ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**( Н И У « Б е л Г У » )**

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05
Педагогическое образование, профиль Математика и физика
очной формы обучения, группы 02041401
Черняка Максима Михайловича

Научный руководитель
к.ф.- м.н., доцент
Витохина Н. Н.

БЕЛГОРОД 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Переходя в 10 класс, обучающиеся начинают изучать новый для них раздел математики – «Начала анализа». Математический анализ – ветвь математики, которая оформилась в XVIII веке. Она включает в себя два раздела: дифференциальное и интегральное исчисление. Анализ сыграл огромную роль в развитии науки – появился мощный, универсальный метод исследования функций, который используется при решении разнообразных прикладных задач.

Тему дифференциального исчисления без преувеличения можно назвать самой важной темой курса математики старшей школы. В рамках этой темы рассматривается производная функции, техника дифференцирования, основные приложения производной.

Применения производных в самых различных разделах математики и многих других науках весьма широки и разнообразны. Однако особенное значение имеет ограниченный круг вопросов, связанных с использованием производных для исследования поведения функций: промежутки монотонности функции, наибольшие и наименьшие значения, максимумы и минимумы функции.

**Актуальность** темы выпускной квалификационной работы «Производная функции в задачах ЕГЭ» состоит в том, что в Едином государственном экзамене представлено несколько заданий на применение производной функции. От правильности выполнения заданий зависит количество набранных баллов по предметам («Математика», «Физика»), а, следовательно, и вероятность поступления обучающихся в высшие учебные заведения, а также форма обучения (бюджетная и платная).

На базе МБОУ Матреногезовская СОШ Алексеевского района Белгородской области были собраны данные о результатах Единого государственного экзамена по математике в 2013-2018 учебных годах. Среди 44 выпускников 43 % правильно выполнили задание на исследование поведения функции с помощью производной (задание 7 профильного уровня), и лишь 20 % верно решили задание на наибольшее или наименьшее значение функции (задание 12 профильного уровня). Отсюда можно сделать вывод, что тема «Производная функции в задачах ЕГЭ» имеет практическую значимость.

**Цель работы**: сформировать алгоритмы для успешного усвоения темы «Производная функции» и применения ее для решения задач Единого государственного экзамена, составить факультативный курс по данной теме.

**Объектом исследования** является производная функции в курсе математики общеобразовательной школы.

**Предмет исследования** – задания Единого государственного экзамена с применением производной функции.

**Проблема исследования**: рассмотрение задач, в которых применяется производная функции, поиск оптимальных решений этих задач.

Для достижения цели работы были поставлены следующие **задачи**:

- проанализировать учебно-методическую литературу по теме «Производная функции»;
- рассмотреть задания Единого государственного экзамена по математике и другим предметам с применением производной функции;
- разработать алгоритмы оптимального решения данных задач;
- разработать факультативный курс «Производная функции в ЕГЭ».

**Методы исследования**: анализ школьных учебников и учебно-методической литературы; изучение школьной документации и продуктов деятельности обучающихся; созидательно-преобразующий педагогический эксперимент.

**Структура работы**: выпускная квалификационная работа состоит из введения, теоретической и практической частей, заключения, списка использованной литературы, приложения.

Во введении сформулирована актуальность, поставлены цели и задачи выпускной квалификационной работы, определены объект, предмет, проблема и методы исследования.

В первой главе рассмотрена основная теория по теме, приведены таблица производных элементарных функций и правила дифференцирования, а также их доказательства.

Во второй главе разработаны алгоритмы решения проблемы, накоплена система заданий по теме, составлен факультативный курс.

В заключении подводятся итоги проделанной работы.

# ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

## 1.1 Определение предела функции

Понятие предела функции является достаточно сложным, но обойтись без него практически невозможно, поскольку пределы широко используются во многих разделах математики, например в определении производной.

Рассмотрим поведение функции $y = f(x)$, когда ее аргумент $x$ приближается к некоторому значению $a$. Точка $a$ является предельной точкой (точкой сгущения) области определения $D$ функции $y = f(x)$. Это означает, что в любой окрестности точки $a$ найдутся значения $x \in D$, отличные от $a$. При этом точка $a$ может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $D$ [7].

Окрестностью точки $a$ называется интервал $(a - \delta; a + \delta)$, где $\delta$ – радиус окрестности; $\delta$ – положительное число, $a$ – произвольное действительное число. Для всех точек $x$-окрестности точки $a$ выполняется двойное неравенство $a - \delta < x < a + \delta$ или, что то же самое, $|x - a| < \delta$ [10].

Точки множества, которые не являются предельными, называются изолированными. У таких точек существует окрестность, в которой нет ни одной другой точки данного множества. Пример изолированной точки дает функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$. Её область определения состоит из единственной точки $x = 0$. Говорить о поведении этой функции, когда ее аргумент приближается к точке $x = 0$, не имеет смысла [5].

Число $A$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ (при $x$, стремящемся к $a$), если значения $f(x)$ сколь угодно близки к $A$ для всех $x$, достаточно близких к $a$ (рис. 1.1.1).

Предел функции обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

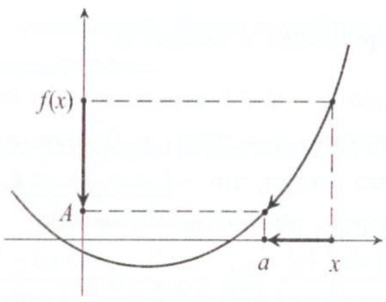



Рис. 1.1.1 Предел функции

Определение предела функции, приведенное выше, является не вполне точным, так как в нём не определён термин «близость».

Число $A$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ (или пределом в точке $x = a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ [1].

Замечания:

1) Неравенство $0 < |x - a|$ означает, что $x \neq a$. Это позволяет применить данное определение и в случае, когда функция $f(x)$ не определена при $x = a$.

2) В этом определении $\delta$ не зависит от $\varepsilon$.

3) Неравенство $|x - a| < \delta$ определяет меру близости значения аргумента $x$ к числу $a$. Из этого неравенства следует, что $-\delta < x - a < \delta$. Последнее в свою очередь равносильно неравенству $a - \delta < x < a + \delta$.

Если число $\delta > 0$ мало, то отсюда вытекает, что значения аргумента $x$ будет близким к числу $a$.

4) Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ определяет меру близости значения функции $f(x)$ к числу $A$. Отсюда следует, что $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, но тогда $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Согласно определению число $\varepsilon > 0$ может быть любым, а значит, оно может быть сколь угодно маленьким. Следовательно, значение функции $f(x)$ будет сколь угодно близким к числу $A$, если только значение аргумента $x$ окажется достаточно близким к числу $a$ [7].

Понятие предела обобщается и на случай, когда $a = \pm\infty$ или $A = \pm\infty$. Такую запись следует понимать как условность: достичь бесконечности нельзя, к ней какая-либо величина может лишь стремиться. Употребление перед символом $\infty$ двух знаков подразумевает, что величина может стремиться по отдельности либо к $+\infty$, либо к $-\infty$. Если же знак перед символом отсутствует, подразумевается $+\infty$ [2].

Число $A$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что при всех $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

Число $A$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что при всех $x < -M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен $+\infty$, если для любого числа $\Delta > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > \Delta$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен $-\infty$, если для любого числа $\Delta > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) < -\Delta$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ [7].}$$

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$. Пусть она определена в некоторой правой окрестности точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$. Это значит, что она определена для значений $x$, удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + \delta$, где $\delta$ – некоторое положительное число.

Функция $y = f(x)$ имеет правый предел (предел справа) в точке $a$, равный $A$, если из того, что $x$ стремится к $a$, оставаясь в правой окрестности точки $a$, следует, что $f(x)$ приближается к $A$.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = A \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x) = A.$$

Если функция $y = f(x)$ определена в левой окрестности точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$, то есть она задана для значений $x$, удовлетворяющих неравенствам $a - \delta < x < a$ при некотором $\delta > 0$, то функция $f(x)$ имеет левый предел (предел слева) в точке $a$, равный числу $B$, если из того, что $x$ стремится к $a$, оставаясь в левой окрестности точки $a$, следует что $f(x)$ приближается к $B$ [15].

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = B \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x) = B.$$

Найти предел функции можно отнюдь не всегда, поскольку он может и не существовать. Конечный или бесконечный предел функции

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают оба односторонних предела этой функции

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

Слова «предел не существует» в математической литературе употребляются не только, когда найти предел нельзя, но и в случае, когда в результате вычисления предела получается $\pm\infty$ [2].

Чтобы вычислить предел функции, необходимо пользоваться основными теоремами о пределах. Пусть аргумент функции $x \to a$, где $a$ – некоторое число:

1) Теорема о пределе постоянной: если функция $f(x) = c$ (где $c = const$) при любых $x$, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

при любых $a$.

2) Теорема о пределе суммы (разности): если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1 \text{ и } \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2, \text{то}$$

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_1(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x) = A_1 \pm A_2,$$

то есть предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций.

3) Теорема о пределе произведения: если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1 \text{ и} \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2, \text{то}$$

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \cdot f_1(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) = A_1 \cdot A_2,$$

то есть предел произведений функций равен произведению пределов этих функций.

4) Теорема о пределе отношения: если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1 \text{ и} \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2, \text{причём } A_2 \neq 0, \text{то}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f_1(x)}{\lim_{x \to a} f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2},$$

то есть предел отношения функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя отличен от нуля [7].

5) Теоремы о пределе функции в $n$-ой степени:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}, \text{если } \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \text{ существует.}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n.$$

6) Теорема о пределе логарифма функции:

$$\lim_{x \to a}[\ln f(x)] = \ln[\lim_{x \to a} f(x)], \text{если } \ln[\lim_{x \to a} f(x)] \text{ существует [16].}$$

В курсе математики средней школы рассматриваются следующие пределы:

$$1) \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ [1];$$

$$2) \lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \ [14].$$

Данные пределы называются замечательными. Их доказательства выходят за рамки школьного курса математики и проводятся в курсе математического анализа.

Необходимо заметить, что понятие предела, его свойства и связанные с ним теоремы рассматриваются, в основном, в профильных классах с углубленным изучением математики.

## 1.2 Понятие производной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Возьмём такое число $\Delta x \neq 0,$ чтобы значение аргумента $x = x_0 + \Delta x$ не выходило из этой окрестности.

Величина $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента в точке $x_0$, а величина $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращением функции в этой точке, соответствующим приращению аргумента $\Delta x$ $[10]$.

Приращение аргумента $\Delta x$ – некоторая переменная величина, имеющая числовые значения. Значению аргумента $x_0$ соответствует значение функции $f(x_0)$, а значению аргумента $x_0 + \Delta x$ соответствует значение функции $f(x_0 + \Delta x)$. Разность этих двух значений $f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и называется приращением функции, соответствующим приращению аргумента $\Delta x$ в точке $x_0$. Геометрический смысл этого определения показан на рисунке 1.2.1.

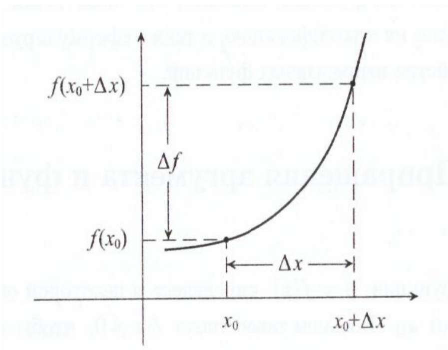



Рис. 1.2.1 Приращение аргумента и приращение функции

Производной функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке $x$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента $\Delta x$, когда последнее стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ [10].}$$

Предел, который используется в данном определении, может и не существовать. В этом случае говорят, что в данной точке $x$ производная функции $y = f(x)$ не существует.

Когда значение аргумента $x$ меняется, значение производной $f'(x)$ также меняется. Поэтому саму производную функции $y = f(x)$ также можно рассматривать как некоторую функцию. При этом, однако, область определения $f'(x)$ может оказаться уже области определения $f(x)$, поскольку для каких-то значений аргумента производная может и не существовать.

Для производной нередко используются и другие обозначения:

$$f'(x) = f'_x(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \dot{f}(x).$$

Такая форма записи предполагает, что производная рассматривается как функция аргумента $x$. Если же потребуется указать, что производная ищется для какого-то конкретного значения $x_0$ аргумента $x$, то используются следующие обозначения:

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x)|_{x=x_0} = \dot{f}(x_0) \text{ [2].}$$

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в некоторой фиксированной точке $x$, если в этой точке она имеет конечную производную. Операция нахождения производной при этом называется дифференцированием функции [7].

С помощью определения производной можно продемонстрировать технику вычисления производной.

Пример 1.2.1:

Пусть $f(x) = x$, тогда $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$, следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \text{ [6]}.$$

Пример 1.2.2:

Пусть $f(x) = x^2$, тогда $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$, следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \text{ [6]}.$$

Пример 1.2.3:

Пусть $f(x) = |x|$. Покажем, что при $x = 0$ производная этой функции не существует. Рассмотрим приращение данной функции в точке $x = 0$.

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1, \text{когда } \Delta x > 0, \\ -1, \text{когда } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Последнее означает, что предел этой дроби при $\Delta x \to 0$ не существует, а, следовательно, не существует и $f'(0)$ [4].

Определение производной функции возможно без использования понятия предела функции. Производной функции $f$ в точке $x_0$ называется число, к которому стремится отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x$, стремящемся к нулю [8].

## 1.3 Геометрический и механический смысл производной

В школьном курсе планиметрии вводятся понятия секущей и касательной к окружности. Они допускают обобщение, позволяющее говорить о секущей и касательной к графику той или иной функции.

Касательную $a$ к некоторой кривой, проведенную в точке *M,* обычно можно рассматривать как предельное положение секущей *ML*, когда точка *L*, двигаясь вдоль кривой стремится к точке *M* (рис. 1.3.1).

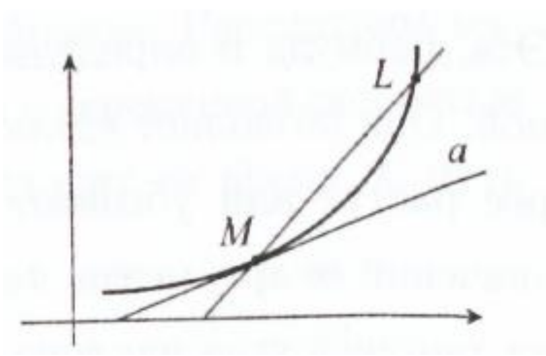



Рис. 1.3.1 Секущая и касательная к кривой

На рисунке 1.3.2 показана касательная $a$ к кривой $y = f(x)$, проведенная в точке *M,* и секущая, проходящая через точки $M$ и $L$. Из треугольника $LMN$ следует, что тангенс угла наклона этой секущей к оси абсцисс находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{LN}{NM} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

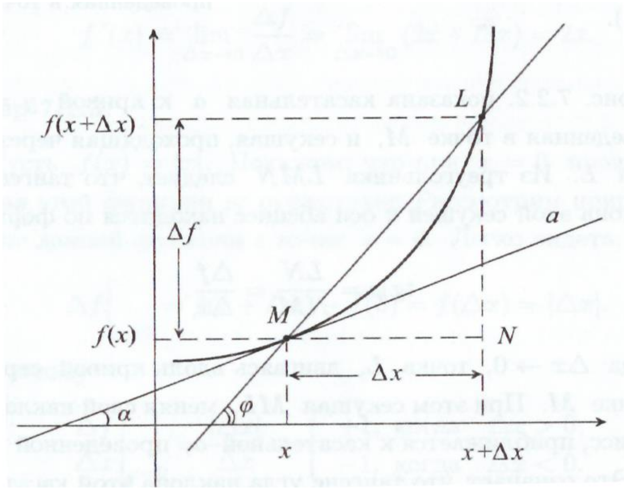



Рис. 1.3.2 Геометрический смысл производной

Когда $\Delta x \to 0$, точка $L$, двигаясь вдоль кривой, стремится к точке *M.* При этом секущая *ML,* изменяя свой наклон к оси абсцисс, приближается к касательной *a,* проведенной в точке *M*. Это означает, что тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс (угол наклона отсчитывается от положительной части оси абсцисс против часовой стрелки) находится по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Можно заметить, что в правой части выражения представлено определение производной. Таким образом, можно сделать вывод, что тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке с координатами $\big(x; f(x)\big)$, совпадает со значением производной данной функции в этой точке, то есть $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ [3].

Эта формула определяет геометрический смысл производной. Из данной формулы вытекает следующее: чем быстрее растут или убывают значения функции при изменении значений её аргумента, тем больше будет абсолютная величина тангенса угла наклона касательной. Таким образом, производная характеризует скорость изменения функции при изменении ее аргумента [7].

Касательную можно задать уравнением $y = kx + b$, где $k$ – угловой коэффициент, численно равный тангенсу угла между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой (рис. 1.3.3) [19].

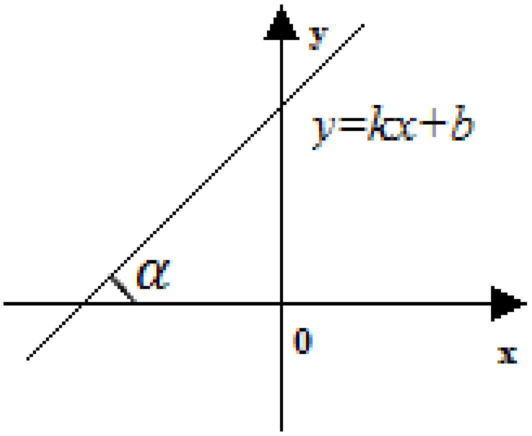



Рис. 1.3.3 График линейной функции $y = kx + b$

Следовательно, значение производной функции в точке касания численно равно угловому коэффициенту касательной:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k.$$

Можно вывести уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $A\ (x_0; f(x_0))$. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Для вычисления $b$ можно воспользоваться тем, что касательная проходит через точку $A$:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b,$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Значит, уравнение касательной имеет следующий вид:

$$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0),$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ [8].}$$

В одном из разделов физики (механике) широко используется понятие мгновенной скорости движущегося объекта. Это понятие вводится следующим образом: материальная точка движется с переменной скоростью $v(t)$ вдоль некоторой прямой и проходит за время $t$ путь $S(t)$.

Если текущему значению времени $t$ дать приращение $\Delta t$, то путь $S(t)$ также получит приращение, которое определяется по формуле

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Значение отношения приращения пути к приращению времени представляет собой среднюю скорость движения точки от момента времени $t$ до момента $t + \Delta t$. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ и называется мгновенной скоростью точки в момент времени $t$.

Применив определение производной, можно прийти к выводу, что мгновенная скорость точки в момент времени $t$ равна производной пути по времени, то есть

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Аналогичные рассуждения приводит к выводу, что ускорение является производной скорости по времени:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = (S'(t))'.$$

Другими словами: производная от координаты по времени есть скорость. В этом состоит механический смысл производной [7].

## 1.4 Основные теоремы дифференциального исчисления и правила дифференцирования

Для того, чтобы найти производную функции, необходимо рассмотреть ряд теорем дифференциального исчисления.

1) Теорема о связи между непрерывностью и дифференцируемостью функции:

Если функция $y = f(x)$ в точке $x$ имеет конечную производную, то в этой точке данная функция непрерывна.

Доказательство:

Рассмотрим тождество:

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x$$

и перейдём в нём к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = f'(x)\cdot 0 = 0.$$

Приращение функции $\Delta f$ в точке $x$ является бесконечно малой величиной при $\Delta x \to 0$.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$. Теорема доказана [7].

Из этой теоремы следует, что непрерывность функции является необходимым условием существования конечной производной этой функции, но достаточным это условие не является: непрерывность функции в некоторой точке не гарантирует ее дифференцируемость в этой точке. Примером может служить функция $f(x) = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но ее производная в этой точке не существует (пример 1.2.3).

2) Теорема о производной постоянной:

Если $f(x) = c$, где $c = const$, то $f'(x) \equiv 0$, то есть производная постоянной равна нулю.

Доказательство:

Пусть $f(x) = c$ для всех $x$ из области определения данной функции. Тогда и $f(x + \Delta x) = c$, значит $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$.

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0,$ при $\Delta x \neq 0, f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$ Теорема доказана [10] .

3) Теорема о производной суммы (разности) функций:

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x$, то в этой точке дифференцируема и их сумма (разность), причем производная находится по формуле:

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$$

Доказательство:

Пусть $f(x) = u(x) + v(x)$. Тогда

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Аналогично теорема доказывается, когда $f(x) = u(x) - v(x)$. Данная формула распространяется на любое конечное число слагаемых. Теорема доказана [10].

4) Теорема о производной произведения функций:

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x$, то в этой точке дифференцируема и их произведение, причем его производная находится по формуле:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Доказательство:

Пусть $f(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$$
$$= [u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)v(x) = v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v =$$

$$= v(x)u'(x) + u(x)v'(x) + u'(x)\cdot 0 = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Теорема доказана [7].

Следствие: постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$\big(cf(x)\big)' = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x), \text{если } c = const.$$

5) Теорема о производной отношения функций:

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x$ и $v(x) \neq 0$, то в этой точке дифференцируема и их отношение, причем его производная находится по формуле:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$= \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)[v(x)+\Delta v]}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема доказана [7].

6) Теорема о производной сложной функции:

Пусть заданы функции $y = f(z)$ и $z = g(x)$, причем функция $y = f(z)$ дифференцируема в точке $z$, а функция $z = g(x)$ дифференцируема в точке $x$. Тогда сложная функция $y = f\big(g(x)\big) = F(x)$ дифференцируема в точке $x$, причем её производная находится по формуле

$$F'(x) = f'(z)g'(x).$$

Эту формулу можно записать и в следующем виде:

$$y_x' = y_z' \cdot z_x'.$$

Здесь нижний индекс указывает, по какой переменной производится дифференцирование.

Доказательство:

По определению производной

$$f'(z) = y_z' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z},$$

$$g'(x) = z_x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

$$f'(z)g'(x) = y_z' \cdot z_x' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_x' = F'(x).$$

Теорема доказана [10].

7) Теорема о производной обратной функции:

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ являются взаимообратными: $g = f^{-1}$. Предположим, что $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$ и производная $f'(x) \neq 0$, а $x = g(y)$ дифференцируема в точке $y$ и производная $g'(y) \neq 0$. Тогда производные этих функций связаны соотношением

$$f'(x)g'(y) = 1.$$

Эту формулу можно записать в следующем виде:

$$y_x' \cdot x_y' = 1.$$

Здесь нижний индекс указывает, по какой переменной производится дифференцирование.

Доказательство:

По определению производной

$$f'(x) = y_x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \; g'(y) = x_y' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

$$f'(x)g'(y) = y_x' \cdot x_y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} 1 = 1.$$

Теорема доказана [10].

### 1.5 Производные элементарных функций

Если внимательно прочитать определение производной, можно заметить в нем алгоритм нахождения производной.

Алгоритм нахождения производной для функции $y = f(x)$:

1) Зафиксировать значение $x$, найти $f(x)$.

2) Дать аргументу $x$ приращение $\Delta x$, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.

3) Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

4) Составить отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

5) Вычислить предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Этот предел и есть производная [10].

В примерах 1.2.1-1.2.3, рассмотренных выше, для отыскания производной использовалось ее определение. Такой путь решения примеров иногда оказывается неэффективен. Гораздо проще сначала вывести формулы для производных элементарных функций, а затем решать примеры, используя эти формулы и основные теоремы о производных.

Теорема 1.5.1:

Производная функции $y = e^x$ находится по формуле $y' = e^x$.

Доказательство:

По определению производной

$$y'(x) = y'(e^x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Необходимо воспользоваться вторым замечательным пределом

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Пусть $\alpha = \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = e.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x} = 1.$$

$$y'(x) = e^{x}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^{x}\cdot 1 = e^{x}.$$

Теорема доказана [7].

Данная теорема указывает причину, по которой функция $y = e^{x}$ играет важную роль в математическом анализе. Единственной функцией, производная которой совпадает с ней самой $(y' = y)$, является функция $y = ce^{x}$, где $c$ – произвольная постоянная [13].

Теорема 1.5.2:

Производная функции $y = a^{x}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ находится по формуле $y' = a^{x}\ln a$.

Доказательство:

Согласно основному логарифмическому тождеству $a = e^{\ln a}$.

$$a^{x} = e^{\ln a^{x}} = e^{x\ln a}.$$

Выражение представляет собой сложную функцию. Ее производную можно найти, применив теорему о нахождении производной сложной функции:

$$(a^{x})' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}(x'\cdot\ln a + x\cdot(\ln a)').$$

Так как $\ln a = const$, то $(\ln a)' = 0$, и $x' = 1$; $e^{x\ln a} = a^{x}$:

$$(a^{x})' = e^{x\ln a}(1\cdot\ln a + x\cdot 0) = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^{x}\ln a\,.$$

Теорема доказана [1].

Теорема 1.5.3:

Производная функции $y = \log_{a} x$ находится по формуле

$$y' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Доказательство:

Функции $y = \log_{a} x$ и $x = a^{y}$ являются взаимообратными.

По теореме о производной обратной функции:

$$y_x' = (\log_a x)' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Теорема доказана [1].

Следствие: производная функции $y = \ln x$ находится по формуле

$$y' = \frac{1}{x},$$

поскольку натуральный логарифм $\ln x = \log_e x$, а $\ln e = 1$.

Теорема 1.5.4:

Производная функции $y = x^n$ находится по формуле $y' = nx^{n-1}$.

Доказательство:

$$(x^n)' = \left(e^{\ln x^n}\right)' = \left(e^{n \ln x}\right)' = e^{n \ln x}(n \ln x)' = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Данная формула верна для всех значений $x$ и $n$, при которых обе ее части определены.

Теорема доказана [1].

Следствие: производная функции $y = \sqrt{x}$ находится по формуле

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Доказательство:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Теорема 1.5.5:

Производная функции $y = \sin x$ находится по формуле $y' = \cos x$.

Доказательство:

Для доказательства необходимо использовать следующую тригонометрическую формулу:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Необходимо воспользоваться первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\,.$$

Теорема доказана [10].

Теорема 1.5.6:

Производная функции $y=\cos x$ находится по формуле $y'=-\sin x$.

Доказательство:

Необходимо использовать формулу приведения и предыдущую теорему:

$$(\cos x)'=[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)]'=[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)]\cdot(\frac{\pi}{2}-x)'=-\sin x\,.$$

Теорема доказана [10].

Теорема 1.5.7:

Производная функции $y=\operatorname{tg} x$ находится по формуле

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Доказательство:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема доказана [10].

Теорема 1.5.8:

Производная функции $y=\operatorname{ctg} x$ находится по формуле

$$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Доказательство:

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$$= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x\,(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Теорема доказана [10].

Теорема 1.5.9:

Производная функции $y = \arcsin x$ находится по формуле

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Доказательство:

Функции $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$ являются взаимообратными. По теореме о производной обратной функции:

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Перед корнем стоит положительный знак, поскольку значения функции $y = \arcsin x$ лежат в первой и четвёртой четвертях, а там функция $\cos y$ положительна.

Теорема доказана [10].

Теорема 1.5.10:

Производная функции $y = \arccos x$ находится по формуле

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Доказательство:

Функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ связаны соотношением

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, =>$$

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Теорема доказана [10].

Теорема 1.5.11:

Производная функции $y = \operatorname{arctg} x$ находится по формуле

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Доказательство:

Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$ являются взаимообратными. По теореме о производной обратной функции:

$$y'_x = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Теорема доказана [10].

Теорема 1.5.12:

Производная функции $y = \operatorname{arcctg} x$ находится по формуле

$$y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Доказательство:

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны соотношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Теорема доказана [10].

На основе доказанных теорем можно составить таблицу производных элементарных функций.

Таблица 1 Производные элементарных функций

| Функция $f(x)$ | Производная $f'(x)$ | Функция $f(x)$ | Производная $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $c = const$ | $0$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
| $x$ | $1$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $x^2$ | $2x$ | $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1 + x^2}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1 + x^2}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | | |

# ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

## 2.1 Основные приложения производной. Физический и геометрический смысл производной

В Единый государственный экзамен по математике (профильный и базовый уровень) включены задания, требующие применения физического (механического) и геометрического смысла производной, а также задания, в которых производная применяется для исследования функций.

Тематика экзаменационных задач традиционна, полностью соответствует школьным учебникам. Для того, чтобы успешно решать данные задания, необходимо систематизировать теоретические сведения и разработать определенный алгоритм решения.

Физический (механический) смысл производной: мгновенная скорость точки в момент времени $t$ равна производной пути по времени, то есть

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Ускорение является производной скорости по времени:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = \big(S'(t)\big)'[2].$$

Пример 2.1.1:

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 +$ $+7t - 4$ (где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 1$ с [11].

Решение:

Необходимо найти производную функции $x(t)$:

$$x'(t) = -2t + 7.$$

Производная пути по времени есть мгновенная скорость материальной точки:

$$v(t) = -2t + 7.$$

Значение скорости в момент времени $t = 1$ с:

$$v(1) = -2 \cdot 1 + 7 = 5.$$

Ответ: 5.

Алгоритм решения задач на нахождение скорости материальной точки *v* в определенный момент времени *t*:

1. Найти производную пути по времени.

2. Найти значение производной функции в точке *t*.

Пример 2.1.2:

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - -3t + 15$ (где *x* – расстояние от точки отсчета в метрах, *t* – время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна $v = 11$ м/с [18]?

Решение:

Необходимо найти производную функции *x(t)*:

$$x'(t) = 2t - 3.$$

Производная пути по времени есть мгновенная скорость материальной точки:

$$v(t) = 2t - 3.$$

Значение скорости равно 11 м/с. Чтобы найти время, необходимо решить уравнение:

$$11 = 2t - 3,$$

$$2t = 14,$$

$$t = 7.$$

Ответ: 7.

Алгоритм решения задач на нахождение времени *t*, при котором скорость материальной точки равна *v:*

1. Найти производную пути по времени.

2. Приравнять производную к значению мгновенной скорости *v*.

3. Найти значение *t*, решив полученное уравнение.

Геометрический смысл производной:

Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке с координатами $(x; f(x))$, совпадает со значением производной данной функции в этой точке, то есть $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Угол наклона отсчитывается от положительной части оси абсцисс против часовой стрелки [10].

Значение производной функции в точке касания численно равно угловому коэффициенту касательной:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k.$$

Угловой коэффициент касательной положителен, если прямая возрастает, и отрицателен, если прямая убывает.

Пример 2.1.3:

На рисунке 2.1.1 изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−9; 3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 19$ или совпадает с ней [18].

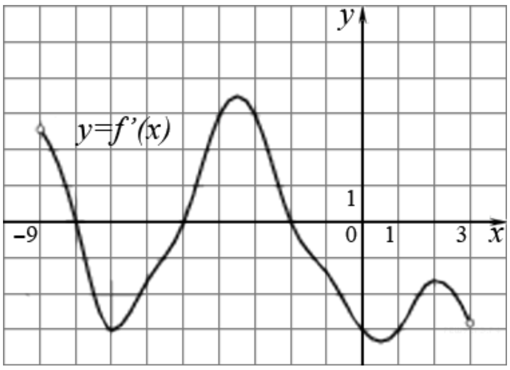



Рис. 2.1.1 Пример 2.1.3

Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Касательная параллельна прямой $y = 2x - 19$ или совпадает с ней, следовательно, их угловые коэффициенты равны 2.

Количество точек, в которых производная равна 2, соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой y = 2. На интервале (−9; 3) таких точек 3 (рис. 2.1.2).

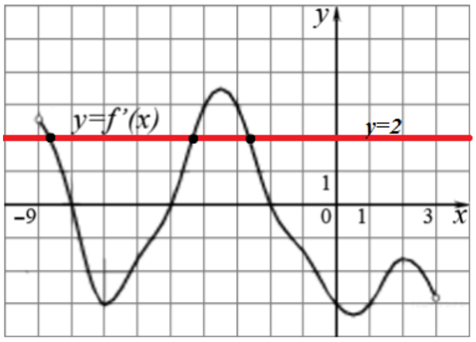



Рис. 2.1.2 Решение примера 2.1.3

Ответ: 3.

Пример 2.1.4:

На рисунке 2.1.3 изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней [17].

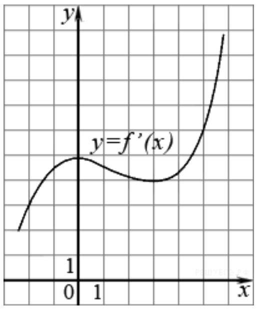



Рис. 2.1.3 Пример 2.1.4

Решение:

Так как касательная параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 6. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Осталось найти, в какой точке $x$ производная принимает значение 6: искомая точка $x = 5$ (рис. 2.1.4).

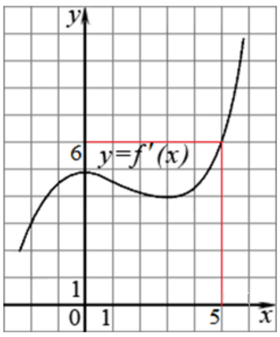



Рис. 2.1.4 Решение примера 2.1.4

Ответ: 5.

Алгоритм решения задач на нахождение точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельная данной прямой $y = kx + b$ или совпадает с ней, если дан график производной функции:

1. Так как значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, необходимо найти угловой коэффициент данной прямой $y$.

2. Если угловые коэффициенты прямых совпадают, данные прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы найти точки, требуемые в задачи, необходимо провести прямую $y = k$ и найти количество точек пересечения с графиком производной функции.

Пример 2.1.5:

На рисунке 2.1.5 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ [20].

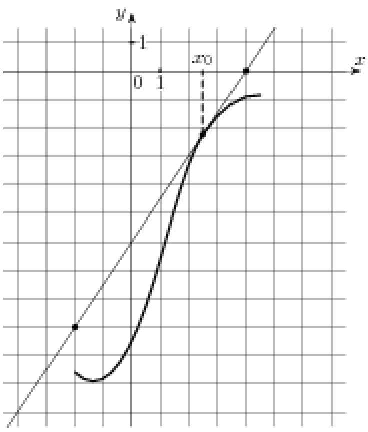



Рис. 2.1.5 Пример 2.1.5

Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

Необходимо построить прямоугольный треугольник (рис. 2.1.6) с вершинами $A(-2;-9)$, $B$ $(4;0)$, $C$ $(4;-9)$. Обычно 2 точки треугольника отмечены в задании.

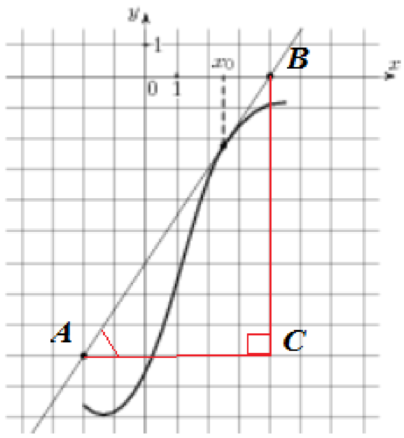



Рис. 2.1.6 Решение примера 1.2.5

Так угол  наклона отсчитывается от положительной части оси абсцисс против часовой стрелки, необходимо найти тангенс $\angle BAC,$ который равен отношению противолежащего катета $BC$ к противолежащему катету $AC$.

$$f'(x_0) = tg(\angle BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{9}{6} = 1{,}5.$$

Можно сделать проверку правильности знака у тангенса: так как касательная возрастает, то угловой коэффициент и, следовательно, тангенс будут положительными.

Ответ: 1,5.

Пример 2.1.6:

На рисунке 2.1.7 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ [20].

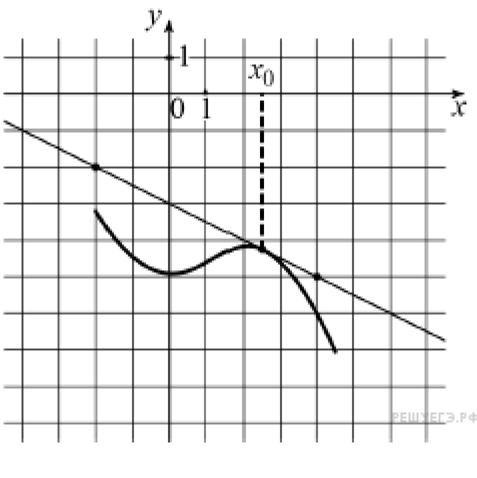



Рис. 2.1.7 Пример. 2.1.6

Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

Необходимо построить прямоугольный треугольник (рис. 2.1.8) с вершинами $A\ (-2;-2), B\ (4;-5), C\ (-2;-5)$.

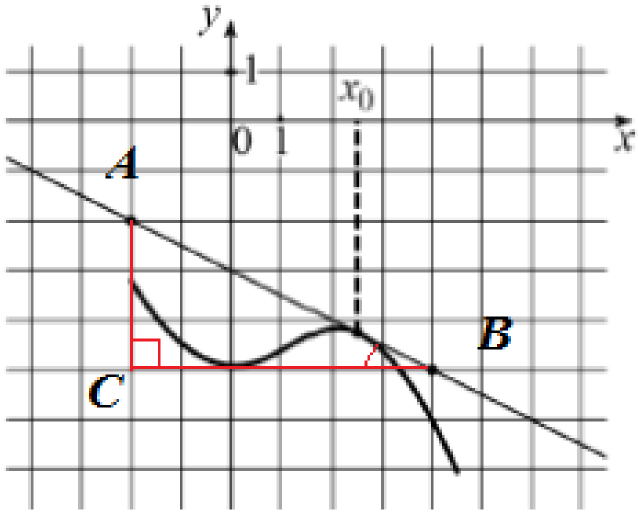



Рис. 2.1.8 Решение примера 2.1.6

Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом *ABC*.

$$f'(x_0) = tg(180° - \angle ABC) = -tg(\angle ABC) = -\frac{AC}{BC} = -\frac{3}{6} = -0{,}5.$$

Можно сделать проверку правильности знака у тангенса: так как касательная убывает, то угловой коэффициент и, следовательно, тангенс будут отрицательными.

Ответ: $-0{,}5$.

Пример 2.1.7:

На рисунке 2.1.9 изображены графики функций и касательные, проведённые к ним в точках с абсциссой $x_0$. Установите соответствие между графиками функций и значениями производной этих функций в точке $x_0$ [21].

Значения производной:

1. $\frac{2}{3}$ 2. 5 3. – 4 4. – 0,6

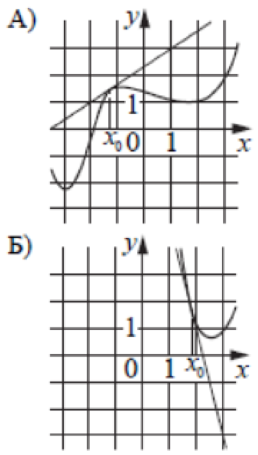



Рис. 2.1.9 Пример 2.1.7

Решение:

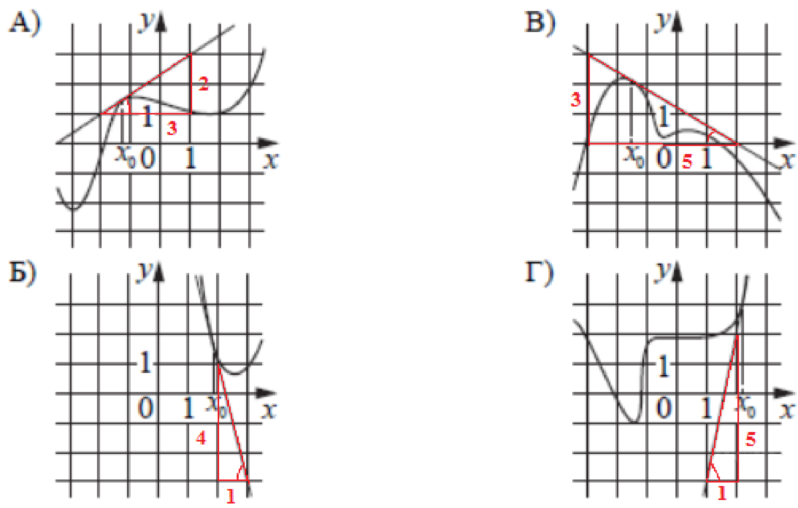



Рис. 2.1.10 Решение примера 2.1.7

$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

А) $tg\alpha = \frac{2}{3}$ (1)

В) $tg\alpha = -\frac{3}{5} = -0{,}6$ (4)

Б) $tg\alpha = -\frac{4}{1} = -4$ (3)

Г) $tg\alpha = \frac{5}{1} = 5$ (2)

Ответ: 1342

Данное задание встречается в базовом уровне ЕГЭ по математике.

Алгоритм решения задач на нахождение производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$:

1. Построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого принадлежит касательной к графику функции.

2. Найти тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс:

- он будет равен тангенсу острого угла треугольника, если касательная возрастает;
- он будет равен тангенсу угла, смежного с острым углом треугольника, если касательная убывает.

3. Значение производной функции в точке касания будет равна найденному тангенсу.

Пример 2.1.8:

Прямая $y = 7x - 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания [18].

Решение:

Если прямая $y = 7x - 8$ параллельна касательной, то их угловые коэффициенты равны 7.

Значение производной функции $y = x^2 + 6x - 8$ в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, то есть 7.

Производная функции $y = x^2 + 6x - 8$ равна:

$$y' = 2x + 6,$$

$$y'(x_0) = 2x_0 + 6 = 7.$$

Чтобы найти абсциссу точки касания, нужно решить уравнение

$$2x_0 + 6 = 7,$$

$$2x_0 = 1,$$

$$x_0 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 2.1.9:

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $3x^2 - -3x + c$. Найдите $c$ [18].

Решение:

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, можно восстановить функцию:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 6, \\ 3x^2 - 6x - 4 + c = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ 3 - 6 - 4 + c = 0. \end{cases}$$

$$c = 7.$$

Ответ: 7.

Алгоритм решения задач на восстановление исходной функции $y = f(x)$ при заданной касательной $y = kx + b$:

1. Необходимо воспользоваться условием касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

2. Решив систему уравнений, найти неизвестный коэффициент исходной функции $y = f(x)$.

## 2.2 Исследование функции на монотонность

Основной корпус заданий в Едином государственном экзамене по математике представляет собой несложные задачи на определение поведения функции или ее производной по графику этой функции или ее производной. Важно внимательно следить за тем, график какой функции дан и про какую функцию поставлен вопрос задачи. Типичные ошибки решающих состоят в том, что, анализируя график производной, они путают его с графиком самой функции.

Одним из важнейших приложений производной является ее применение к исследованию поведения функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области *X*. Если в этой области большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть при $x_2 > x_1$ значение $f(x_2) > f(x_1)$, то $f(x)$ называется возрастающей функцией в области *X*. Если же большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть при $x_2 > x_1$ значение $f(x_2) < f(x_1)$, то $f(x)$ называется убывающей функцией в этой области (рис. 2.2.1) [19].

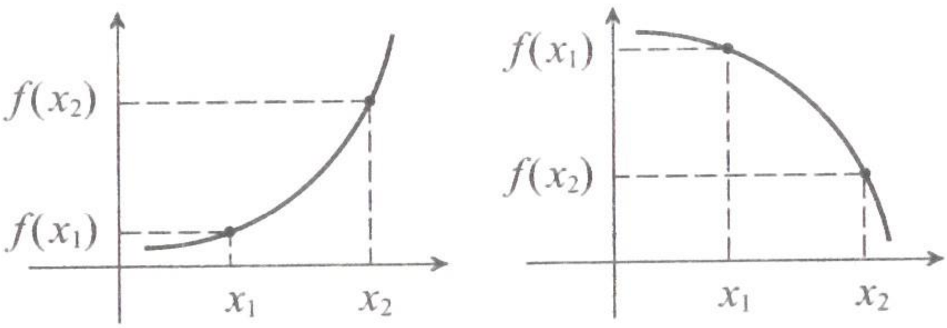



Рис. 2.2.1 Возрастающая (слева) и убывающая (справа) функции

Функция $f(x)$ называется монотонной в области $X$, если она в этой области является либо возрастающей, либо убывающей [19].

Для того, чтобы применить производную к исследованию функции на монотонность, нужно рассмотреть четыре теоремы, показывающие связь поведения дифференцируемой функции $f(x)$ со знаком ее производной.

Необходимое условие возрастания:

Если дифференцируемая функция $f(x)$возрастает в интервале $(a; b)$, то ее производная $f'(x) \geq 0$ в этом интервале.

Достаточное условие возрастания:

Пусть функция $f(x)$ является дифференцируемой в интервале $(a; b)$ и её производная $f'(x) > 0$ в этом интервале. Тогда функция $f(x)$ возрастает в интервале $(a, b)$ [7].

Необходимое условие убывания:

Если дифференцируемая функция $f(x)$ убывает в интервале $(a; b)$, то ее производная $f'(x) \leq 0$ в этом интервале.

Достаточное условие убывания:

Пусть функция $f(x)$ является дифференцируемой в интервале $(a; b)$ и её производная $f'(x) < 0$ в этом интервале. Тогда функция $f(x)$ убывает в интервале $(a, b)$ [7].

Пример 2.2.1:

Функция $f(x) = x$ возрастает при любом $x$, поскольку ее производная $f'(x) = 1$ положительная при любом $x$. График этой функции – прямая [5].

Пример 2.2.2:

Функция $f(x) = x^2$ возрастает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$, так как ее производная $f'(x) = 2x$. В точке $x = 0$ эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей. График этой функции – парабола [5].

Пример 2.2.3:

На рисунке 2.2.2 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;\, 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна [18].

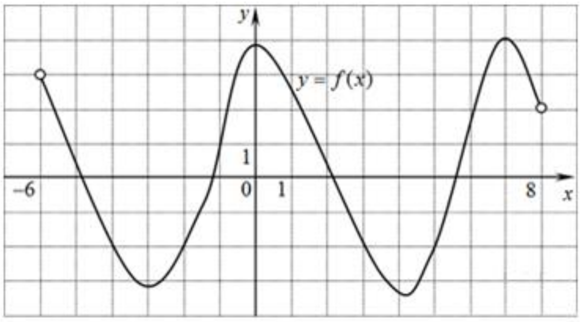



Рис. 2.2.2 Пример 2.2.3

Решение:

Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает. Данные интервалы отмечены на рисунке 2.2.3.

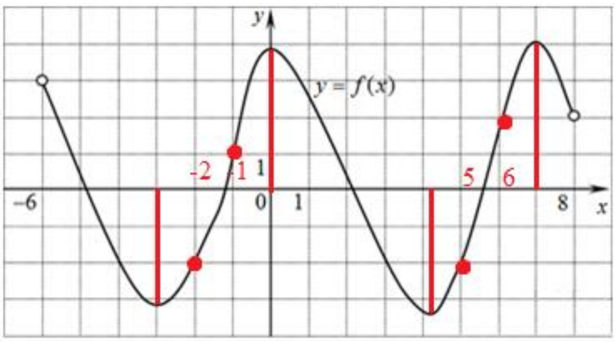



Рис. 2.2.3 Решение примера 2.2.3

В этих интервалах содержатся целые точки -2; -1; 5; 6. Их количество равно 4.

Ответ: 4.

Пример 2.2.4:

На рисунке 2.2.4 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна [18].

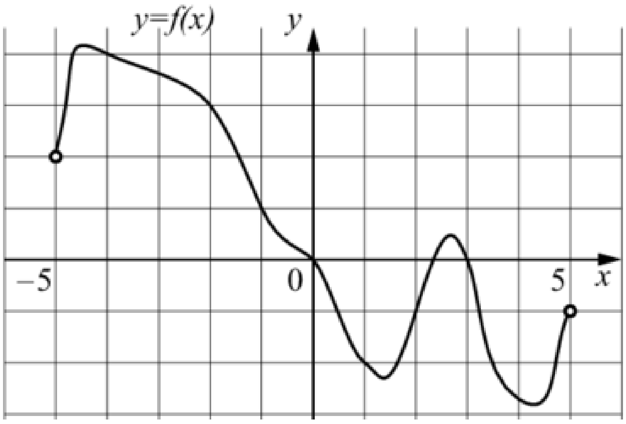



Рис. 2.2.4 Пример 2.2.4

Решение:

Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает. Данные интервалы отмечены на рисунке 2.2.5.

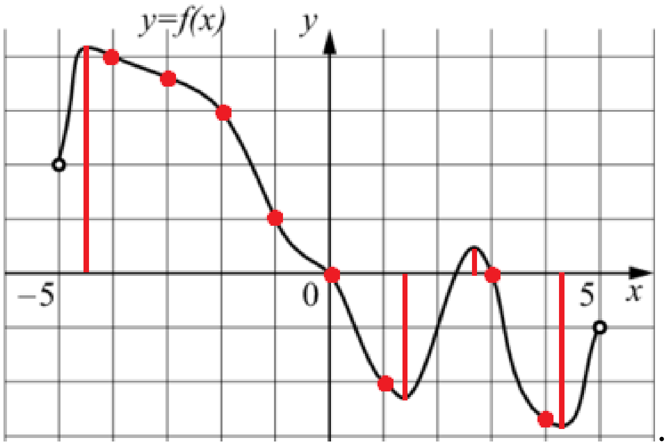



Рис. 2.2.5 Решение примера 2.2.4

В этих интервалах содержатся целые точки -4; -3; -2; -1; 0; 1; 3; 4. Их количество равно 8.

Ответ: 8.

Пример 2.2.5:

На рисунке 2.2.6 изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;\ 4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки [17].

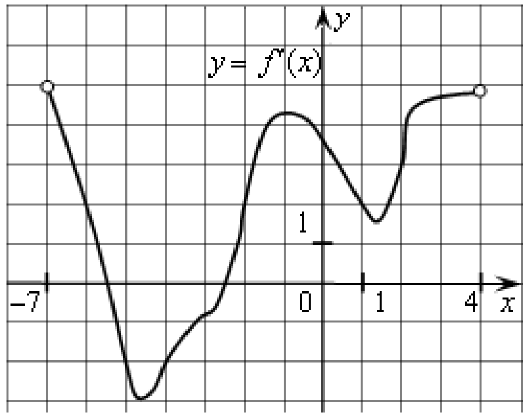



Рис. 2.2.6 Пример 2.2.5

Решение:

Промежутки возрастания данной функции соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам, показанным на рисунке 2.2.7.

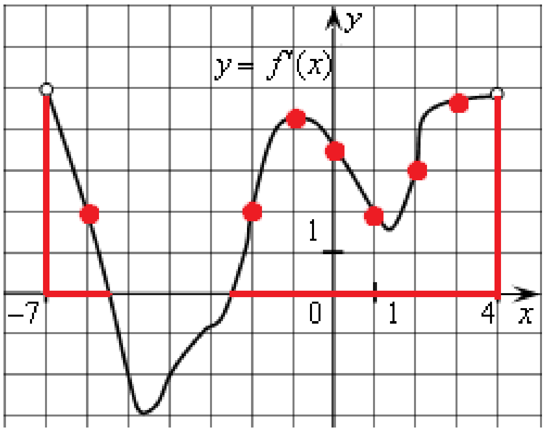



Рис. 2.2.7 Решение примера 2.2.5

Данные промежутки содержат целые точки -6; -2; -1; 0; 1; 2; 3.

Их сумма равна $S = -6 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = -3$.

Ответ: $-3$.

Пример 2.2.6:

На рисунке 2.2.8 изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки [17].

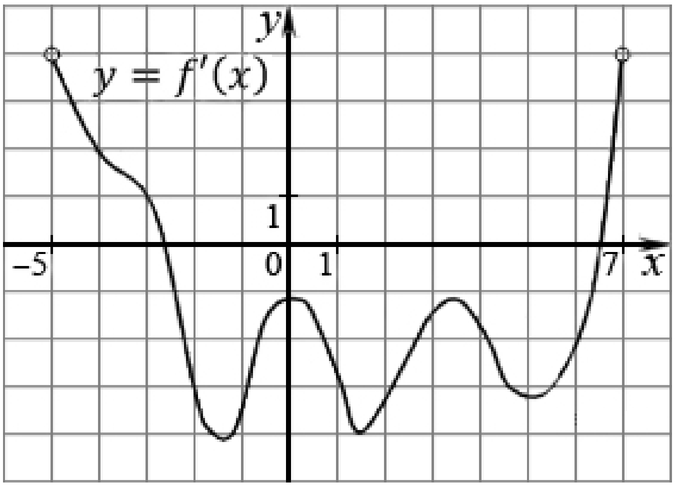
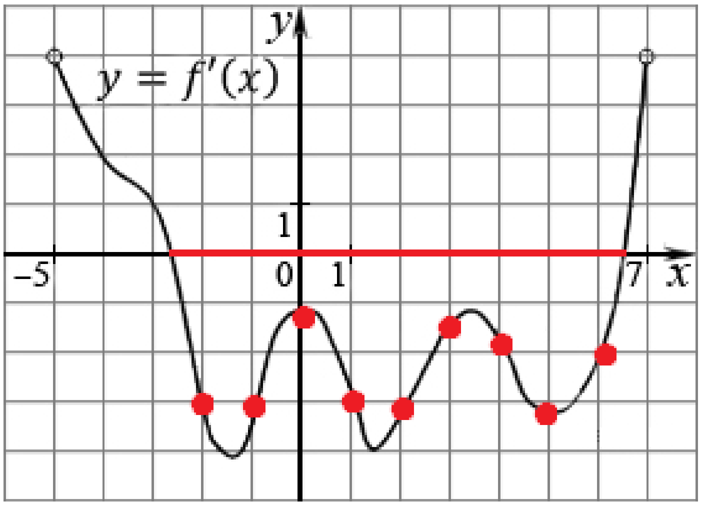



Рис. 2.2.8 Пример 2.2.6

Решение:

Промежутки убывания функции соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть промежуткам, показанным на рисунке 2.2.9.




.

Рис. 2.2.9 Решение примера 2.2.6

Данные промежутки содержат целые точки -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Их сумма равна $S = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 18$.

Ответ: 18.

Пример 2.2.7:

На рисунке 2.2.10 изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;\ 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них [18].

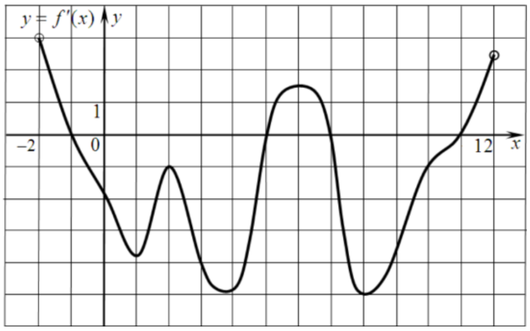



Рис. 2.2.10 Пример 2.2.7

Решение:

Промежутки убывания функции соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть промежуткам, показанным на рисунке 2.2.11.

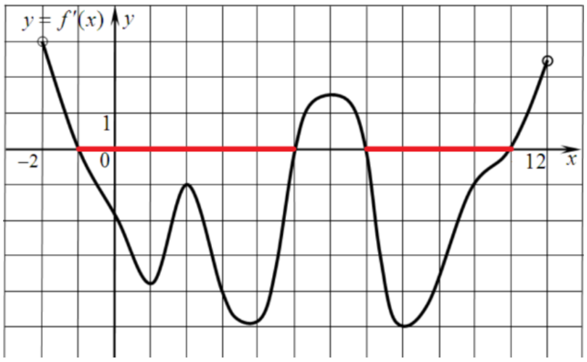



Рис. 2.2.11 Решение примера 2.2.7

Функция убывает на интервалах (-1;5) и (7;11). Длина первого из них равна 6, второго – 4.

Ответ: 6.

Пример 2.2.8:

На рисунке 2.2.12 изображён график производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1$, $x_2$, … , $x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$ [18]?

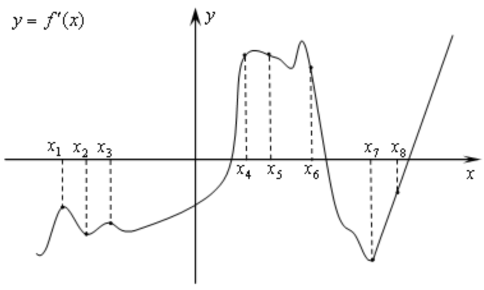



Рис. 2.2.12 Пример 2.2.8

Решение:

Промежутки возрастания данной функции соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам, показанным на рисунке 2.2.13.

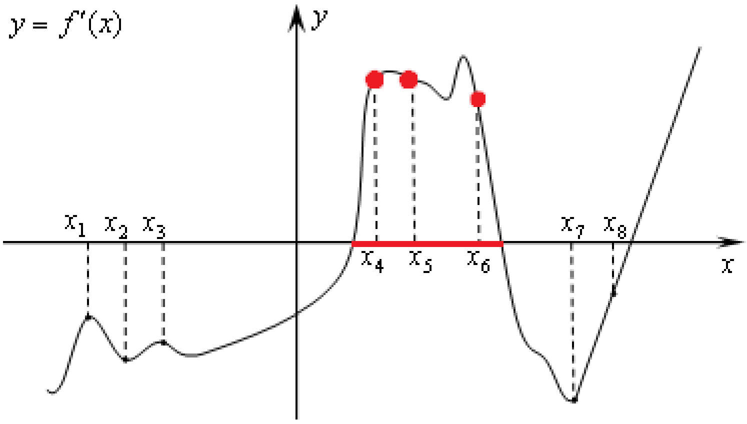



Рис. 2.2.13 Решение примера 2.2.8

Производная положительна в точках: $x_4$, $x_5$ , $x_6$. Всего их 3.

Ответ: 3.

Пример 2.2.9:

На рисунке 2.2.14 изображён график функции $y = f(x)$. Точки $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ задают на оси $O_x$ интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной [21].

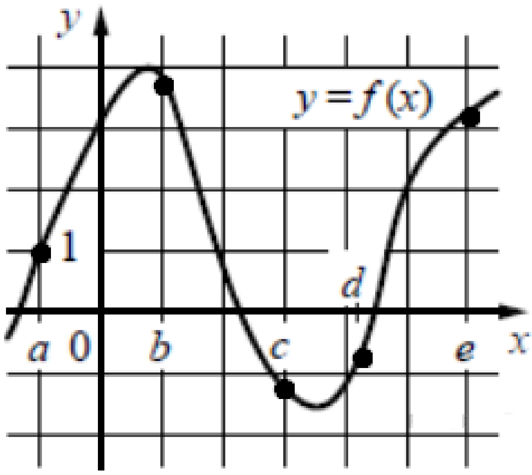



Рис. 2.2.14 Пример 2.2.9

Интервалы:

А) $(a;b)$ Б) $(b;c)$ В) $(c;d)$ Г) $(d;e)$

Характеристики:

1) Значения функции положительны в каждой точке интервала.

2) Значения производной функции положительны в каждой точке интервала.

3) Значения функции отрицательны в каждой точке интервала.

4) Значения производной функции отрицательны в каждой точке интервала.

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам.

Решение:

А) На интервале $(a;b)$ функция положительна (1).

Б) На интервале $(b;c)$ функция убывает, следовательно, производная отрицательна на этом промежутке (4).

В) На интервале $(c;d)$ функция отрицательна (3).

Г) На интервале $(d;e)$функция возрастает, следовательно, производная положительна на этом промежутке (2).

Ответ: 1432

Данное задание встречается в базовом уровне ЕГЭ по математике.

Алгоритм решения задач на исследование монотонности функции:

1. Внимательно прочитать задание и определить, какой график изображен на рисунке – график функции или график производной.

2. Если дан график функции, необходимо пользоваться следующими теоремами:

- Если функция $f(x)$ возрастает, то ее производная $f'(x) \geq 0$.
- Если функция $f(x)$ убывает, то ее производная $f'(x) \leq 0$.

3. Если дан график производной функции, необходимо пользоваться следующими теоремами:

- Если производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает.
- Если производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает.

### 2.3 Исследование функции на экстремумы

Точка $x_0$ называется точкой экстремума функции $f(x)$, если она является точкой максимума или минимума.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка $x_0$ является точкой максимума функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка $x_0$ является точкой минимума функции $f(x)$ [8].

Точка $x_0$ называется критической точкой функции $f(x)$, если в ней производная $f'(x) = 0$ или не существует [10].

Необходимое условие существования экстремума:

Если точка $x_0$ является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$, то есть данная точка является критической [2].

Достаточное условие существования экстремума:

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением, быть может, самой точки $x_0$, и непрерывна в точке $x_0$. Если при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак, то в данной точке функция имеет экстремум. При этом возможны следующие два случая:

1) Если с ростом значений аргумента $x$ производная меняет знак с плюса на минус, то в точке $x_0$ функция имеет максимум.

2) Если с ростом значений аргумента $x$ производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке $x_0$ функция имеет минимум [2].

Пример 2.3.1:

На рисунке 2.3.1 изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;\ 5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$[18].

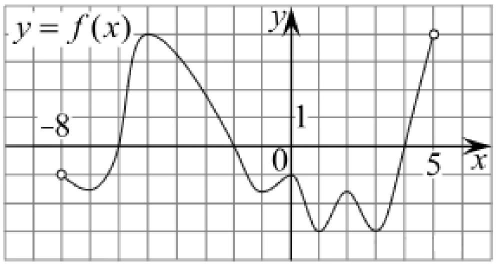



Рис. 2.3.1 Пример 2.3.1

Решение:

Проходя через точку экстремума, производная функции меняет свой знак на противоположный, то есть промежуток возрастания функции меняется на промежуток убывания (или наоборот).

На рисунке 2.3.2 отмечены данные точки:

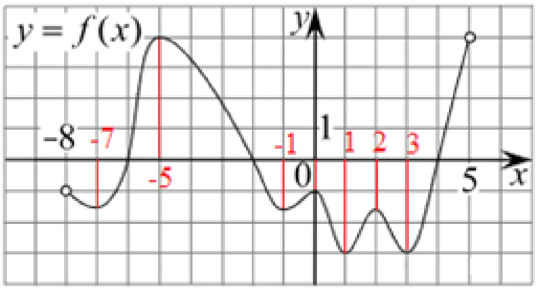



Рис. 2.3.2 Решение примера 2.3.1

Сумма данных точке равна:

$$S = -7 - 5 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 2.3.2:

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;\ 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 1]$ [18].

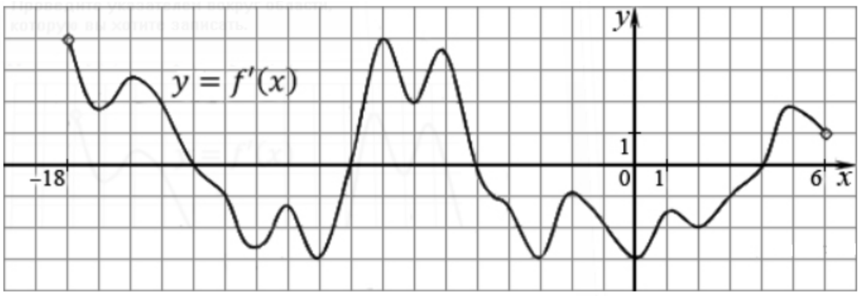



Рис. 2.3.3 Пример 2.3.2

Решение:

На отрезке $[-13; 1]$ производная дважды меняет свой знак (рис. 2.3.4).

В точке -5 с плюса на минус, следовательно, это точка максимума, в точке -9 с минуса на плюс, следовательно, это точка минимума.

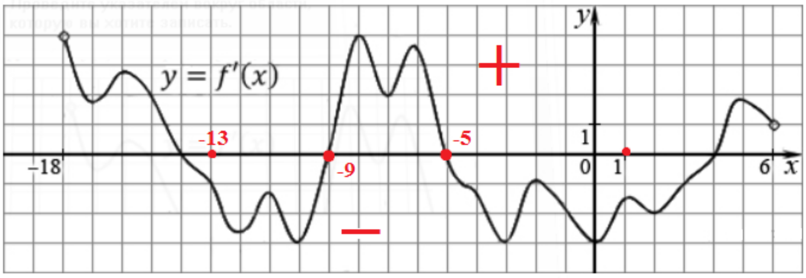



Рис. 2.3.4 Решение примера 2.3.2

Таким образом, на отрезке $[-13; 1]$ имеется 1 точка минимума.

Ответ: 1.

Пример 2.3.3:

На рисунке 2.3.5 изображён график функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0 [17].

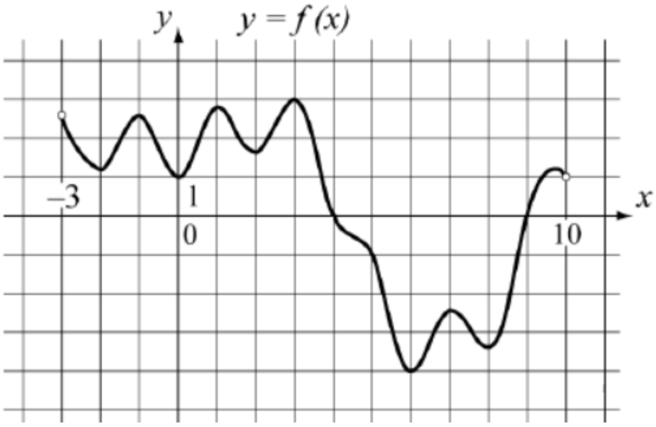



Рис. 2.3.5 Пример 2.3.3

Решение:

Значение производной функции равно 0 в точках экстремума. В точках экстремума производная функции меняет свой знак, следовательно, меняется промежуток монотонности функции: промежуток возрастания – на промежуток убывания и наоборот.

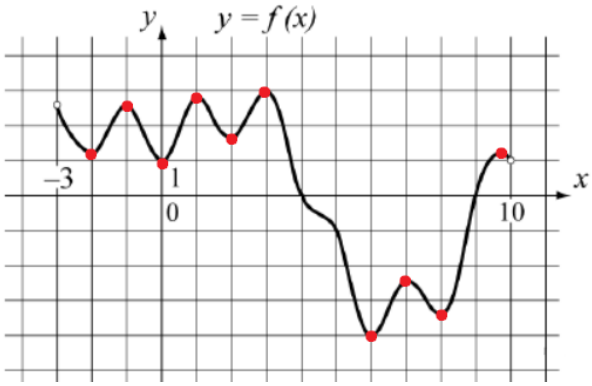



Рис. 2.3.6 Пример 2.3.3

Количество таких точек равно 10 (рис. 2.3.6).

Ответ: 10.

Алгоритм решения графических задач на нахождение экстремумов:

1) Если дан график функции, необходимо найти точки, в которых функция меняет свой промежуток монотонности:

- если функция возрастала, но пройдя через точку, начала убывать, данная точка является точкой максимума;
- если функция убывала, но пройдя через точку, начала возрастать, данная точка является точкой минимума.

2) Если дан график производной функции, необходимо найти точки, в которых значение производной равно 0:

- если производная меняет знак с плюса на минус, данная точка является точкой максимума;
- если производная меняет знак с минуса на плюс, данная точка является точкой минимума.

Пример 2.3.4:

Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$ [11].

Решение:

Необходимо:

1) найти производную функции:

$$y' = 18x - 3x^2.$$

2) приравнять производную к 0 и найти критические точки, то есть точки, в которых значение производной равняется 0:

$$18x - 3x^2 = 0,$$

$$3x(18 - 3x) = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } x = 6.$$

3) исследовать знак производной справа и слева от каждой критической точки, подставляя значения из интервалов в производную функции (рис. 2.3.7) :

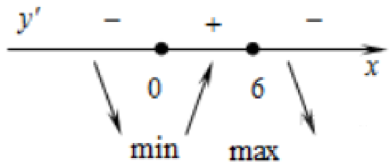



Рис. 2.3.7 Решение примера 2.3.4

Проходя через точку 6, производная меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, это точка является точкой максимума.

Ответ: 6.

Пример 2.3.5:

Найдите точку минимума функции $y = (x + 16)e^{x-16}$ [12].

Решение:

1) Для нахождения производной нужно воспользоваться теоремой о производной произведения функций и теоремой о производной сложной функции:

$$y' = (x + 16)'e^{x-16} + (x + 16)(e^{x-16})' =$$

$$= e^{x-16} + (x + 16)e^{x-16}(x - 16) =$$

$$= e^{x-16} + (x + 16)e^{x-16} = e^{x-16}(1 + x + 16) = (x + 17)e^{x-16}.$$

2) Необходимо найти критические точки:

$$(x + 17)e^{x-16} = 0,$$

$$x = -17.$$

3) Знак производной слева и справа от критической точки (рис. 2.3.8):

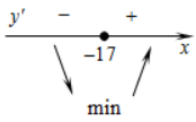



Рис. 2.3.8 Решение примера 2.3.5

Так как производная меняет свой знак с минуса на плюс, то точка $-17$ является точкой минимума.

Ответ: $-17$.

Пример 2.3.6:

Найдите точку максимума функции $y = \frac{16}{x} + x + 3$ [18].

Решение:

1) $y' = -\frac{16}{x^2} + 1$

2) Производной не существует в точке $x = 0$.

$$-\frac{16}{x^2} + 1 = 0,$$

$$x = \pm 4.$$

3) Поведение производной:

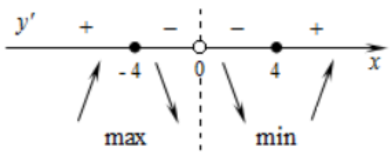



Рис. 2.3.9 Решение примера 2.3.6

Так как производная, проходя через точку – 4, меняет свой знак с плюса на минус, то точка данная точка является точкой максимума.

Ответ: $-4$.

Пример 2.3.7:

Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+3) + 7$.

Решение:

1) $y' = 2 - \frac{1}{x+3}$

2) Производной не существует в точке $x = -3$.

$$2 - \frac{1}{x+3} = 0,$$

$$x = -2{,}5.$$

3) Поведение производной:

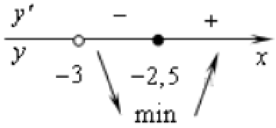



Рис. 2.3.10 Решение примера 2.3.7

Искомая точка минимума $-2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$.

Пример 2.3.8:

Найдите точку максимума функции $y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ [11].

Решение:

1) $y' = 2\cos x - (2x - 3)\sin x - 2\cos x = (3 - 2x)\sin x$

2) $(3 - 2x)\sin x = 0$

На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ синус не равен 0, следовательно, $3 - 2x = 0$,

$$x = 1{,}5.$$

3) Поведение производной функции:

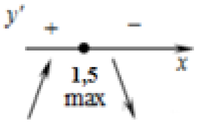



Рис. 2.3.11 Решение примера 2.3.8

Ответ: 1,5.

Алгоритм нахождения экстремума функции $f(x)$:

1) Найти производную $f'(x)$.

2) Найти критические точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

3) Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки. Если смены знака производной нет, то нет и экстремума. Если же производная меняет знак при переходе через критическую точку, то экстремум имеется:

- если производная меняет знак с плюса на минус, данная точка является точкой максимума;
- если производная меняет знак с минуса на плюс, данная точка является точкой минимума.

В Едином Государственном Экзамене присутствуют задания, для выполнения которых производную функции находить не обязательно.

Пример 2.3.9:

Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$ [18].

Решение:

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ принимает минимальное значение в точке

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

В данном случае: $x_0 = 3$.

Так как функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на области своих допустимых значений, а исходная функция определена при найденном $x_0$, то она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 3.

Пример 2.3.10:

Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$ [13].

Решение:

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ при $a < 0$ принимает максимальное значение в точке

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

В данном случае: $x_0 = 1$.

Поскольку функция $y = \log_2 x$ возрастающая и исходная функция определена в точке 1, она также достигает максимума в этой точке [13].

Ответ: 1.

## 2.4 Наибольшее и наименьшее значение функции

Для непрерывной функции $f(x)$ справедливы следующие утверждения:

1) Если непрерывная функция $y = f(x)$ задана на замкнутом промежутке $[a; b]$, то она обязательно достигает как своего наименьшего, так и своего наибольшего значений, причем происходит это либо в точке экстремума, либо на конце промежутка.

2) Если же функция задана на открытом промежутке $(a; b)$, то она может достигать, а может и не достигать своего наименьшего и своего наибольшего значений [7].

Пример 2.4.1:

На рисунке 2.4.1 изображен график производной функции $y = f(x)$. При каком значении $x$ эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке $[-4; -2]$ [18].

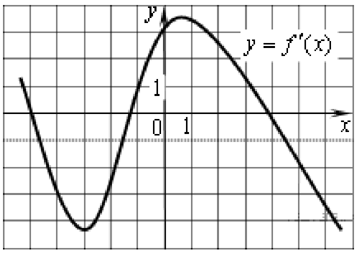



Рис. 2.4.1 Пример 2.4.1

Решение:

На отрезке $[-4; -2]$ производная функции отрицательна, следовательно, функция убывает на этом отрезке (рис. 2.4.2).

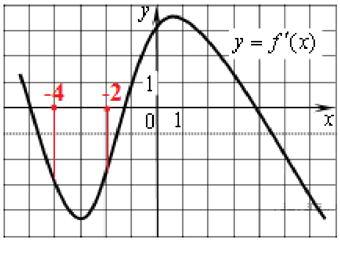



Рис. 2.4.2 Решение примера 2.4.1

Наибольшего значения функция достигает в левой границе отрезка, т. е. в точке $-4$.

Ответ: $-4$.

Пример 2.4.2:

На рисунке 2.4.3 изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;\ 6)$. В какой точке отрезка $[-2;\ 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение [18]?

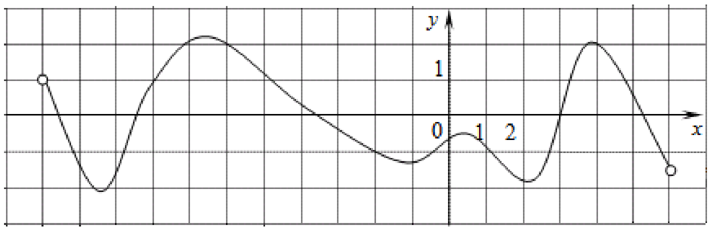



Рис. 2.4.3 Пример 2.4.2

Решение:

На отрезке $[-2;\ 4]$ график производной пересекает ось абсцисс в точке. В этой точке производная меняет знак с минуса на плюс (рис. 2.4.4).

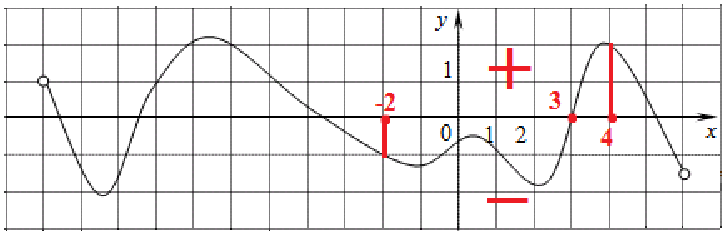



Рис. 2.4.4 Решение примера

Следовательно, точка 3 - точка минимума, и на отрезке [–2; 4] в ней функция достигает наименьшего значения.

Ответ: 3

Алгоритм нахождения наибольшего/наименьшего значения функции на отрезке по графику производной:

1) Необходимо проанализировать поведение производной на отрезке.

2) Если на отрезке есть экстремум, то есть производная пересекает ось абсцисс и при этом меняет свой знак, то наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума, а наименьшее – в точке минимума.

3) Если на отрезке нет экстремума:

- и производная отрицательна на отрезке, функция на данном отрезке убывает. Следовательно, наибольшее значение она принимает в левой точке отрезка, наименьшее – в правой.

- и производная положительна на отрезке, функция на данном отрезке возрастает. Следовательно, наибольшее значение она принимает в правой точке отрезка, наименьшее – в левой.

Пример 2.4.3:

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x \cdot \sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$ [18].

Решение:

Необходимо

1) Найти производную функции:

$$y' = \left(\frac{2}{3}x \cdot \sqrt{x} - 3x + 1\right)' = \left(\frac{2}{3}x \cdot x^{0,5} - 3x + 1\right)' =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{1,5} - 3x + 1\right)' = \frac{2}{3} \cdot 1{,}5x^{0,5} - 3 = \sqrt{x} - 3.$$

2) Найти критические точки:

$$\sqrt{x} - 3 = 0,$$

$$x = 9.$$

3) Вычислить значение функции в критической точке, если она принадлежит отрезку, и на концах отрезках:

$$y(1) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - 3 \cdot 1 + 1 = -\frac{4}{3};$$

$$y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - 3 \cdot 9 + 1 = -8.$$

Можно было проанализировать поведение производной (рис 2.4.5):

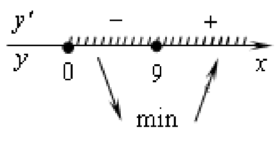



Рис. 2.4.5 Решение примера 2.4.3

Так как на отрезке $[1; 9]$ производная отрицательна, то функция убывает и достигает наименьшего значения в точке минимума, то есть в точке 9. Значение функции $y(9) = -8$.

Ответ: $-8$.

Пример 2.4.4:

Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10;-1] [18].

Решение:

1) $y'=\frac{2x\cdot x-(x^2+25)}{x^2}=\frac{x^2-25}{x^2}$.

2) $y'=0$,

$$\frac{x^2-25}{x^2}=0,$$

$$x=\pm 5.$$

3) Отрезку принадлежит только точка $-5$.

$$y(-10)=\frac{(-10)^2+25}{-10}=-12{,}5;$$

$$y(-5)=\frac{(-5)^2+25}{-5}=-10;$$

$$y(-1)=\frac{(-1)^2+25}{-1}=-26.$$

Таким образом, наибольшее значение функции равно $-10$.

Ответ: $-10$.

Пример 2.4.5:

Найдите наименьшее значение функции $y=(8-x)e^{9-x}$ на отрезке $[3;10]$ [12].

Решение:

1) $y'=-e^{9-x}+(8-x)\cdot e^{9-x}\cdot(9-x)'=-e^{9-x}(9-x)$.

2) $y'=0$,

$$-e^{9-x}(9-x)=0,$$

$$x=9.$$

3) Точка 9 принадлежит отрезку $[3;10]$:

$$y(3)=(8-3)e^{9-3}=5e^6;$$

$$y(9)=(8-9)e^{9-9}=-e^0=-1;$$

$$y(10) = (8-10)e^{9-10} = -2e^{-1} = \frac{-2}{e} \approx -\frac{2}{2,7} > -1$$

Таким образом, наименьшее значение функции равно $-1$.

Ответ: $-1$.

Пример 2.4.6:

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4,5;\ 0]$ [12].

Решение:

1) $y' = (\ln(x+5)^5 - 5x)' = (5\ln(x+5) - 5x)' = \frac{5}{x+5} - 5$.

2) $y' = 0$,

$$\frac{5}{x+5} - 5 = 0,$$

$$x + 5 = 1,$$

$$x = -4.$$

3) Точка $-4$ принадлежит отрезку $[-4,5;\ 0]$:

$$y(-4,5) = \ln(-4,5+5)^5 - 5\cdot(-4,5) = 5\ln 0,5 + 22;$$

$$y(-4) = \ln(-4+5)^5 - 5\cdot(-4) = 5\ln 1 + 20 = 20;$$

$$y(0) = \ln(0+5)^5 - 5\cdot 0 = \ln 5^5 = 5\ln 5.$$

В данном примере неудобно сравнивать получившиеся числа, поэтому необходимо проанализировать поведение производной на этом промежутке (рис. 2.4.6).

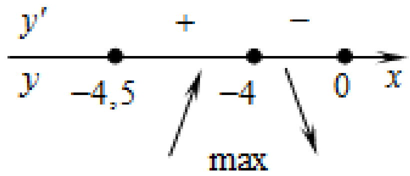



Рис. 2.4.6 Решение примера 2.4.6

Точка $x = -4$ – точка максимума, следовательно, функция принимает в этой точке наибольшее значение:

$$y(-4) = 20.$$

Ответ: 20.

Пример 2.4.7:

Найдите наибольшее значение функции $y = 7\cos x + 16x - 2$ на отрезке $[-\pi; 0]$ [11].

Решение:

1) $y' = -7\sin x + 16$.

2) $y' = 0$,

$$-7\sin x + 16 = 0,$$

$$\sin x = \frac{16}{7} > 1.$$

Данное уравнение не имеет корней, следовательно, функция не имеет экстремумов.

3) Необходимо вычислить значение функции на концах отрезка:

$$y(-\pi) = 7\cos(-\pi) + 16 \cdot (-\pi) - 2 = -16\pi - 9;$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16 \cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5.$$

Ответ: 5.

Для решения некоторых финансовых задач (задание № 17, профильный уровень ЕГЭ по математике) требуется находить наибольшее/наименьшее значение функции.

Пример 2.4.8:

Вадим владеет двумя заводами в разных городах. На заводах производят абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно $t^2$ часов в неделю, то за эту неделю они производят $t$ единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах [18]?

Решение:

Пусть на заводе в первом городе рабочие трудятся $x^2$ часов, а во втором городе – $y^2$ часов. Тогда в неделю будет произведено $x + y$ единиц товара, а на оплату труда будет выделено:

$$200x^2 + 300y^2 = 1200000.$$

Необходимо выразить одну переменную через другую:

$$y^2 = \frac{1200000 - 200x^2}{300},$$

$$y^2 = 4000 - \frac{2}{3}x^2,$$

$$y = \sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}.$$

Выражение $4000 - \frac{2}{3}x^2 \geq 0$, следовательно, $x \in \left[0; 20\sqrt{15}\right]$, так как отрицательные значения переменная $x$ принимать не может.

Нужно найти наибольшее значение функции

$$Q(x) = x + y = x + \sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}.$$

Для этого необходимо найти производную и критические точки данной функции:

$$Q'(x) = \left(x + \left(4000 - \frac{2}{3}x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = 1 + \frac{1}{2}\left(4000 - \frac{2}{3}x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(4000 - \frac{2}{3}x^2\right)' =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 2x\right) = 1 - \frac{2x}{3\sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}}.$$

$$Q'(x) = 0,$$

$$3\sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2} = 2x,$$

$$9\left(4000 - \frac{2}{3}x^2\right) = 4x^2,$$

$$x^2 = 3600 => x = \pm 60.$$

Только точка $x = 60$ принадлежит отрезку $\left[0; 20\sqrt{15}\right]$. Нужно найти значения функции $Q(x)$ в этой точке и на концах данного отрезка:

$$Q(0) = 0 + \sqrt{4000 - \frac{2}{3} \cdot 0} = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10};$$

$$Q(60) = 60 + \sqrt{4000 - \frac{2}{3} \cdot 3600} = 60 + \sqrt{1600} = 60 + 40 = 100;$$

$$Q\left(20\sqrt{15}\right) = 20\sqrt{15} + \sqrt{4000 - \frac{2}{3} \cdot 400 \cdot 15} = 20\sqrt{15};$$

Наибольшим значением функции $Q(x)$ является 100, значит, наибольшее количество единиц товара равно 100.

Ответ: 100.

Алгоритм нахождения наибольшего/наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1) Необходимо найти производную функции $f'(x)$.

2) Приравнять ее к нулю, найти критические точки функции $x_0$.

3) Среди критических точек отобрать те, которые принадлежат отрезку $[a; b]$.

4) Найти значение функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка $[a; b]$. Среди чисел $f(a), f(x_0), f(b)$ выбрать наибольшее/наименьшее.

## 2.5 Использование производной функции в заданиях ЕГЭ по физике и информатике

Производная функции широко используется в таких науках, как физика, информатика, химия, биология.

Необходимо рассмотреть задачи, которые встречаются в Едином государственном экзамене по физике и требуют нахождения производной.

В физике широко используется механический смысл производной: мгновенная скорость точки в момент времени $t$ равна производной пути по времени, то есть

$$v(t) = x'(t).$$

Ускорение является производной скорости по времени:

$$a(t) = v'(t) = \left(x'(t)\right)'[9].$$

Пример 2.5.1:

Небольшое тело движется вдоль оси $O_x$. Его координата $x$ изменяется с течением времени $t$ по закону:

$$x(t) = 2 + t - t^2,$$

где $t$ выражено в секундах, а $x$ – в метрах. Чему равна проекция ускорения этого тела на ось $O_x$ в момент времени $t = 1$ с? (Ответ дайте в метрах в секунду в квадрате) [18].

Решение:

Проекция ускорения тела – это вторая производная (то есть производная, взятая дважды) координаты тела по времени:

$$v(t) = x'(t) = 1 - 2t,$$

$$a(t) = v'(t) = -2.$$

Таким образом, проекция ускорения тела постоянна и равна $-2$ м/с$^2$.

Ответ: $-2$.

С помощью производной можно найти значение силы тока $I$ в определенный момент времени, если известна функция $Q(t)$ количества электричества, которое прошло через проводник за время $t$:

$$I = Q'(t)\ [14].$$

Пример 2.5.2:

Количество электричества, которое протекает через проводник, задаётся формулой $Q(t) = 18t - 9t^2$. В какой момент времени ток в цепи равен нулю [9]?

Решение:

$$I = Q'(t),$$

$$I = 18 - 18t.$$

Необходимо приравнять силу тока к нулю и решить уравнение относительно переменной $t$.

$$18 - 18t = 0,$$

$$t = 1.$$

Ответ: 1.

С помощью производной также можно найти значение силы, если известна функция, описывающая изменение импульса. Мгновенное значение силы равно первой производной импульса тела по времени:

$$F = p'(t).$$

Пример 2.5.3:

Точечное тело движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием постоянной горизонтальной силы, направленной вдоль оси $O_x$. Известно, что проекция импульса этого тела на указанную ось изменяется со временем по закону: $p_x = -4 + t$. Чему равен модуль силы, действующей на это тело? (Ответ дайте в ньютонах) [18].

Решение:

$$F_x = p_x'(t),$$

$$F_x = 1.$$

Следовательно, значение силы постоянно и равно 1 Н.

Ответ: 1.

В физике производную можно применять, чтобы найти наибольшее или наименьшее значение заданной величины.

Пример 2.5.4:

Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью $v_0 = 50$ м/с движется по закону $h(t) = v_0 t - gt^2$, где $h$ – путь в метрах, $t$ – время в секундах. Найдите наибольшую высоту, на которую поднимется тело, если $g = 10$ м/с$^2$[18].

Решение:

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции

$$h(t) = 50t - 10t^2.$$

$$h'(t) = 50 - 20t.$$

$$h'(t) = 0,$$

$$50 - 20t = 0,$$

$$t = 2{,}5.$$

Точка $t = 2{,}5$ является точка максимума функции $h(t)$ (рис. 2.5.1):

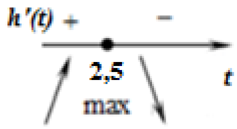



Рис. 2.5.1 Решение примера 2.5.4

Наибольшего значения функция $h(t)$ будет достигать в точке $t = 2{,}5$:

$$h(5) = 50 \cdot 2{,}5 - 10 \cdot 2{,}5^2 = 62{,}5.$$

Ответ: 62,5.

В Едином государственном экзамене по информатике встречаются задания, в которых необходимо найти наибольшее значение функции.

Пример 2.5.5:

Напишите в ответе число, которое будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма (для Вашего удобства алгоритм представлен на трех языках) [18].

| **Бейсик** | **Паскаль** | **Алгоритмический** |
|---|---|---|
| DIM A, B, T, M, R AS INTEGER<br>A = -10: B = 33<br>M = A: R = F(A)<br>FOR T = A TO B<br>IF F(T) > R THEN<br>M = T<br>R = F(T)<br>END IF<br>NEXT T<br>PRINT M<br>FUNCTION F(x)<br>F = 3*(x -1)*(x-1)+37<br>END FUNCTION | var a,b,t,M,R :integer;<br>Function<br>F(x:integer):integer;<br>begin<br>F := 3*(x -1)*(x-1)+37<br>end;<br>begin<br>a := -10; b := 33;<br>M := a; R := F(a);<br>for t := a to b do begin<br>if (F(t) > R) then begin<br>M := t;<br>R := F(t)<br>end<br>end;<br>write(M)<br>end. | алг<br>нач<br>цел a, b, t, M, R<br>a := -10; b := 33<br>M := a; R := F(a)<br>нц для t от a до b<br>если F(t) > R<br>то M := t; R := F(t)<br>все<br>кц<br>вывод M<br>кон<br>алг цел F(цел x)<br>нач<br>знач:= 3*(x -1)*(x-1)+37<br>кон |

Рис. 2.5.2 Пример 2.5.5

Решение:

Алгоритм предназначен для поиска наибольшего $t$, при котором функция $F(t)$ имеет наибольшее значение на отрезке $[a; b]$, где $a = -10$, $b = 33$. Нужно преобразовать функцию, найти ее производную, критические точки:

$$F(x) = 3(x-1)(x-1) + 37,$$

$$F(x) = 3x^2 - 6x + 40.$$

$$F'(x) = 6x - 6.$$

$$F'(x) = 0,$$

$$6x - 6 = 0,$$

$$x = 1.$$

Точка $x = 1$ является точкой минимума функции $F(x)$ (рис. 2.5.4), следовательно, в ней функция принимает наименьшее значение.

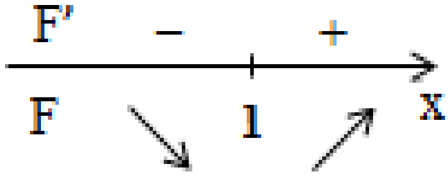



Рис. 2.5.4 Решение примера 2.5.5

Таким образом, наибольшее значение функции достигается на конце отрезка $[-10; 33]$:

$$F(-10) = 3 \cdot (-10^2) - 6 \cdot (-10) + 40 = 400;$$

$$F(33) = 3 \cdot (33^2) - 6 \cdot 33 + 40 = 3109.$$

Следовательно, ответом будет число 33 и программа выведет его на экран.

Ответ: 33.

Таким образом, производная функции применяется для решения задач ЕГЭ не только в математике, но и в физике и информатике. Чтобы успешно решить такие задачи, необходимо пользоваться теми же алгоритмами, что и в математике.

## 2.6 Методическая разработка факультативного курса «Производная функции в ЕГЭ»

Для систематизации знаний по теме «Производная функция» целесообразно подготовить небольшой факультативный курс, в котором будут представлены задания государственной итоговой аттестации и основная теория, необходимая для решения этих заданий.

Основной целью данного курса будет являться не изучение нового материала, а закрепление пройденного для успешного практического применения.

Пояснительная записка:

Факультативный курс «Производная функции в ЕГЭ» входит в образовательную область «Математика», рассчитан для обучающихся 11 классов на 1 учебный час в неделю, продолжительность – 8 часов. Курс носит практический характер, так как теория по теме «Производная функции» широко представлена в курсе математики. Необходимая теория будет представлена в виде памяток и алгоритмов, помогающих решить задачи по теме (Приложение 1). В программе представлены задания из контрольно-измерительных материалов ЕГЭ (Приложение 2).

Цель: подготовка учащихся к Единому государственному экзамену по профильной математике.

Задачи:

1. обучать анализировать конкретную задачу и находить наилучший способ её решения;

2. развивать математическое и логическое мышление, внимание, память;

3. воспитывать познавательную активность, ответственность, самостоятельность, целеустремленность.

Методы: групповая и индивидуальная работа.

В результате прохождения курса обучающиеся должны знать:

- производные элементарных функций;

- правила дифференцирования;
- механический и геометрический смысл производной;
- поведение функции или ее производной по графику этой функции или ее производной;
- алгоритм нахождения экстремумов;
- алгоритм нахождения наибольшего/наименьшего значения функции.

В результате прохождения курса обучающиеся должны уметь:

- дифференцировать функции, представленные суммой, разностью, произведением и частным нескольких функций;
- дифференцировать сложные функции;
- находить критические точки функции;
- различать график функции и график производной функции;
- анализировать графики и снимать данные с них.

Таблица 2 Учебно-тематический план обучения

| № п/п | Название темы | Количество часов |
|---|---|---|
| 1 | Производные элементарных функций. Правила дифференцирования | 1 |
| 2 | Механический смысл производной | 1 |
| 3 | Геометрический смысл производной | 1 |
| 4 | Исследование функции на возрастание и убывание | 1 |
| 5 | Исследование функции на экстремумы | 2 |
| 6 | Наибольшее и наименьшее значение функции | 2 |
| | Всего: | 8 |

Содержание курса:

1) Производные элементарных функций. Правила дифференцирования (1 час):

Производные элементарных функций. Производная постоянной. Производная суммы (разности) функций. Производная произведения функций. Производная частного функций. Производная сложной функции. Памятка «Правила дифференцирования». Практические задания.

2) Механический смысл производной (1 час):

Механический смысл производной. Скорость материальной точки. Ускорение материальной точки. Алгоритм решения. Практические задания.

3) Геометрический смысл производной (1 час):

Геометрический смысл производной. Тангенс угла наклона касательной. Уравнение касательной. Угловой коэффициент касательной. Алгоритм решения. Практические задания.

4) Исследование функции на возрастание и убывание (1 час):

Монотонность функции. Возрастание и убывание функции. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции. Алгоритм решения. Практические задания.

5) Исследование функции на экстремумы (2 часа):

Экстремум функции. Критические точки функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремумов. Точка максимума функции. Точка минимума функции. Вычисление экстремума без производной функции. Алгоритм решения. Практические задания.

6) Наибольшее и наименьшее значение функции (2 часа):

Наибольшее и наименьшее значение функции на открытом промежутке. Наибольшее и наименьшее значение функции на замкнутом промежутке. Наибольшее и наименьшее значение функции для решения финансовых задач. Алгоритм решения. Практические задания.

Примечание: на темы 5 и 6 выделено большее количество часов в связи с разнообразием функций, представленных в заданиях (степенные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические).

Методические рекомендации:

Для наилучшего восприятия каждому обучающемуся выдается набор памяток и алгоритмов, которыми необходимо пользоваться при решении заданий.

Для более успешного усвоения материала и устранения возможных ошибок учителю необходимо обратить внимание обучающихся на следующие пункты:

- В заданиях на исследование поведения функции (№ 7, профильный уровень, математика) необходимо подчеркивать, какой график представлен на рисунке (график производный или график функции), чтобы не допустить ошибку в выполнении задания.
- В заданиях на наибольшее/наименьшее значение и экстремумы функции (№ 12, профильный уровень, математика) необходимо различать применение критической точки в функции. В заданиях на нахождение наибольшего/наименьшего значения функции вычисляется значение функции в критических точках, а в заданиях на нахождение экстремумов, то есть максимумов и минимумов функции, исследуется поведение производной при прохождении через критическую точку.

Возможные критерии оценивания:

Как правило, факультативные курсы не оцениваются. Обучающиеся должны приобрести знания и умения, необходимые для успешного усвоения темы и ее практического применения при решении задач Единого государственного экзамена.

Список используемых источников:

1. Открытый банк заданий ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege.

2. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru.

3. Ященко И. В. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2019. – 239 с.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Производная функции является универсальным и мощнейшим аппаратом исследования, применения производных в самых различных разделах математики и многих других науках весьма широки и разнообразны, поэтому данная тема занимает важнейшее место в курсе школьной математики. Задачи на применение производной встречаются в Едином государственном экзамене по математике, физике, информатике.

В ходе анализа учебно-методической литературы было рассмотрено содержание учебников по теме «Производная функции». В результате этого были проведены систематизация и обобщение теоретического материала, который послужил основой для составления алгоритмов решения задач, встречаемых в Едином государственном экзамене. В теоретической части были рассмотрены определения, правила дифференцирования, теоремы, связанные с производной в школьном курсе математики, составлена таблица производных элементарных функций.

Выпускная квалификационная работа содержит полезный и актуальный материал для практического применения. В практической части были рассмотрены задания из контрольно-измерительных материалов ЕГЭ, составлены подробные алгоритмы их решения, а также разработан факультативный курс «Производная функции в ЕГЭ», в котором представлена система экзаменационных задач. По итогам проведенной работы можно сделать вывод о том, что все задачи выполнены.

Цель выпускной квалификационной работы, сформулированная следующим образом: сформировать алгоритмы для успешного усвоения темы «Производная функции» и применения ее для решения задач Единого государственного экзамена, составить факультативный курс по данной теме, была достигнута.

Данная работа имеет практическую значимость: она может быть использована в школах, гимназиях или лицеях с углубленным изучением математики, а также в средних общеобразовательных учреждениях в качестве методического пособия для учителей при подготовке школьников к Единому государственному экзамену по профильной математике, в работе с обучающимися на уроках и факультативах.

## СПИКОК ИСПОЛЬЗАВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш. А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса. Профильный уровень / М. И. Башмаков. – М.: Дрофа, 2014. – 286с.

3. Башмаков М. И. Математика: Учебник для 10 класса. Базовый уровень / М. И. Башмаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 304 с.

4. Виноградов И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградов, С.Н. Олехник. – М.: Дрофа, 2001. – 416 с.

5. Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1. / А. А. Гусак. – Минск: «Вышэйш. школа», 1988. – 328 с.

6. Ивлев Б. М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для 10-11 кл. сред. шк. / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 48 с.

7. Колесов В. В. Элементарное введение в высшую математику: учебное пособие / В. В. Колесов, М. Н. Романов. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 467 с.

8. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов. – 27-е изд. – М.: Просвещение, 2019. – 384 с.

9. Могильницкий, В.А. Производная и ее применение: учебное пособие / В.А. Могильницкий, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. - 107 с.

10. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.

11. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.

12. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.

13. Мордкович А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

14. Никольский С.М. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 432 с.

15. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский. – М.: Просвещение, 2010. – 350 с.

16. Никольский С.М. Элементы математического анализа / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 160 с.

17. Открытый банк заданий ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения: 25.03.2019).

18. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru (дата обращения: 25.03.2019).

19. Яковлев И.В. Материалы по математике: Теоретическое пособие / И.В. Яковлев. - М.: Мнемозина, 2015. - 30 с.

20. Ященко И. В. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий

части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2019. – 239 с.

21. Ященко И. В. ЕГЭ-2019. Математика. 15 лучших вариантов от «Просвещения». Базовый уровень / И.В. Ященко, И. Р. Высоцкий. – М.: Издательство «Просвещение», 2019. – 175 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Памятки и алгоритмы для факультативного курса «Производная функции в ЕГЭ»

Производные элементарных функций

| Функция $f(x)$ | Производная $f'(x)$ |
|---|---|
| $c = const$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\mathrm{tg}\, x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\mathrm{ctg}\, x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\mathrm{arctg}\, x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{arcctg}\, x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

**Правила дифференцирования**

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$
2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
3. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
4. $[u(cx)]' = cu'(x)$
5. $[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

**Физический (механический) смысл производной:**

$$v(t) = S'(t)$$

$$a(t) = v'(t) = (S'(t))'$$

**Алгоритм решения задач на нахождение скорости материальной точки *v* в определенный момент времени *t*:**

1. Найти производную пути по времени.
2. Найти значение производной функции в точке *t*.

**Алгоритм решения задач на нахождение времени *t*, при котором скорость материальной точки равна *v*:**

1. Найти производную пути по времени.
2. Приравнять производную к значению мгновенной скорости *v*.
3. Найти значение *t*, решив полученное уравнение.

**Геометрический смысл производной:**

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k.$$

**Алгоритм решения задач на нахождение точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельная данной прямой $y = kx + b$ или совпадает с ней, если дан график производной функции:**

1. Так как значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, необходимо найти угловой коэффициент данной прямой *y*.

2. Если угловые коэффициенты прямых совпадают, данные прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы найти точки, требуемые в задачи, необходимо провести прямую $y = k$ и найти количество точек пересечения с графиком производной функции.

**Алгоритм решения задач на нахождение производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$:**

1. Построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого принадлежит касательной к графику функции.

2. Найти тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс:

- он будет равен тангенсу острого угла треугольника, если касательная возрастает;
- он будет равен тангенсу угла, смежного с острым углом треугольника, если касательная убывает.

3. Значение производной функции в точке касания будет равна найденному тангенсу.

**Алгоритм решения задач на восстановление исходной функции $y = f(x)$ при заданной касательной $y = kx + b$:**

1. Необходимо воспользоваться условием касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

2. Решив систему уравнений, найти неизвестный коэффициент исходной функции $y = f(x)$.

**Алгоритм решения задач на исследование монотонности функции:**

1. Внимательно прочитать задание и определить, какой график изображен на рисунке – график функции или график производной.

2. Если дан график функции, необходимо пользоваться следующими теоремами:

- Если функция $f(x)$ возрастает, то ее производная $f'(x) \geq 0$.
- Если функция $f(x)$ убывает, то ее производная $f'(x) \leq 0$.

3. Если дан график производной функции, необходимо пользоваться следующими теоремами:

- Если производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает.
- Если производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает.

**Алгоритм решения графических задач на нахождение экстремумов:**

1) Если дан график функции, необходимо найти точки, в которых функция меняет свой промежуток монотонности:

- если функция возрастала, но пройдя через точку, начала убывать, данная точка является точкой максимума;
- если функция убывала, но пройдя через точку, начала возрастать, данная точка является точкой минимума.

2) Если дан график производной функции, необходимо найти точки, в которых значение производной равно 0:

- если производная меняет знак с плюса на минус, данная точка является точкой максимума;
- если производная меняет знак с минуса на плюс, данная точка является точкой минимума.

**Алгоритм нахождения экстремума функции $f(x)$:**

1) Найти производную $f'(x)$.

2) Найти критические точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

3) Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки. Если смены знака производной нет, то нет и экстремума. Если же производная меняет знак при переходе через критическую точку, то экстремум имеется:

- если производная меняет знак с плюса на минус, данная точка является точкой максимума;
- если производная меняет знак с минуса на плюс, данная точка является точкой минимума.

**Алгоритм нахождения наибольшего/наименьшего значения функции на отрезке по графику производной:**

1) Необходимо проанализировать поведение производной на отрезке.

2) Если на отрезке есть экстремум, то есть производная пересекает ось абсцисс и при этом меняет свой знак, то наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума, а наименьшее – в точке минимума.

3) Если на отрезке нет экстремума:

- и производная отрицательна на отрезке, функция на данном отрезке убывает. Следовательно, наибольшее значение она принимает в левой точке отрезка, наименьшее – в правой.
- и производная положительна на отрезке, функция на данном отрезке возрастает. Следовательно, наибольшее значение она принимает в правой точке отрезка, наименьшее – в левой.

**Алгоритм нахождения наибольшего/наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:**

1) Необходимо найти производную функции $f'(x)$.

2) Приравнять ее к нулю, найти критические точки функции $x_0$.

3) Среди критических точек отобрать те, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.

4) Найти значение функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка $[a;b]$. Среди чисел $f(a), f(x_0), f(b)$ выбрать наибольшее/наименьшее.

Приложение 2

Практические задания для факультативного курса «Производная функции в ЕГЭ»

**1) Производные элементарных функций. Правила дифференцирования**

Вычислить производные следующих функций:

1. $y = x^2 - 2x + 7$
2. $y = \sqrt{x} - 3x + 78$
3. $y = x^{\frac{5}{7}} - x + 12$
4. $y = \frac{x}{x^2-1}$
5. $y = e^x \cdot x$
6. $y = 3 \cdot \sqrt[5]{x} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{2}{3x\sqrt{x}}$
7. $y = \operatorname{tg} \cos x$
8. $y = \ln \sin x$
9. $y = \sqrt[4]{1 + \cos x}$
10. $y = (x+1)(x+2)^2$
11. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
12. $y = \log_3 2x$
13. $y = \operatorname{arcctg} \arcsin x$
14. $y = \ln x \cdot x^4$
15. $y = \pi^{3\sin x}$

**2) Механический смысл производной**

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 7t - 20$ (где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 3t - 2$ (где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ –время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 9$ (где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 4$ с.

4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + +8t^2 - 9t - 26$ (где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 2$ с.

5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^4 + + 4t^3 - 7t^2 - 5t - 5$ (где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.

6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + +6t + 19$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 14 м/с?

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + +5t + 13$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 13 м/с?

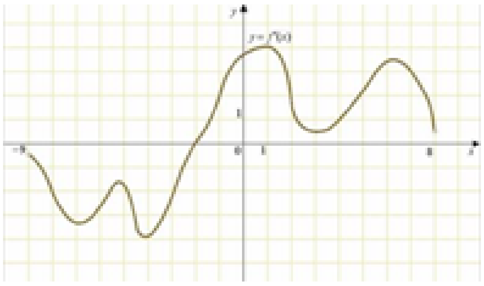
8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 9t + 20$ (где $x$ - расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ - время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - -6t + 20$ (где $x$ - расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ - время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

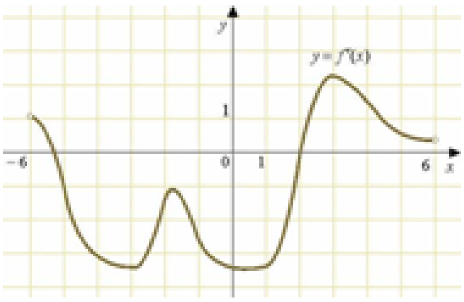
10. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - -\frac{1}{2}t^2 - 2t + 22$ (где $x$ - расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ - время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 14 м/с?

### 3) Геометрический смысл производной

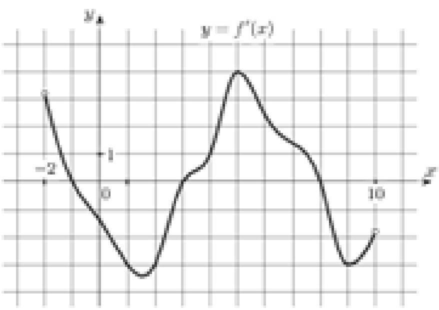
1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-9;8). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 8$ или совпадает с ней.



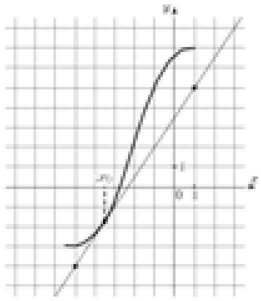
2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-6; 6). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 11$ или совпадает с ней.



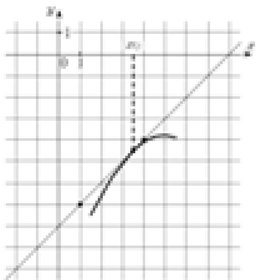

3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-2; 10). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x - 17$ или совпадает с ней.



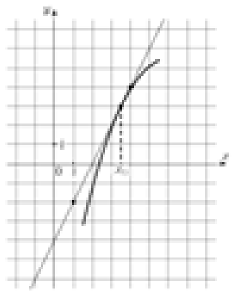
4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.



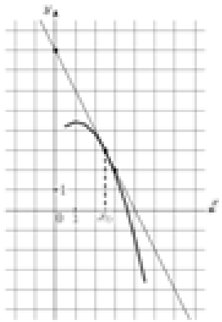
5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.



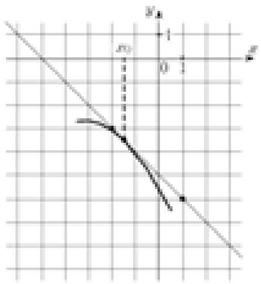
6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.



8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

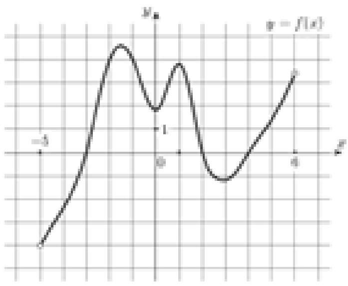


9. Прямая $y = 9x + 9$ является касательной к графику функции $ax^2 - 9x + 12$. Найдите $a$.

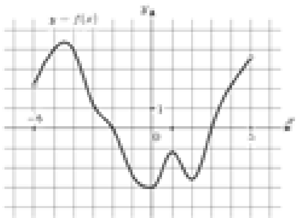
10. Прямая $y = -3x + 7$ является касательной к графику функции $18x^2 - 15x + c$. Найдите $c$.

**4) Исследование функции на возрастание и убывание**

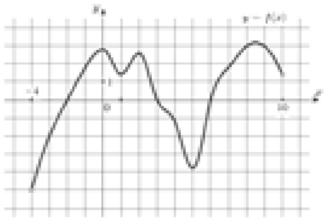
1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-5; 6). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



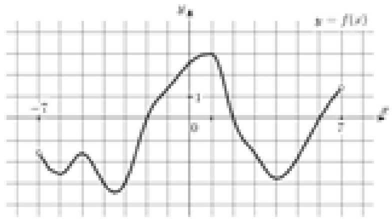
2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-6; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



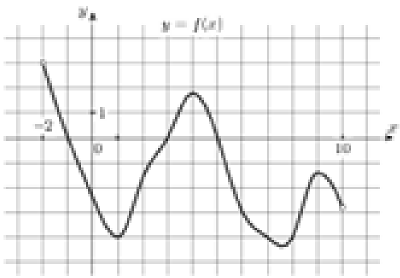
3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-4; 10). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



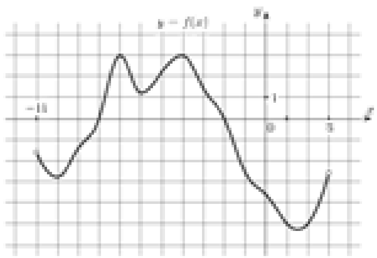
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-7; 7). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



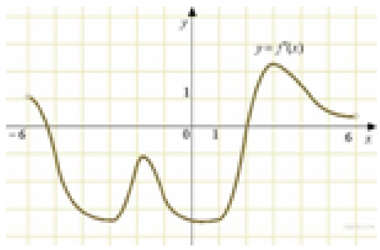
5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-2; 10). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



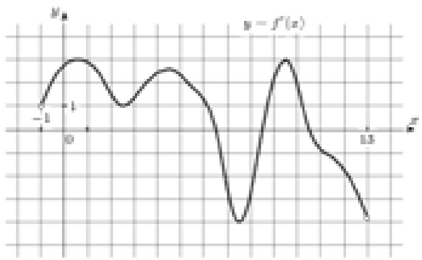
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-11; 3). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



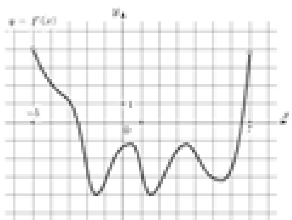
7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-6; 6). Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



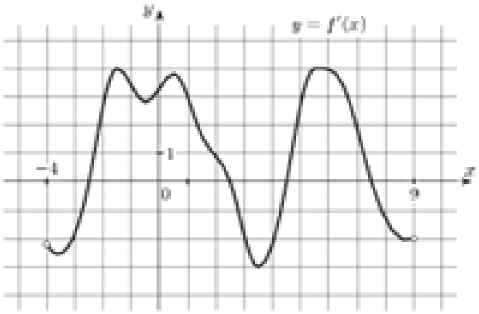
8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-1; 13). Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-5; 7). Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

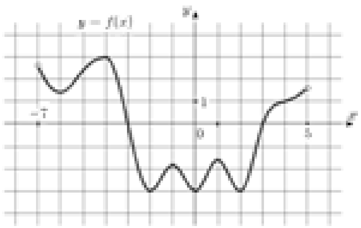


10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-4; 9). Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

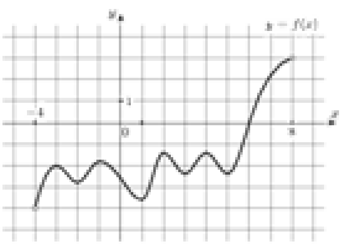



**5) Исследование функции на экстремумы**

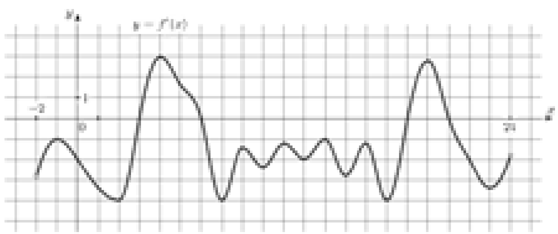
1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-7; 5). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



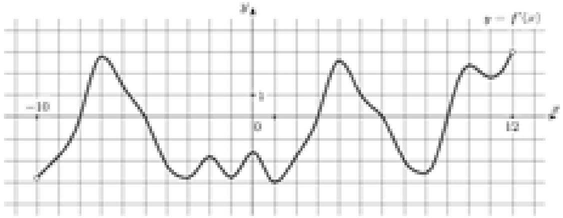
2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-4; 8). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



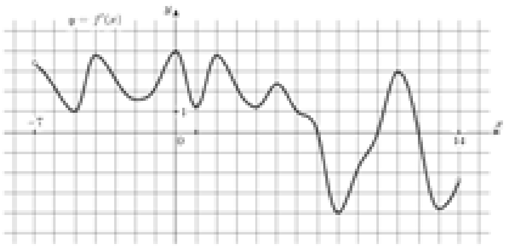
3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-2; 21). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке [2; 19].



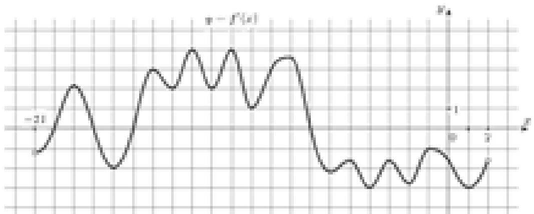
4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-10; 12). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке [-9; 10].



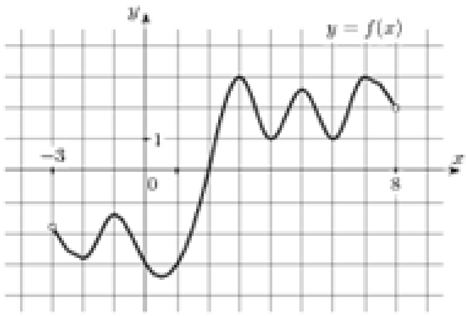

5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-7; 14). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке [-6; 9].



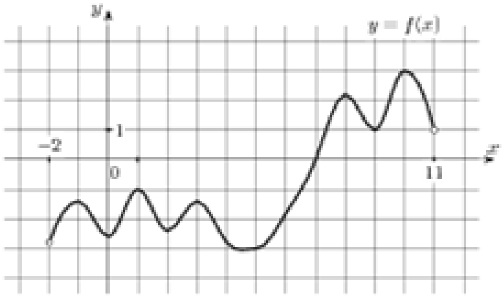
6. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-21; 2). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке [-19; 1].



7. На рисунке изображён график функции $f(x)$, определённой на интервале (-3; 8). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



8. На рисунке изображён график функции $f(x)$, определённой на интервале (-2; 11). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.




9. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 300x + 14$.

10. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 15x + 5$.

11. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+576}{x}$.

12. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2+784}{x}$.

13. Найдите точку минимума функции $y = (x + 18)e^{x-18}$.

14. Найдите точку максимума функции $y = (15 - x)e^{x+15}$.

15. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 5) - 4x + 9$.

16. Найдите точку минимума функции $y = 9x - \ln(x + 5)^9 + 2$.

17. Найдите точку минимума функции $y = (6 - 4x)\cos x +$ $+4\sin x$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

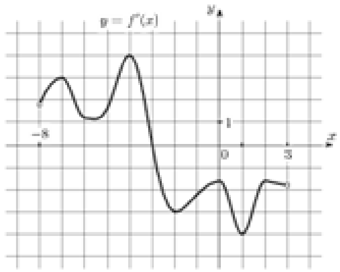
18. Найдите точку минимума функции $y = (2x - 1)\cos x -$ $-2\sin x$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$.

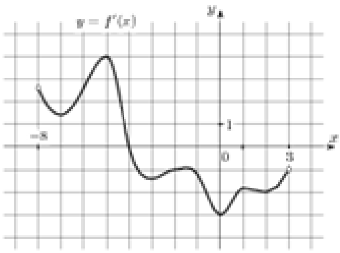
20. Найдите точку максимума функции $y = \log_8(-40 - 14x - x^2) + 3$.

**6) Наибольшее и наименьшее значение функции**

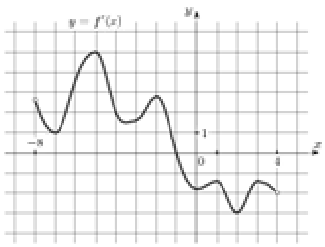
1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-8; 3). В какой точке отрезка [-3; 2] $f(x)$ принимает наибольшее значение?



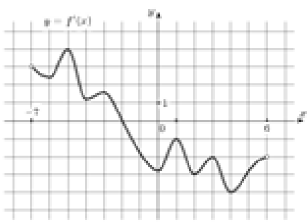
2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-8; 3). В какой точке отрезка [-4; 1] $f(x)$ принимает наибольшее значение?



3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-8; 4). В какой точке отрезка [-7; -3] $f(x)$ принимает наименьшее значение?



4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-7; 6). В какой точке отрезка [-1; 5] $f(x)$ принимает наименьшее значение?



5. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 108x + 5$ на отрезке [0; 7].

6. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 23$ на отрезке [-13; -0,5].

7. Найдите наименьшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9].

8. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2+196}{x}$ на отрезке [1; 21].

9. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2+225}{x}$ на отрезке [1; 3].

10. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 13)e^{x-12}$ на отрезке [11;13].

11. Найдите наибольшее значение функции $y = (29 - x)\, e^{x-28}$ на отрезке [24;38].

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 62)e^{x-61}$ на отрезке [60;62].

13. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 19)^{12} - 12x$ на отрезке [-18,5; 0].

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 10x - \ln(x + 4)^{11}$ на отрезке [-3,5; 0].

15. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 11)^{10} - 10x$ на отрезке [-10,5; 0].

16. Найдите наименьшее значение функции $y = 8\operatorname{tg} x - 16x + 4\pi - 10$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

17. Найдите наибольшее значение функции $y = 7x - 6\sin x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

18. Найдите наименьшее значение функции $y = -27 - 6{,}5\pi + 26x - -26\sqrt{2}\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.