систему знаний (фронтально у доски)

№ 19.29 (а), № 19.53 (в); № 19.34 (б,в) (при наличии времени, или для тех, кто справился сам быстрее остальных).

V этап. Этап разноуровневой самостоятельной работы.

I уровень. Построить график функции $y = \frac{4}{x-2}$.

II уровень. Построить график функции и перечислить свойства функции $y = -\frac{2}{x+2}$.

III уровень. Построить и прочитать график функции $y = \sqrt{x+3}$

Проверка решений самостоятельной работы по готовым чертежам. Оценивание. Выявление затруднений и допущенных ошибок.

VI этап. Этап рефлексии. Подведение итогов работы

Учитель: Какой материала мы сегодня закрепили? Кто может сказать, что он все понял, что делали на уроке? У кого остались затруднения? Сформулируйте вопросы к следующему уроку.

VII этап. Этап постановки домашнего задания.

I уровень: № 19.7, 19.8 (в,г)

II уровень: № 19.24, 19.26 (а,б)

III уровень: № 19.51 (в), 19.56.

Таким образом, нами была разработана система уроков, позволяющая последовательно ввести понятие элементарной функции, раскрыть ее основные свойства и научить школьников использовать полученные знания при решении задач. Так же, в качестве рассматриваемых примеров, мы выбрали задания, встречающиеся в основном государственном экзамене.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Функциональная зависимость — одна из наиболее сложных тем в школьном курсе математики. Уравнения и неравенства, которые можно решиться, зная понятие и свойства функции, из года в год встречаются среди заданий экзаменов и олимпиадных задач.

В нашей работе были рассмотрены общие вопросы изучения функций в курсе математики основной школы. На основе анализа научной литературы, мы выделили несколько способов математической трактовки понятия функции, основные направления ее введения, а так же разделили процесс изучения функций на этапы. Для того чтобы обучающиеся овладели необходимым материалом, должна осуществляться постановка и выполнение педагогом соответствующих целей, среди которых важнейшими являются: наглядная иллюстрация всех основных свойств функций и установление межпредметных связей с практикой.

Далее, нами была рассмотрена методика формирования понятий общих свойств функций и реализация методических принципов изучения функций в основной школе. Мы подробно расписали этапы изучения функциональной зависимости, рассмотрели особенности изучения обучающимися числовых функций в курсе алгебры восьмых и девятых классов. Были рассмотрены: последовательность введения свойств функций, сходства и различия изучения функции в различных школьных учебниках.

Во второй главе, мы составили методическую схему изучения функции, помогающую последовательно и упорядоченно ввести понятие функции и рассмотреть ее основные свойства, а также прийти к применению определения и свойств функций при решении практических задач в школьном курсе математики. На конкретных примерах мы показали, какие задачи мы можем использовать, чтобы достигнуть поставленных целей и лучше проиллюстрировать теоретический материал.

Таким образом, поставленные задачи были выполнены и достигнута цель: мы исследовали научно-методическую литературу по выбранной теме, провели логико-дидактический анализ изложенной темы в современных учебных пособиях и обобщили и систематизировали полученные сведения о теоретических и практических вопроссов методики изучения функций в основной школе, и на основе этого составили методическую схему изучения функции и разработали систему уроков по теме «Квадратичная функция».

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: «Издательский центр «Академия»»», 2014. – 126.
2. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе – М.: «Просвещение», 2013. – 211.
3. Колягин Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики / Луканкин Г. Л., Мокрушин Е. Л. – М.: «Просвещение», 2013. – 96.
4. Конаржевский Ю.А. Анализ урока. – М.: Центр «Педагогический поиск», 2016. – 76.
5. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. – М.: «Просвещение», 2016. – 102.
6. Методика обучения математике. Практикум по решению задач : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 271 с.
7. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова [и др.] ; под редакцией Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. — Москва: Издательство Юрайт, 2018. — 274 с.
8. Методика преподавания математики в средней школе (общая методика). Учебное пособие/ Виноградова Л.В.: – Петрозаводск, 2013. – 97.
9. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов/ Под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2015. – 194.
10. Мордкович А.Г. Алгебра, 9 класс – М.: Мнемозина, 2017. – 245.
11. Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие/ Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова // Под ред. Т.А. Ивановой. – Н.Новгород: НГПУ, 2015. – 46.
12. Родионов М. А. Мотивация учения математике и пути ее формирования: Монография. – Саранск, 2001. – 154.

13. Рогановский Н. М. Методика преподавания в средней школе. – Мн.: «Высшая школа», 2013. – 240.

14. Столяр А.А. Логические проблемы преподавания математики. – Мн.: «Высшая школа», 2013. – 135.

15. Функции и графики в курсе алгебры 7 класса: Рабочая тетрадь по алгебре. Учебное пособие для 7 класса общеобразовательных учебных заведений./ Перевощикова Е.Н. – Новгород: «Вектор ТиС», 2016. – 64.

16. Перевощикова Е.Н.Алгебраические модели, функции и графики в курсе алгебры 8 класса: Рабочая тетрадь по алгебре. Учеб. пособие для 8 класса общеобразовательных учебных заведений./ Перевощикова Е.Н. – Новгород: «Вектор ТиС», 2016. – 64.

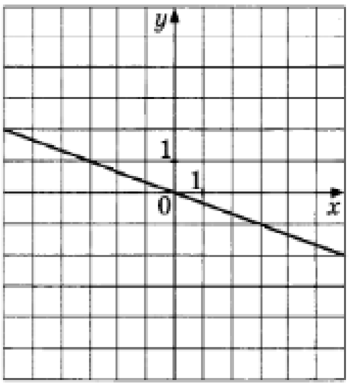
17. Покровский В.П. Методика обучения математики: функциональная содержательно-методическая линия: учеб-метод. пособие / Покровский В.П.; Владимир. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2018 – 143.

18. Фройденталь З.Г. Математика как педагогическая задача. – М.: «Просвещение», 2013. – 154.

Приложения

Приложение 1

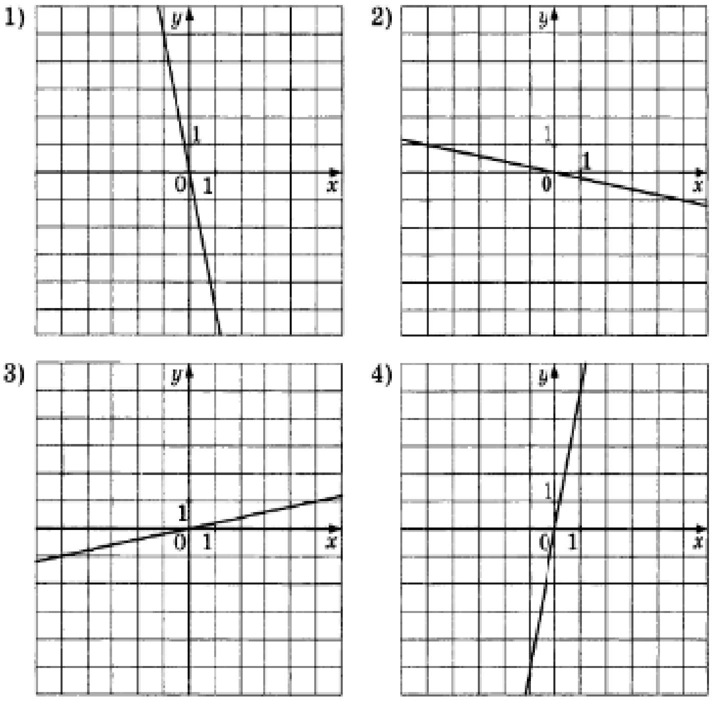
1333. График какой из приведённых ниже функций изображён на рисунке?



1) $y = -\frac{1}{3}x$ 2) $y = -3x$ 3) $y = \frac{1}{3}x$ 4) $y = 3x$

Ответ:

1337. На одном из рисунков изображён график функции $y = 5x$. Укажите номер этого рисунка.

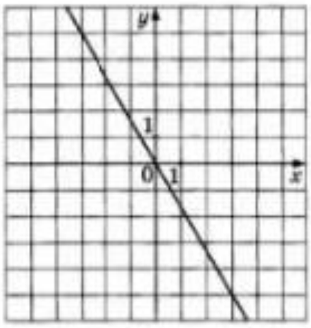


1 Ответ: 4

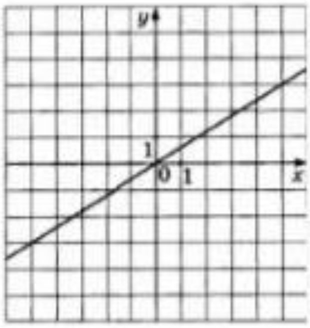
1341. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

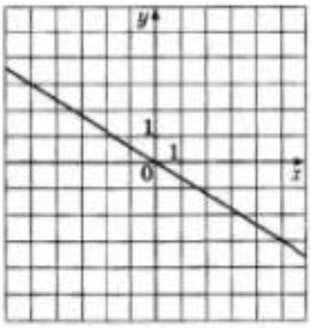
А.



Б.



В.



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\frac{3}{5}x$

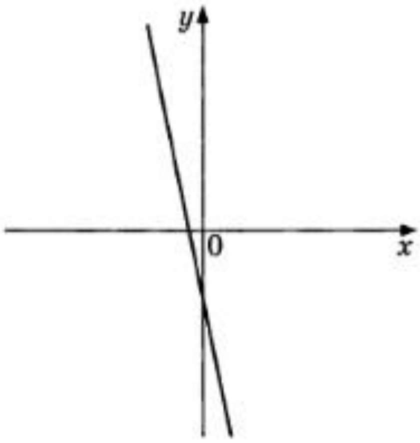
2) $y = -\frac{5}{3}x$

3) $y = \frac{5}{3}x$

4) $y = \frac{3}{5}x$

Ответ: 241

1349. На рисунке изображён график функции $y = kx + b$.

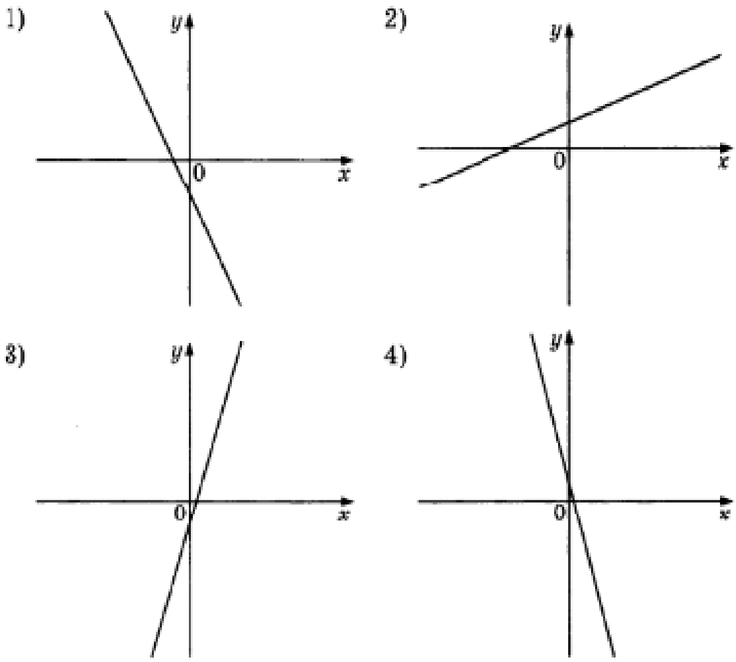


Каковы знаки коэффициентов k и b?

1) $k < 0$, $b > 0$
2) $k > 0$, $b < 0$
3) $k < 0$, $b < 0$
4) $k > 0$, $b > 0$

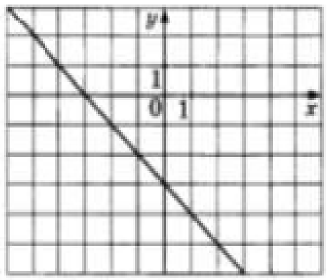
Ответ: 3

1352. Дана функция $y = kx + b$. На каком из рисунков изображён график этой функции, если известно, что $k < 0$ и $b > 0$?



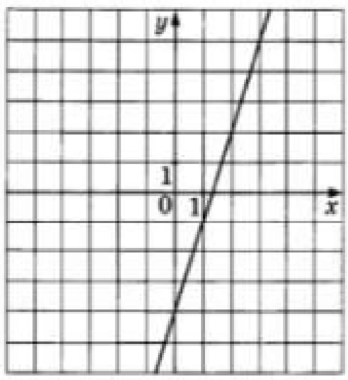
Ответ: 4

1361. Найдите значение b по графику функции $y = kx + b$, изображённому на рисунке.



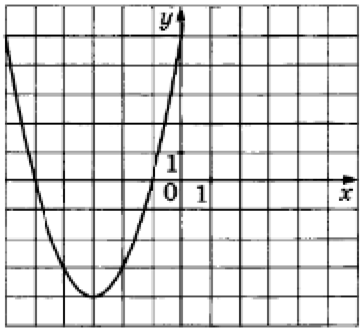
Ответ: -3

1367. Найдите значение k по графику функции $y = kx + b$, изображённому на рисунке.



Ответ: 3

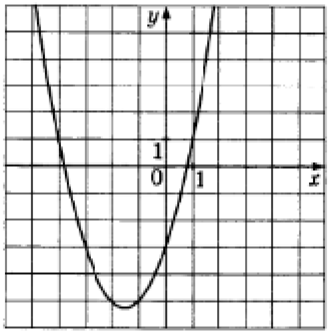
1369. График какой из приведённых ниже функций изображён на рисунке?

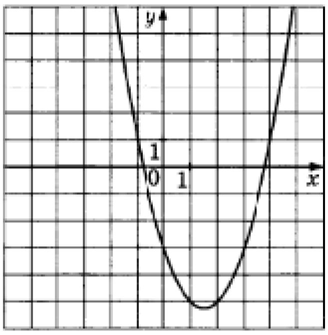


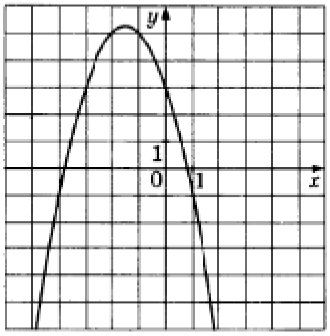
1) $y = -x^2 - 6x - 5$
2) $y = x^2 + 6x + 5$
3) $y = x^2 - 6x + 5$
4) $y = -x^2 + 6x - 5$

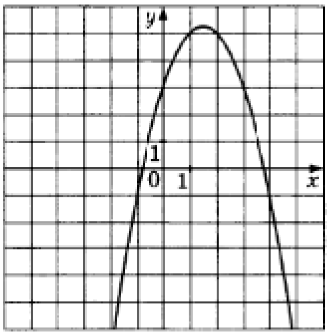
Ответ: 2

1372. На одном из рисунков изображён график функции $y = -x^2 + 3x + 3$. Укажите номер этого рисунка.

1) 

2) 

3) 

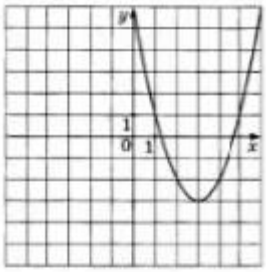
4) 

Ответ: 4

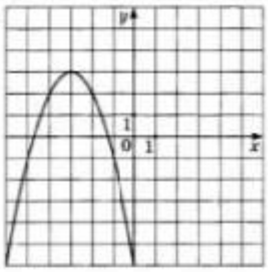
1375. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

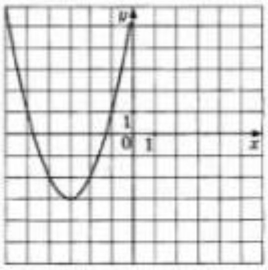
А.



Б.



В.

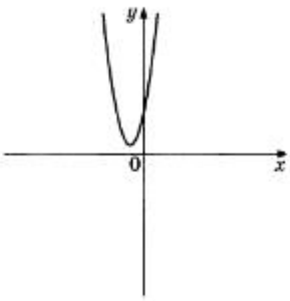


ФОРМУЛЫ

1) $y = -x^2 + 6x - 6$
2) $y = -x^2 - 6x - 6$
3) $y = x^2 + 6x + 6$
4) $y = x^2 - 6x + 6$

Ответ: 423

1381. На рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$.



Каковы знаки коэффициентов a и c?

1) $a < 0,\ c > 0$
2) $a < 0,\ c < 0$
3) $a > 0,\ c < 0$
4) $a > 0,\ c > 0$

Ответ: 4