ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**( Н И У « Б е л Г У » )**

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование, профиль Математика и физика
очной формы обучения, группы 02041401
Беляевой Екатерины Павловны

Научный руководитель
старший преподаватель
кафедры математики
Мандрика Г.В.

БЕЛГОРОД 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность.** Тригонометрия является важной и неотъемлемой частью контрольно-измерительных материалов ЕГЭ, вступительных экзаменов в ВУЗах, математических олимпиад, выступая селективным инструментом отбора. Соответственно, существует потребность в хорошей организации и, хотя бы, базовой подготовке по этому блоку содержания. Долгое время тригонометрия существовала, как отдельный курс, обеспеченный учебниками и задачниками. Постепенно части тригонометрии выключили в курс геометрии, алгебры и начал анализа. Методологический подход учителя математики должен способствовать пониманию и практическому применению изучаемого материала, а не отработку тригонометрических формул.

С периодически повторяющимися процессами человек сталкивается в своей жизни очень часто: восход и заход Солнца, смена времен года и положения небесных тел на небесной сфере, чередование фаз Луны, колебательные и волновые процессы. С помощью наблюдений было замечено, что все эти явления возобновляются через некоторый промежуток времени, то есть с некоторой периодичностью. Астрономические наблюдения явились источником многих математических открытий, так как жизнь на Земле тесно связана с цикличными процессами. Такая наука как астрономия дает наиболее наглядное представление о периодических процессах, происходящих на небесной сфере. Положение объектов на небесной сфере определяется с помощью небесных координат – центральных углов или дуг кругов большой небесной сферы. Заметим, что в качестве аргумента периодических функций, которыми и являются тригонометрические функции, очень часто выступает угол [2].

Основной задачей, которая стоит перед учителем математики, является развитие ребенка, а не механическое запоминание формул. В связи с этим появилась необходимость внесения изменений в методические рекомендации преподавания курса тригонометрии. В разные годы для введения понятия тригонометрических функций в школьном курсе математики использовались разнообразные варианты и формы. В современных учебных пособиях понятие тригонометрических функций вводится с помощью единичной окружности.

Так как тригонометрия включена в школьный курс математики, а не изучается отдельным предметом, количество часов на изучение модели «числовая окружность на координатной плоскости», понятий синуса и косинуса «по окружности», свойств тригонометрических функций уменьшилось. В результате могут возникнуть некоторые трудности, связанные, во-первых, с работой на новой модели числового множества – числовой окружности, во-вторых, с нестандартным способом определения тригонометрических функций (синус рассматривается как ордината точки на числовой окружности, косинус – абсцисса точки). При изучении темы «Тригонометрические функции» используются основные элементы «тригонометрического языка» в геометрическом смысле, поэтому у многих возникают проблемы не усвоения и недопонимания нового материала.

Из вышесказанного можно выделить проблему исследования, которая состоит в анализе теоретических основ и методики изучения понятия тригонометрических функций в школьном курсе математики. Проблема исследования определяет тему выпускной квалификационной работы: «Тригонометрические функции и их свойства в школьном курсе математики».

**Цель исследования:** разработка эффективных методических рекомендаций для изучения темы «Тригонометрические функции» в школьном курсе математики.

**Объект исследования:** учебный процесс в общеобразовательной школе.

**Предмет исследования:** методика изучения тригонометрических функций и их свойств в школьном курсе математики.

**Задачи исследования:**

1. Провести анализ школьных учебников и методической литературы в соответствии с проблемой исследования.

2. Рассмотреть методику изучения тригонометрических функций в школьном курсе математики.

3. Изучить структуру процесса формирования понятия тригонометрических функций.

4. Разработать методические рекомендации по изучению темы «Тригонометрические функции» в школьном курсе математики.

**Методы исследования:** для решения поставленных задач использована совокупность следующих методов: теоретический анализ педагогической, математической, психологической, дидактической, методической литературы; анализ результатов проведенных уроков.

**Структура работы:** выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложения.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования. Сформулированы цель, объект, предмет и задачи исследования.

В первой главе рассматриваются теоретические сведения, связанные с тригонометрическими функциями.

Вторая глава посвящена методике изучения тригонометрических функций в школьном курсе математики, а также даются рекомендации по работе с тригонометрическими функциями и использованием их свойств.

В заключении изложены основные выводы исследования.

В приложении приведены различного рода задачи для подготовки к ЕГЭ.

# ГЛАВА 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ФОРМУЛЫ

## 1.1 Синус, косинус, тангенс и котангенс угла

Традиционно аргументами тригонометрических функций рассматривались именованные величины – углы (дуги), измеренные в градусах или радианах. Значения тригонометрических функций как отношения отрезков являются абстрактными величинами – числами. При изучении тригонометрических функций необходимо сравнивать изменения функции в связи с изменением аргумента. Сравнивать же можно только однородные или, что точнее, абстрактные величины – числа. Поэтому введение тригонометрических функций числового аргумента дает возможность применять эти функции в математике, технике, физике [17].

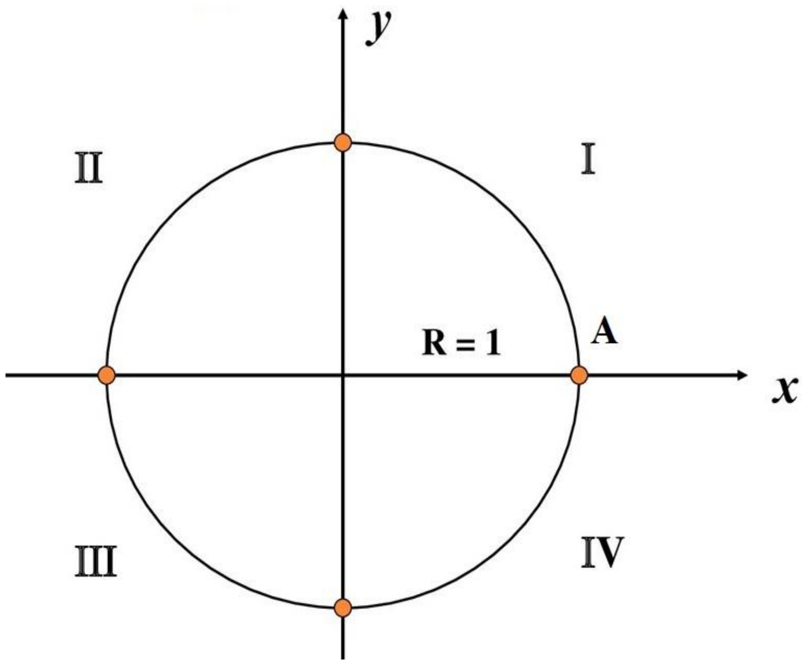



Рис.1 Единичная окружность

В качестве новой математической модели для введения тригонометрических функций будем использовать числовую окружность. Для удобства разместим числовую окружность в прямоугольной декартовой системе координат *xOy* таким образом, как показано на рисунке 1, чтобы центр окружности совпадал с началом координат, а ее радиус примем за единичный отрезок. Точка А – начальная точка, отмеченная на оси *x*, соответствует точке с координатами (1;0) [17].

Если на числовой окружности точке M соответствует число t, то ординату этой точки называют синусом числа t и обозначают $\sin t$ [9]. Из определения следует, что если ордината верхней полуплоскости положительна, то синус угла I и II больше нуля, а так как ордината нижней полуплоскости отрицательна, то синус угла III и IV четверти меньше нуля. Очевидно, что $-1 \leq \sin t \leq 1$, так как ордината точек единичной окружности меняется только в этих пределах [30].

Пример 1. Определите с помощью числовой окружности точки, имеющие ординату $y = \frac{1}{2}$, и запишите соответствующие им числа t.

Решение. Точки M и P являются точками пересечения числовой окружности и прямой $y = \frac{1}{2}$. Точке M на числовой окружности соответствует число $\frac{\pi}{6}$, а значит, и любое число вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Точке P соответствует число $\frac{5\pi}{6}$, следовательно, любое число вида $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Получили несколько пар значений: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

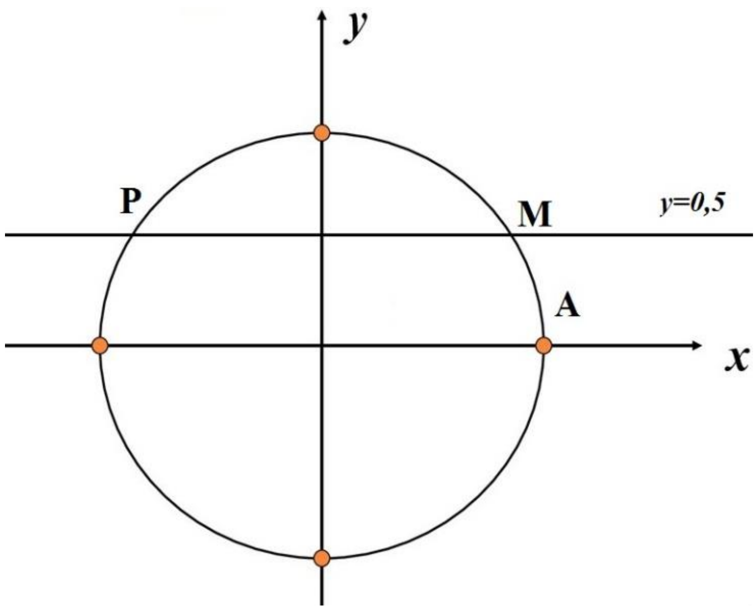



Рис.2 Графическое решение примера

Если на числовой окружности точке N ставится в соответствие число t, то абсцисса точки N называется косинусом числа t и обозначают $\cos t$ [9]. Из определения можно сделать вывод, что если абсцисса правой полуплоскости положительна, то косинус I и IV четверти больше нуля, а так как абсцисса левой полуплоскости отрицательна, то косинус угла II и III четверти меньше нуля. Аналогично, $-1 \leq \cos t \leq 1$, так как абсцисса точек единичной окружности меняется только в этих пределах [30].

Пример 2. Найдите и отметьте на числовой окружности точки с абсциссой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Запишите соответствующие этим точкам числа t.

Решение. Точки пересечения прямой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и числовой окружности обозначим H и K. Точке H соответствует число $\frac{3\pi}{4}$, а следовательно, любое число, имеющее вид $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Точка K соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, следовательно, любому числу вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. В результате получили группу значений: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ и $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

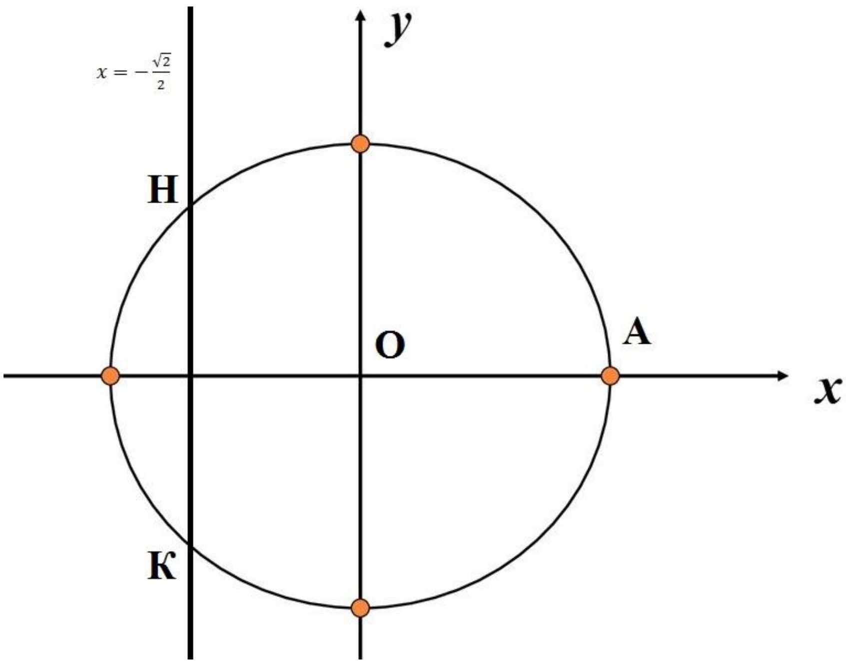



Рис.3 Решение на числовой окружности

Каждая из величин: синус или косинус имеет строго определенное значение для каждого данного острого угла α, причем с изменением угла α изменяются и значения этих величин. Таким образом, эти величины являются функциями угла [2]. В таблице 1 приведены значения синуса и косинуса для числа t.

Таблица 1 Таблица значений тригонометрических функций основных аргументов

| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $cos\ t$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | –1 |
| $sin\ t$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Рассмотрим еще две тригонометрические функции угла – тангенс и котангенс, которым уделяется внимание в школьном курсе математики. С помощью единичной окружности можно определить значение тангенса и котангенса любого угла. На рисунках 4 и 5 приведены графические иллюстрации числовой окружности, оси тангенсов и оси котангенсов.

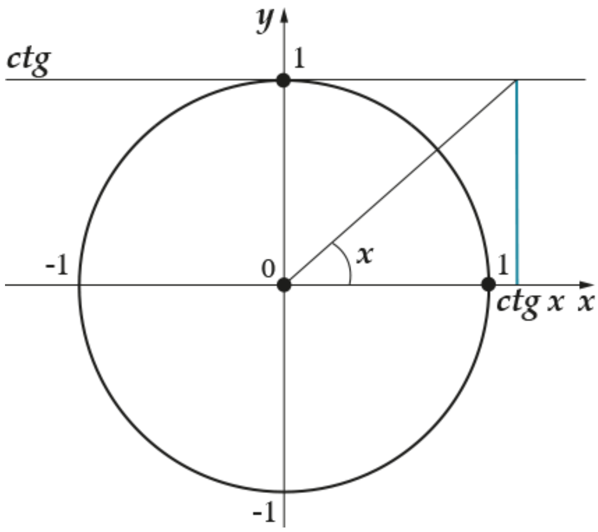



Рис.4 Ось котангенсов

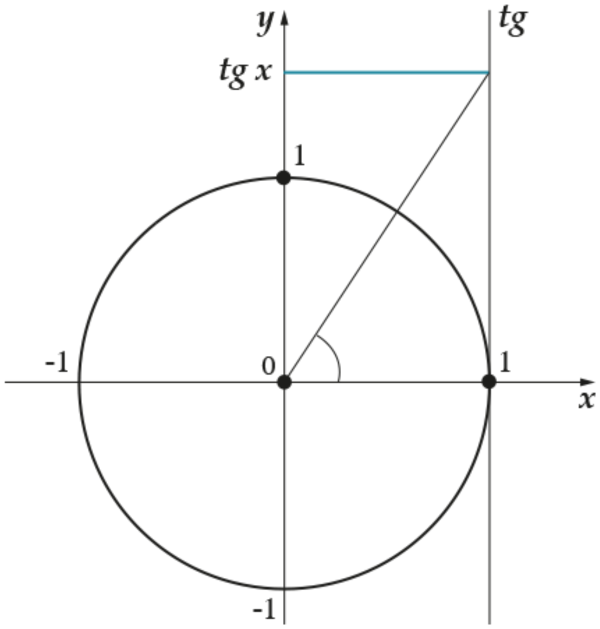



Рис. 5 Ось тангенсов

Тангенсом числа t называют отношение синуса числа t к косинусу этого же числа и обозначают $\operatorname{tg} t$. Значение тангенса числа имеет смысл при условии, что $\cos t \neq 0$. Если взять отношение косинуса числа t к синусу этого же числа, то получим котангенс числа t, который обозначают $\operatorname{ctg} t$. Когда речь идет о котангенсе числа t, подразумевают, что $\sin t \neq 0$. Определения легко выразить через формулы: $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$ [17].

Каждая точка числовой окружности в системе $xOy$ имеет свои координаты, причем $x > 0, y > 0$ в первой четверти; $x < 0, y > 0$ во второй четверти; $x < 0, y < 0$ в третьей четверти; $x > 0, y < 0$ в четвертой четверти. По знакам синуса и косинуса числа в определенной четверти можно определить знаки тангенса и котангенса числа в этой четверти [1, 17]. Тангенс и котангенс являются функциями угла, поскольку для каждого острого угла α имеют строго определенное значение, притом с изменением угла α происходит и изменение значения этих величин [12]. По значениям синуса и косинуса числа t, возможно вычислить соответствующие числу t значения тангенса и котангенса. В таблице 2 приведены лишь некоторые значения тангенса и котангенса числа t.

Таблица 2 Таблица основных значений тангенсов и котангенсов

| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $tg\ t$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |
| $ctg\ t$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

Пример 3. Найдите числовое значение выражения:

$$3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}.$$

Решение. Пользуясь таблицей основных значений синуса, косинуса и котангенса числа, получим

$3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) + \sqrt{3} = 1{,}5 + (-2) + \sqrt{3} = -0{,}5 + \sqrt{3}.$

Пример 4. Найдите числовое значение выражения $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$.

Решение. Пользуясь таблицей основных значений синуса, косинуса и котангенса числа, получим $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = 3 \cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Пример 5. Выяснить знак тангенса угла: 1) $260°$; 2) $3$; 3) $\frac{5\pi}{6}$.

Решение. 1) Так как $180° < 260° < 270°$, следовательно, $\operatorname{tg} 260° > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0$. 3) Так как $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} < 0$.

### 1.2 Основные тригонометрические формулы и формулы приведения

Взаимосвязь между основными тригонометрическими функциями выражается через основное тригонометрическое тождество и тригонометрические формулы. Существование такого разнообразия тригонометрических формул объясняется тем, что количество связующих нитей тригонометрических функций достаточно велико. Это множество представляет собой совокупность формул, устанавливающих связь между тригонометрическими функциями одинакового угла, кратного угла, позволяющих понижать степень, выражать все функции через тангенс половинного угла и др. Перечислим все основные тригонометрические формулы, которые изучаются в школьном курсе математики при решении большинства задач тригонометрии [5,2]:

1) Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

2) Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,

3) Формулы синуса, косинуса, тангенса, котангенса для угла $(-\alpha)$:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$,

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

4) Формулы синуса и косинуса угла $(x + 2\pi n)$, тангенса и котангенса угла $(x + \pi n)$, $n \in Z$:

$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha$,

$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$.

5) Формулы синуса и косинуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

6) Формулы половинного угла:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

7) Формулы сложения углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

8) Формулы суммы и разности синусов и косинусов:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

9) Формулы произведения синусов и косинусов:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2},$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

10) Формулы приведения. Все данные формулы заучивать не имеет смысла, достаточно запомнить простое правило:

При условии $0 < x < \frac{\pi}{2}$ в правой части формулы ставится такой же знак, который имеет левая часть равенства.

Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус меняется на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот. Если угол равен 0, либо $\pi \pm \alpha$, то замены не осуществляется [1]. Результаты этого правила можно представить в виде таблицы 3, которая изображена ниже.

Таблица 3 Формулы приведения

| Функция | Аргумент α | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ | $2\pi-\alpha$ | $2\pi+\alpha$ |
| $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ |

Пример 1. Найдите значение выражения

$3\sin^2 3\alpha - 2\sin(\pi - \alpha) + +3\cos^2 3\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Сначала преобразуем выражение, используя тригонометрические формулы и формулы приведения, а затем находим значение выражения при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$3\sin^2 3\alpha - 2\sin(\pi - \alpha) + 3\cos^2 3\alpha = 3(\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha) - 2\sin\alpha = 3 - 2\sin\alpha$.

$\alpha = \frac{\pi}{6}$; $3 - 2\sin\alpha = 3 - 2\cdot\frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$.

Пример 2. Найдите значение выражения при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

$\sqrt{2}\cos(3\alpha + \frac{5\pi}{4})\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(3\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$

Решение. Пользуясь тригонометрическими формулами, упрощаем выражение и затем находим значение выражения при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. $\sqrt{2}\cos\left(3\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(3\alpha + \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(3\alpha + \frac{5\pi}{4} - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$; $\sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Пример 3. Найдите значение выражения при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$$\mathrm{tg}(\pi - 2\alpha)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Решение. Сначала упрощаем выражение, используя тригонометрические формулы и формулы приведения, а затем находим значение выражения при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$$\mathrm{tg}(\pi - 2\alpha) \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}\, 2\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{tg}\, 2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha.$$

$$-\mathrm{tg}\, 2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha = -\mathrm{tg}\, \left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \cdot \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi}{6} = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \cdot 3 = -3\sqrt{3}.$$

## 1.3 Тригонометрические функции числового аргумента и их свойства

Изучение тригонометрических функций желательно использовать для повторения и уточнения общего понятия о функции одного аргумента, с которым обучающиеся знакомятся с каждым годом все глубже и полнее. При благоприятных условиях в 9 классе возможно рассмотрение понятия об однозначной функции одного аргумента в его современной трактовке, как отображения одного множества на другое: имеется множество $M$ числовых значений аргумента $x$, имеется множество $N$ числовых значений аргумента у, имеется закон, устанавливающий соответствие между каждым элементом множества $M$ и некоторым единственным вполне определенным элементом множества $N$. Обратное не обязательно, соответствие должно быть однозначным, но может не быть взаимно однозначным [5].

Изучая определения тригонометрических функций, обучающиеся должны в каждом отдельном случае выяснять, что представляют собой множества $M$ и $N$, как устанавливается соответствие между их элементами. Обычно тригонометрические функции рассматриваются как функции угла или дуги: множество $M$ есть то или иное множество углов или дуг [5].

Числовую функцию, заданную формулой $y = \sin x$, называют синусом. График синуса, изображенный на рисунке 6, называется синусоидой. Синусоида простирается в обе стороны до бесконечности, так как аргументу $x$ можно давать и отрицательные значения [21].

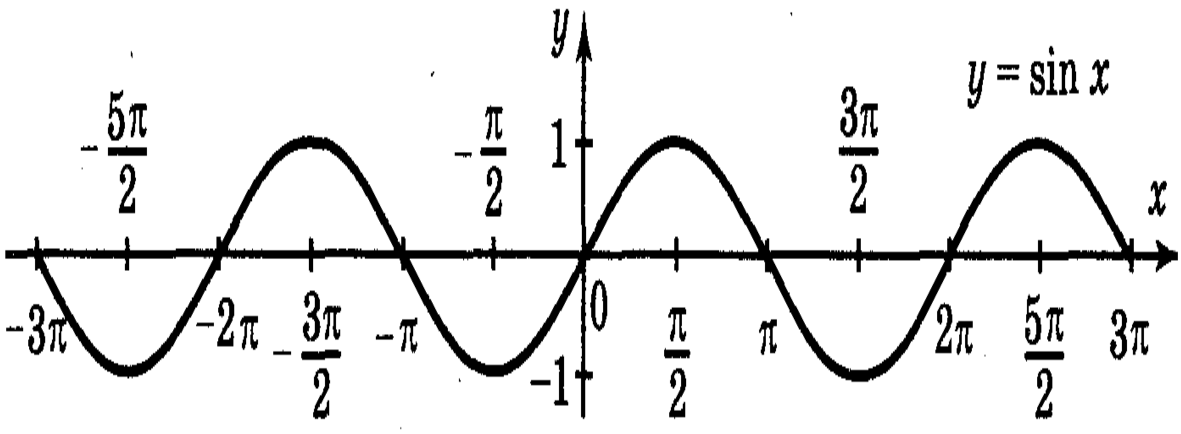



Рис.6 Синусоида

Из рассмотрения синусоиды можно вывести различные свойства синуса:

• Область определения – множество $R$ действительных чисел.

• $y = \sin x$ – нечетная функция, так как для любого $x$ выполняется равенство $\sin(-x) = -\sin x$. Так как функция $y = \sin x$, то график ее симметричен относительно начала координат в прямоугольной декартовой системе координат *xOy*.

• Функция $y = \sin x$, являющаяся возрастающей на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывающей на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Это связано с тем, что ордината точки, движущейся по первой четверти числовой окружности, постепенно увеличивается, а по второй четверти числовой окружности – уменьшается.

• Функция $y = \sin x$ является функцией ограниченной как сверху, так и снизу. Ограниченность функции $y = \sin x$ следует из того, что для любого $x$ справедливо неравенство $-1 \leq \sin x \leq 1$.

• $y_{\text{наим}} = -1$ (данное значение функция принимает в любой точке вида $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$); $y_{\text{наиб}} = 1$ (в любой точке, имеющей вид $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$).

• Возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ и убывает на любом отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$.

• $y = \sin x$ – непрерывная функция. Непрерывность функции указывает на то, что график функции сплошной и не имеет точек разрыва.

• Функция $y = \sin x$ периодическая: $T = 2\pi. \sin(x + 2\pi) = \sin x$

• Область значений функции – отрезок $[-1; 1]$ [9, 27].

Пример 1. Постройте график функции $y = \sin 3x - 2$.

Решение. Построение графика функции $y = \sin 3x - 2$ можно произвести с помощью преобразований графика функции $y = \sin x$. Сначала произведем сжатие графика $y = \sin x$ вдоль оси $Ox$ в 3 раза, т.е. уменьшение расстояния от каждой точки графика $y = \sin x$ до оси ординат в 3 раза. Получим график функции $y = \sin 3x$. На рисунке 7 изображен график функции $y = \sin 3x$.

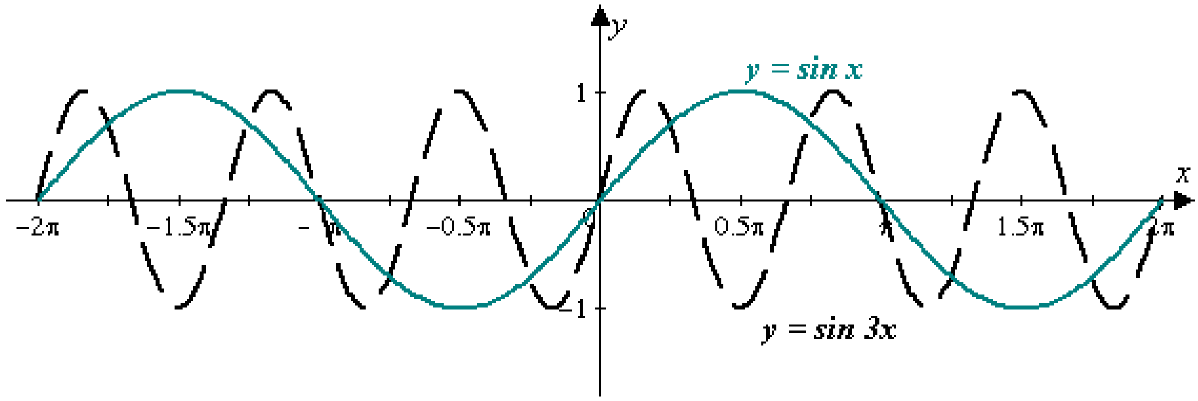



Рис.7 График функции $y = \sin 3x$

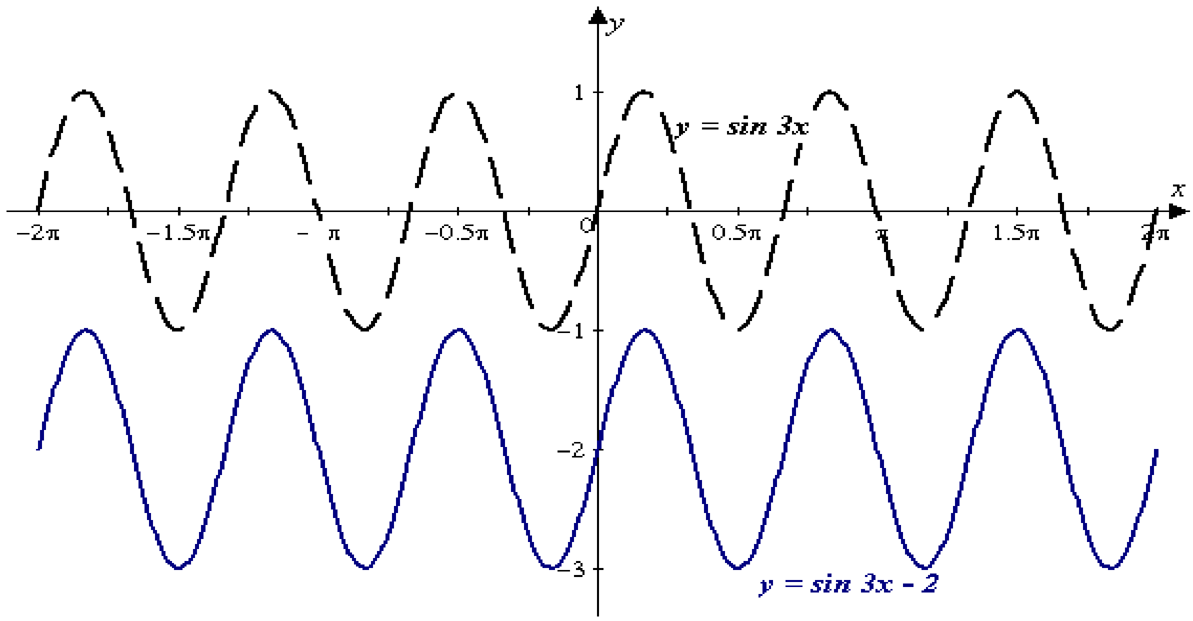



Рис.8 График функции $y = \sin 3x - 2$

Для того чтобы получить график функции $y = \sin 3x - 2$, необходимо полученный на промежуточном этапе построений график функции $y = \sin 3x$

сместить по оси $y$ на 2 единицы вниз. На рисунке 8 изображен график искомой функции $y = \sin 3x - 2$.

Пример 2. Выполните построение графика функции $y = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$.

Решение. Построить график функции $y = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ можно с помощью преобразований графика элементарной функции $y = \sin x$. Сначала произведем смещение графика $y = \sin x$ вдоль оси $Ox$ влево на $\frac{\pi}{4}$ единиц. Получим график функции $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$. На рисунке 9 изображен график функции $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$.

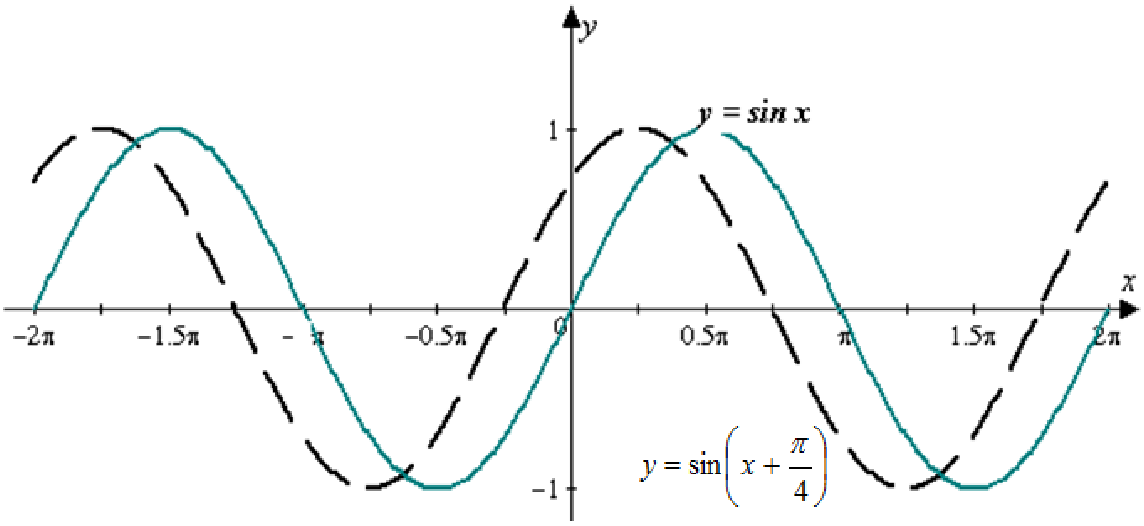



Рис. 9 График функции $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

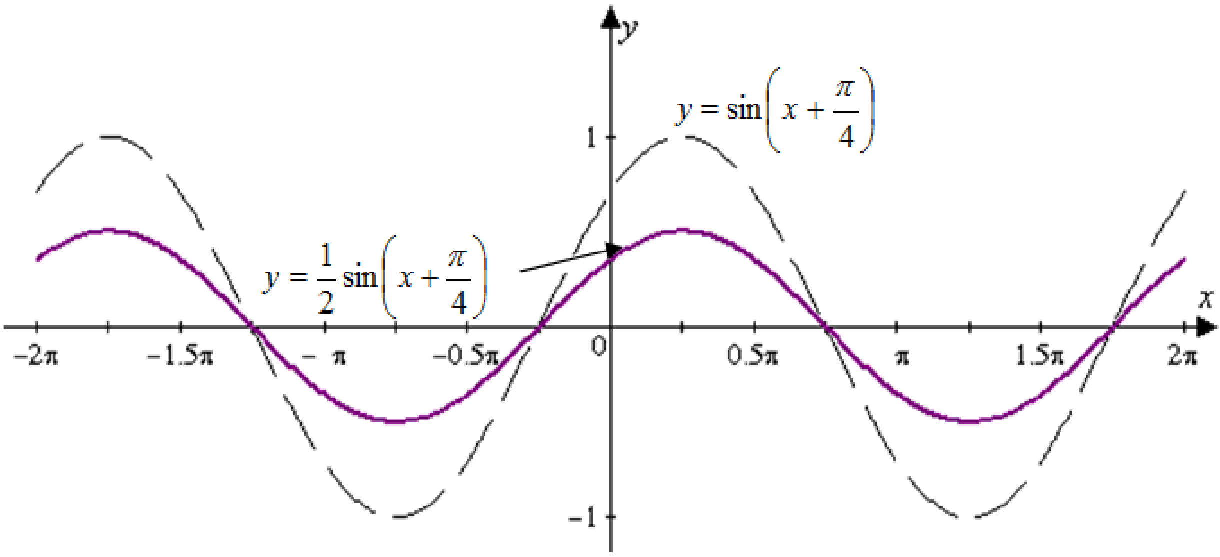



Рис. 10 График функции $y = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

Затем произведем сжатие графика $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ вдоль оси $Ox$ в 2 раза, т.е. уменьшение расстояния от каждой точки графика $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ до оси абсцисс в 2 раза, получим искомый график функции. На рисунке 10 изображен график функции $y = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$.

Числовую функцию, заданную формулой $y = \cos x$ называют косинусом. Формула приведения $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ позволяет утверждать, что функции $y = \cos x$ и $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ тождественны, следовательно, их графики совпадают.

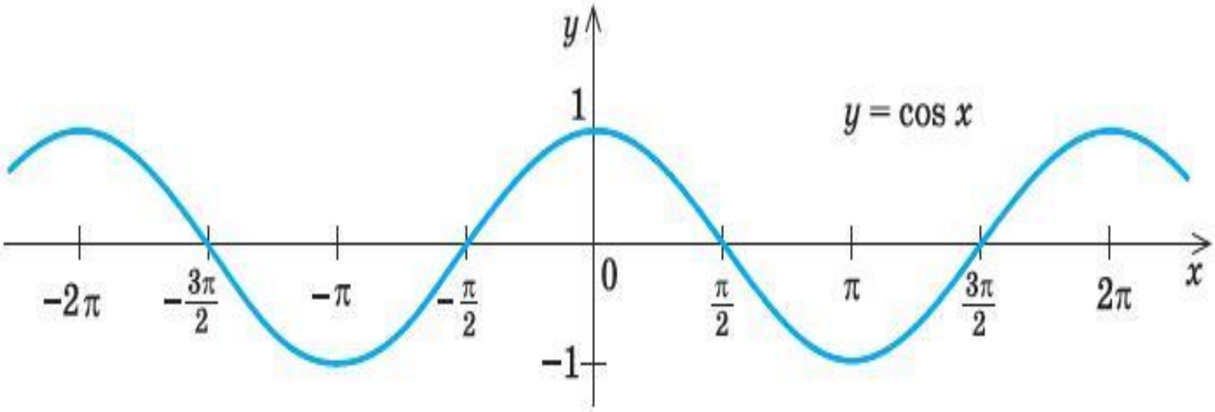



Рис.11 График косинуса

График функции $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ получается в результате параллельного переноса графика функции $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево. Это и будет графиком функции $y = \cos x$. График косинуса, изображенный на рисунке 11, называется тоже синусоидой. Синусоида простирается в обе стороны до бесконечности, так как аргументу $x$ можно давать и отрицательные значения [21, 15].

Из рассмотрения графика функции $y = \cos x$ можно вывести различные свойства косинуса:

- Область определения – множество $R$ действительных чисел.
- $y = \cos x$ – четная функция, так как для любого $x$ выполняется равенство $\cos(-x) = \cos x$. График четной функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси $y$ в прямоугольной системе координат $xOy$.

• Функция $y = cos\,x$ является возрастающей на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и убывающей на отрезке $[\,0; \pi]$.

• Функция $y = \cos x$ представляет собой ограниченную и снизу, и сверху функцию. Ограниченность ее следует из того, что любое значение $x$ удовлетворяет неравенству $-1 \leq \cos x \leq 1$.

• $y_{\text{наим}} = -1$ (это же значение функция принимает в любой точке $x = \pi + 2\pi n$); $y_{\text{наиб}} = 1$ (значение функции достигает в любой точке, имеющей вид $x = 2\pi n$).

• $y = \cos x$ – непрерывная функция. Смысл непрерывности функции отражается в том, что график функции сплошной, не имеет точек разрыва.

• Функция $y = \cos x$ периодическая: $T = 2\pi,\ cos(x + 2\pi) = \cos x$

• Функция $y = \cos x$ возрастает на любом отрезке вида $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ и убывает на любом отрезке вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, где $n \in Z$.

• Область значений функции – отрезок $[-1; 1]$ [11, 22].

Пример 3. Построить график функции $y = \cos(x - \frac{2\pi}{3})$.

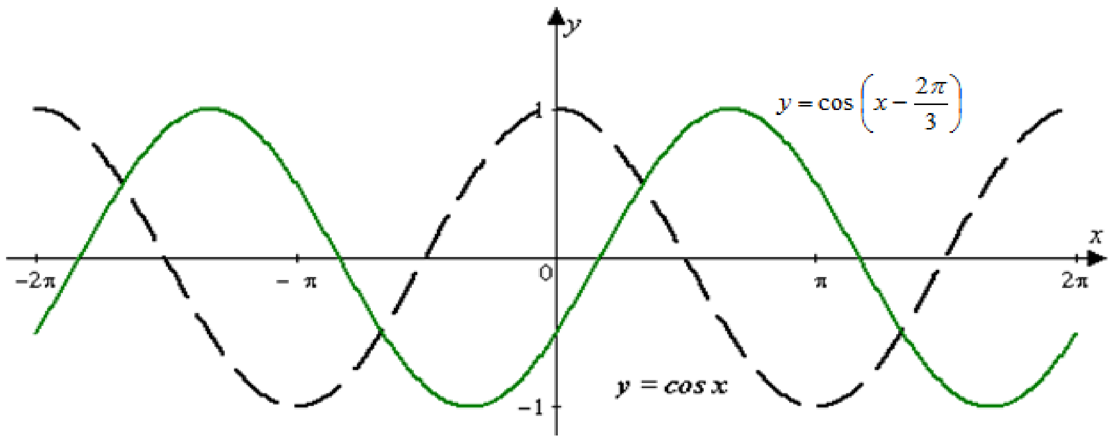



Рис.12 Графики функций

Решение. График функции $y = \cos(x - \frac{2\pi}{3})$ получается из графика функции $y = \cos x$ в результате параллельного переноса вдоль оси абсцисс на $\frac{2\pi}{3}$ единиц вправо. На рисунке 12 изображены два графика: график элементарной функции $y = \cos x$, который мы используем в качестве вспомогательного (пунктирной линией изображен) и график искомой функции $y = \cos(x - \frac{2\pi}{3})$ (сплошной линией изображен). Для удобства оба графика изображены в одной прямоугольной системе координат.

Пример 4. Построить график функции $y = -3\cos x$.

Решение. Данный график построим с помощью элементарных преобразований графика функции $y = \cos x$.

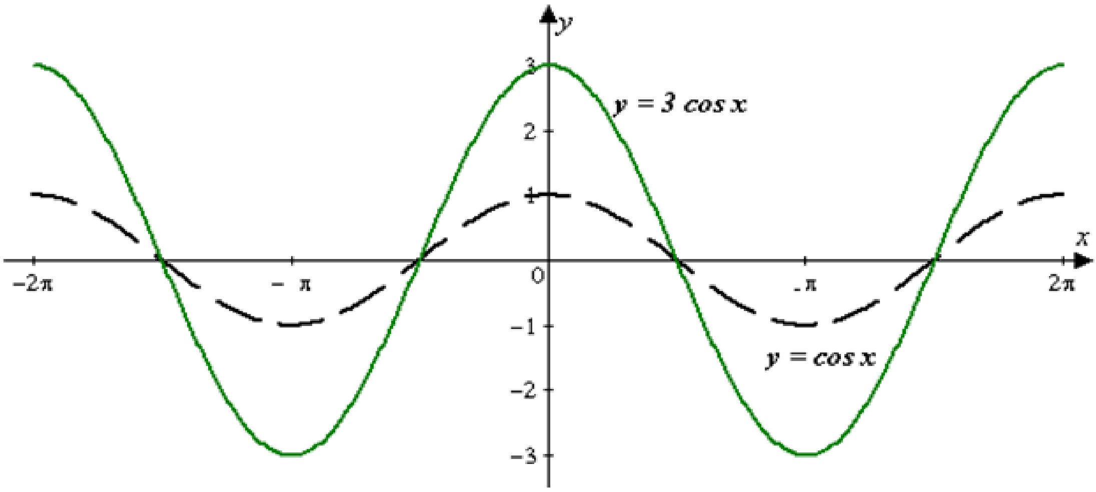



Рис.13 График функции $y = 3\cos x$

Сначала произведем растяжение графика функции $y = \cos x$ вдоль оси ординат в три раза (увеличим расстояние от каждой точки графика $y = \cos x$ до оси абсцисс в 3 раза), получим график функции $y = 3\cos x$. На рисунке 13 изображен график, который получили в результате преобразования.

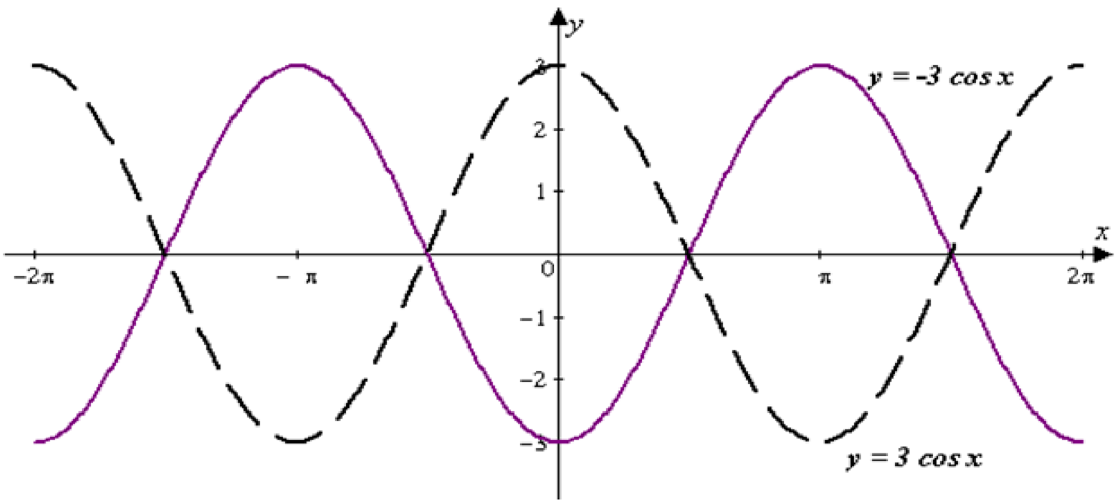



Рис.14 График функции $y = -3\cos x$

Затем для того, чтобы получить искомый график функции $y = -3\cos x$, нужно полученный график функции $y = 3\cos x$ отразить симметрично относительно оси абсцисс. На рисунке 14 сплошной линией выделен график функции $y = -3\cos x$, а пунктирной линией изображен вспомогательный график.

Числовую функцию, заданной формулой $y = \operatorname{tg} x$ называют тангенсом. К основным свойствам функции $y = \operatorname{tg} x$ относятся:

- Область определения функции представляет собой множество всех действительных чисел, за исключением чисел, имеющих вид $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Учитывая, что не все точки входят в область определения функции, на графике $y = \operatorname{tg} x$ нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, и т.д.
- $y = \operatorname{tg} x$ – нечетная функция, так как для любого $x$ выполняется равенство $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. График функции будет симметричен относительно начала координат в ПДСК *xOy*.
- Функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей на любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.
- Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограниченная.
- Наибольшее и наименьшее значения для функции $y = \operatorname{tg} x$ не определимы.
- Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, как и на любом интервале, имеющем вид $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ функция не определена и претерпевает разрыв. У графика функции имеются вертикальные асимптоты, представляющие собой прямые вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.
- Функция $y = tgx$ периодическая: $T = \pi$.

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$$

- Область значений функции – интервал $(-\infty; +\infty)$ [19, 24].

Тангенсоида, изображенная на рисунке 15, как раз и является графиком функции $y = \operatorname{tg} x$. Главная ветвь тангенсоиды – это та ее часть, которая заключена в полосе между $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Если внимательно посмотреть на график, то можно заметить, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит под углом близком к $45°$ [14].

Пунктирной линией проведены вертикальные асимптоты $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

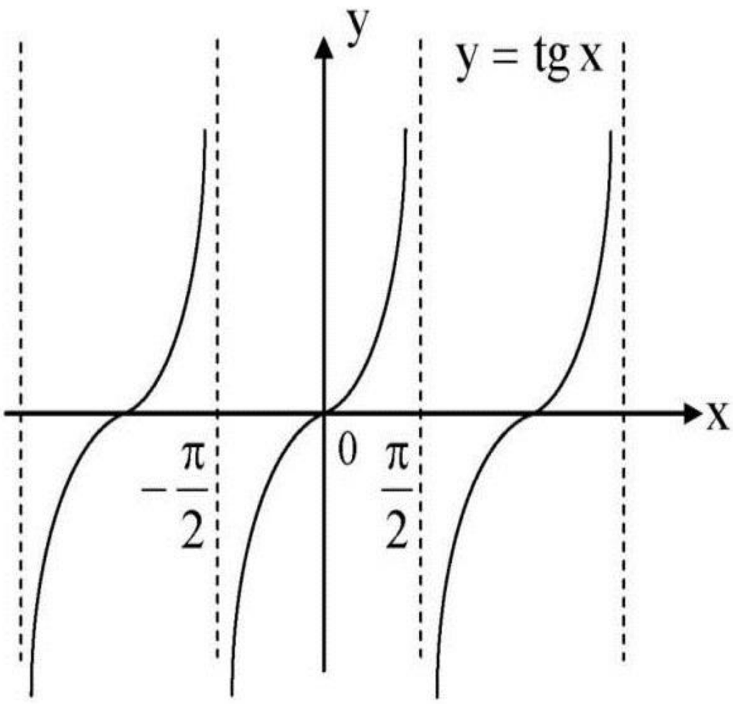



Рис. 15 Тангенсоида

Пример 5. Выполнить построение графика функции $y = \text{tg}(x + \frac{\pi}{3})$.

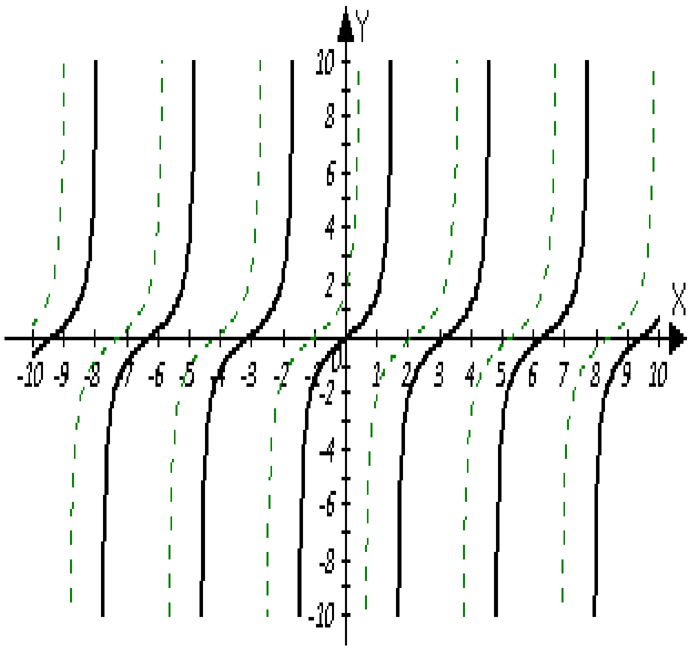



Рис. 16 График функции $y = \text{tg}(x + \frac{\pi}{3})$

Решение. Чтобы выполнить построение графика искомой функции, достаточно график уже известно нам функции $y = \operatorname{tg} x$ сдвинуть по оси $x$ на $\frac{\pi}{3}$ единиц влево. На рисунке 16 сплошной линией изображен вспомогательный график $y = \operatorname{tg} x$, пунктирной линией выделен график функции $y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$.

Пример 6. Изобразите график функции $y = 3 - \operatorname{tg} x$.

Решение. Чтобы получить искомый график $y = 3 - \operatorname{tg} x$, необходимо график функции $y = \operatorname{tg} x$ отобразить симметрично относительно оси ординат. Затем полученный в результате отображения график функции $y = -\operatorname{tg} x$ поднять на 3 единицы вверх по оси $y$.

На рисунке 17 сплошной линией изображен вспомогательный график $y = \operatorname{tg} x$, пунктирной линией выделен график функции $y = 3 - \operatorname{tg} x$.

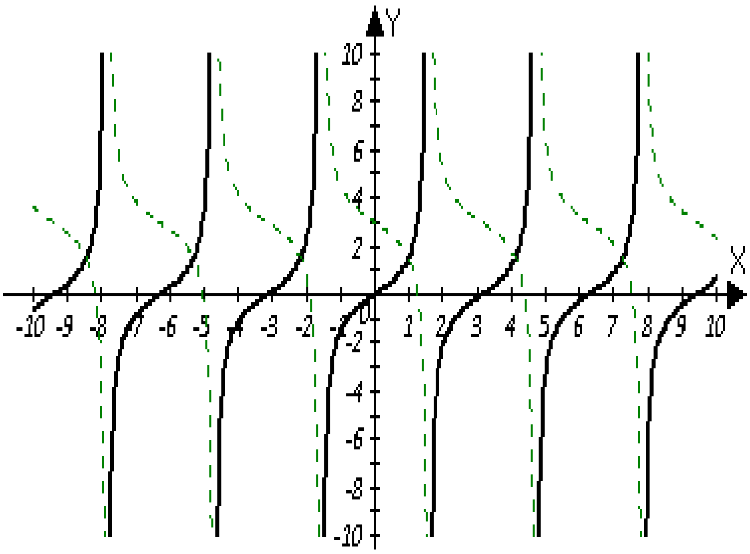



Рис. 17 График функции $y = 3 - \operatorname{tg} x$

Помимо синуса, косинуса и тангенса в школьном курсе математики рассматривается еще одна тригонометрическая функция – котангенс.

Числовую функцию, заданной формулой $y = \operatorname{ctg} x$ называют котангенсом. Котангенсоида, описывающая график функции $y = \operatorname{ctg} x$, изображена на рисунке 18. Главная ветвь котангенсоиды заключена в полосе между $x = 0$ и $x = \pi$. Сплошной тонкой линией проведены вертикальные асимптоты $x = -\pi$ и $x = \pi$ [14].

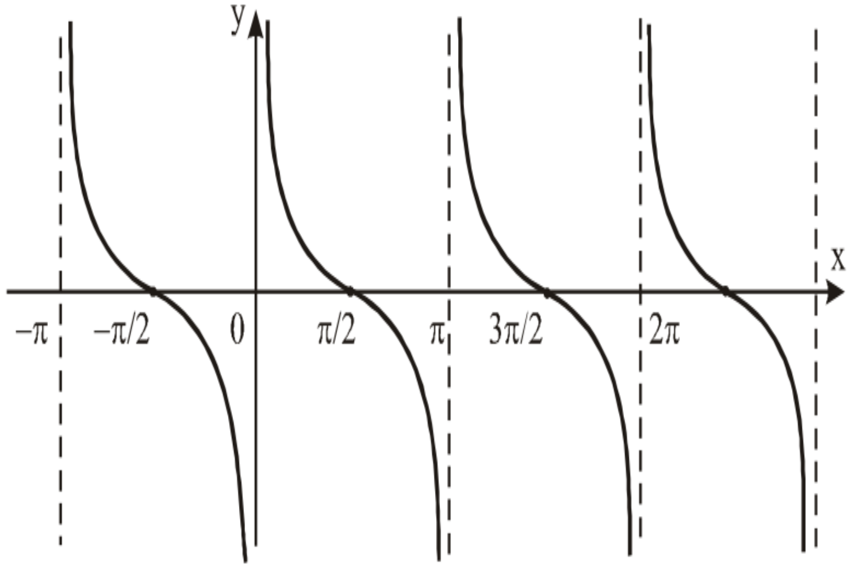



Рис.18 Котангенсоида

Обратимся теперь к основным свойствам функции $y = \operatorname{ctg} x$:

• Множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $x = \pi n, n \in Z$, составляют область определения функции.

• $y = \operatorname{ctg} x$ – нечетная функция, так как для любого $x$ выполняется равенство $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Из свойств нечетной функции вытекает симметрия графика функции относительно начала координат, что мы видим на рисунке 18.

• Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на любом интервале вида $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$ является убывающей.

• Функция $y = \operatorname{ctg} x$ не ограниченная.

• Наибольшее и наименьшее значения функции $y = \operatorname{ctg} x$ не определены.

• Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая: $T = \pi$.

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi)$$

• Область значений функции – интервал $(-\infty; +\infty)$.

• Функция $y = \operatorname{ctg} x$ является непрерывной функцией на любом из интервалов вида $(\pi n; \pi + \pi n)$. Прямые $x = \pi n$ представляют собой вертикальные асимптоты графика функции, определяемые точками $x = \pi n$, в которых функция претерпевает разрыв [12, 19].

Рассмотрим несколько примеров, в которых используются свойства функции, а также производится сжатие или растяжение графика $y = \operatorname{ctg} x$.

Пример 7. Построить графика функции $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$.

Решение. Чтобы выполнить построение графика искомой функции, достаточно график уже известной нам функции $y = \operatorname{ctg} x$ сдвинуть по оси $x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево. Затем полученный график функции $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ поднять по оси $y$ вверх на 3 единицы. На рисунке 19 пунктирной линией изображен вспомогательный график $y = \operatorname{tg} x$, сплошной линией выделен график функции $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$.

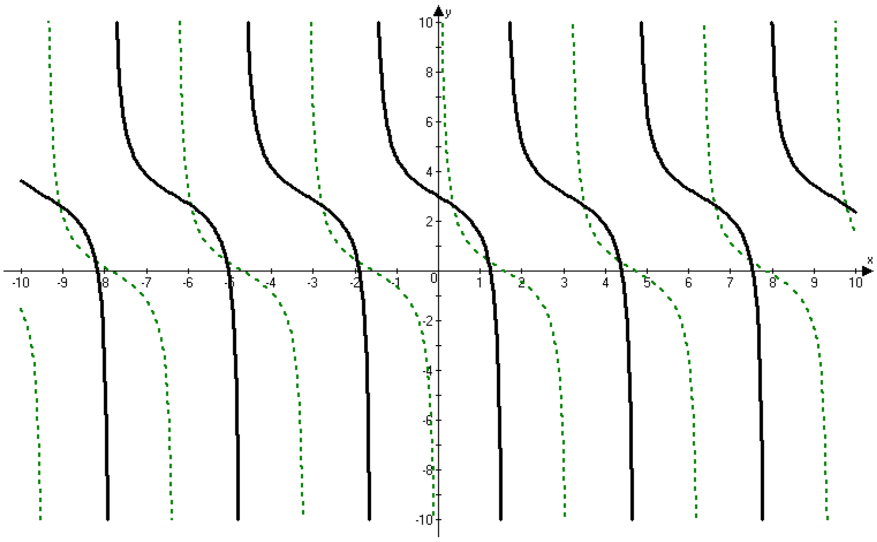



Рис.19 График функции $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$

Пример 8. Построить график функции $y = 1 - \operatorname{ctg} 2x$.

Решение. Сначала произведем сжатие графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ вдоль оси абсцисс в два раза (уменьшим расстояние от каждой точки графика $y = \operatorname{ctg} x$ до оси ординат в 2 раза), получим график функции $y = \operatorname{ctg} 2x$.

Затем для того, чтобы получить искомый график функции $y = 1 - \operatorname{ctg} 2x$, нужно полученный график функции $y = ctg\, 2x$ отразить симметрично относительно оси ординат и поднять на одну единицу вверх. На рисунке 20 пунктирной линией выделен график функции $y = \operatorname{ctg} x$, а сплошной линией изображен искомый график функции $y = 1 - \operatorname{ctg} 2x$.

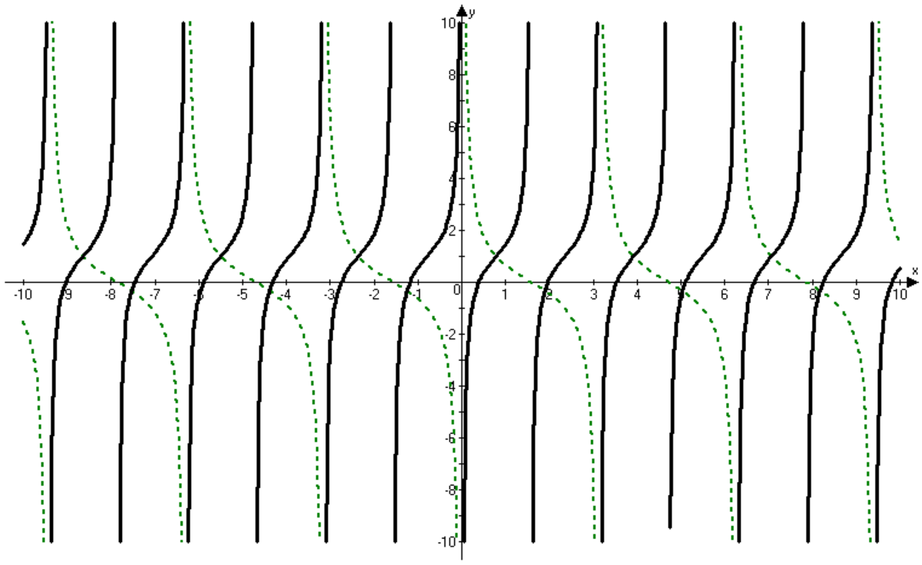



Рис.20 График функции $y = 1 - \operatorname{ctg} 2x$

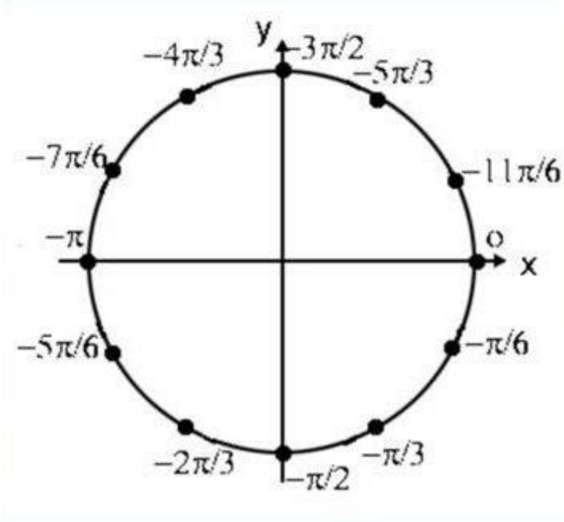
# ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

## 2.1 Методика изучения числовой окружности как второй модели числового множества

Окружность единичного радиуса с выбранным на ней началом отсчета и направлением обхода (по часовой стрелке или против часовой стрелки) называют числовой окружностью. Направление обхода против часовой стрелки считают положительным направлением. Определим отображение множества $R$ действительных чисел на единичную окружность, т.е. каждому действительному числу поставим в соответствие точку на числовой окружности. Для наглядного представления сначала множество $R$ отображают на числовую прямую. Затем числовую прямую «накручивают» на макет единичной окружности таким образом, что начало координат на прямой совпадает с началом отсчета на окружности, положительный луч «наматывается» против часовой стрелки, а отрицательный луч – по часовой стрелке [6].

Поскольку после полного оборота точка возвращается в исходное положение, то числам $t$ и $t+2\pi k, k \in Z$, соответствует одна и та же точка числовой окружности, где $2\pi$ – длина единичной окружности, $n$ – количество полных обходов окружности в ту или иную сторону. Более формально это отображение определяется следующим образом: множество $R$ разбивают на промежутки вида $2(n+1)\pi, n\epsilon Z$. Если $t \in [2\pi n; 2(n+1)\pi)$, то числу $t$ ставят в соответствие такую точку $M(t)$, что дуга $AM$, пробегаемая в положительном направлении, имеет длину $t-2\pi n$ [6].

Числовая окружность представляется как вторая геометрическая модель для множества действительных чисел. С первой моделью – числовой прямой – обучающиеся уже знакомы. Заметим, что правило, по которому устанавливается соответствие для числовой прямой, дословно почти такое же, что для окружности. Существенное отличие: на прямой каждая точка соответствует единственному числу, а на окружности это не выполняется [26].



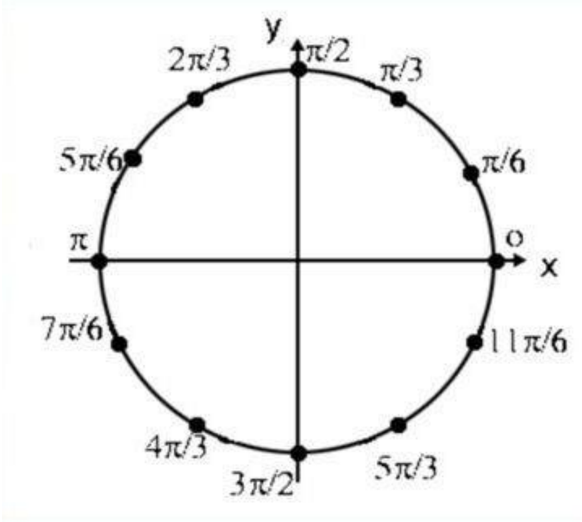




Рис.21 Обход по часовой стрелке Рис.22 Обход против часовой стрелки

Курс школьной тригонометрии базируется на модели числовой окружности. Для успешного усвоения материала очень важно уделить достаточно внимания изучению данной модели числового множества, что будет являться прочной основой для дальнейшего изучения тригонометрии.

В школьном курсе тригонометрии выделяют разного рода задачи, которые так или иначе связаны с числовой окружностью.

Первый тип задач. По заданным числам, выраженным в долях числа π, необходимо отыскать точки на числовой окружности и отметить их.

Пример 1. Найдите на числовой окружности точки, соответствующие числам $2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

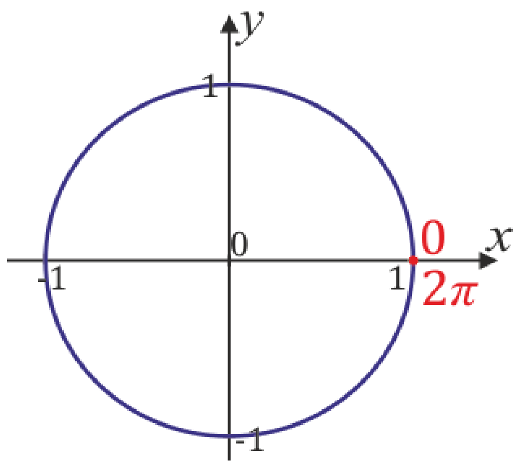



Рис.23 Точка $2\pi$

Решение. Чтобы отметить число $2\pi$, нужно пройти от 0 по числовой окружности расстояние равное $2\pi$ в положительном направлении, а так как длина окружности равна $2\pi$, то мы попадаем в эту же точку, делая при этом полный оборот. На рисунке 23 изображена данная точка.

Для обозначения на числовой окружности числа $\pi$, необходимо пройти от 0 в положительном направлении половину окружности, так как $\pi$ – половина от $2\pi$. На рисунке 24 отмечена точка, соответствующая числу $\pi$.

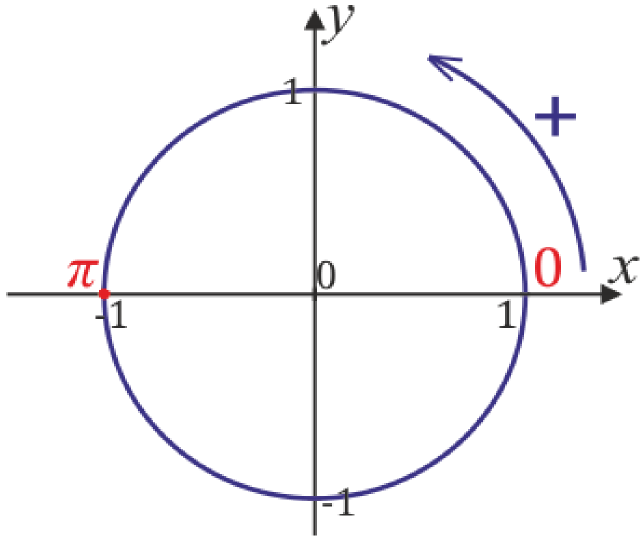
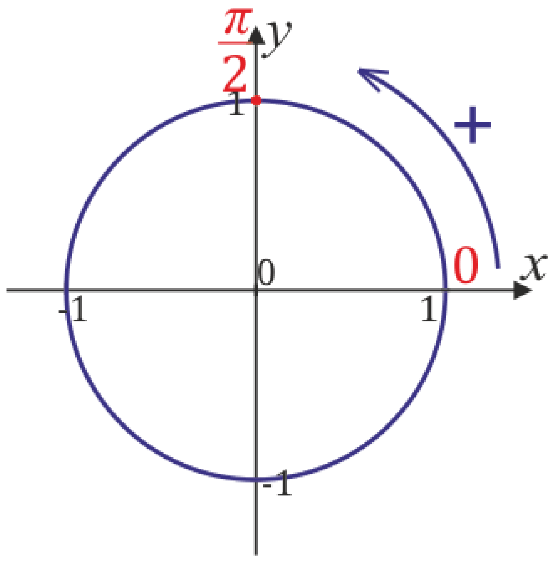



Рис.24 Точка $\pi$

Отметим точку $\frac{\pi}{2}$. $\frac{\pi}{2}$ – четверть окружности или половина от $\pi$. Значит, двигаемся в положительном направлении от 0 на расстояние, равное четверти окружности.



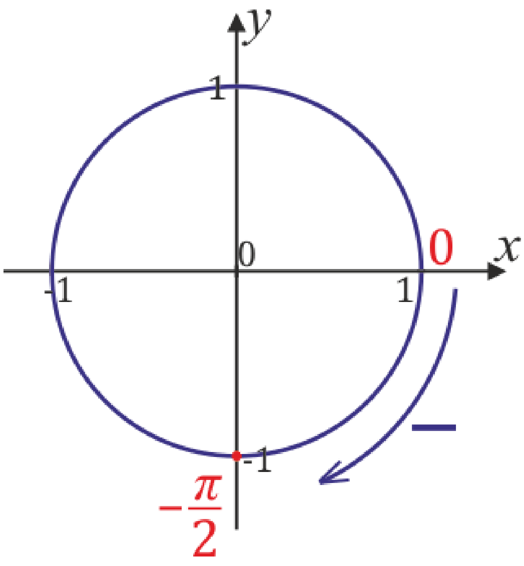




Рис.25 Точка $\frac{\pi}{2}$ Рис.26 Точка $-\frac{\pi}{2}$

Для того чтобы отметить точку $-\frac{\pi}{2}$, нужно двигаться на такое расстояние, как и в предыдущем случае только в отрицательном направлении. На рисунках 25 и 26 отмечены точки $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ соответственно.

Для того чтобы отметить число $\frac{3\pi}{2}$, переведем сначала его в смешанный вид $\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$. Следовательно, нужно от 0 в положительном направлении пройти сначала расстояние в половину окружности, а затем еще в четверть окружности. На рисунке 27 на числовой окружности отмечено число $\frac{3\pi}{2}$.

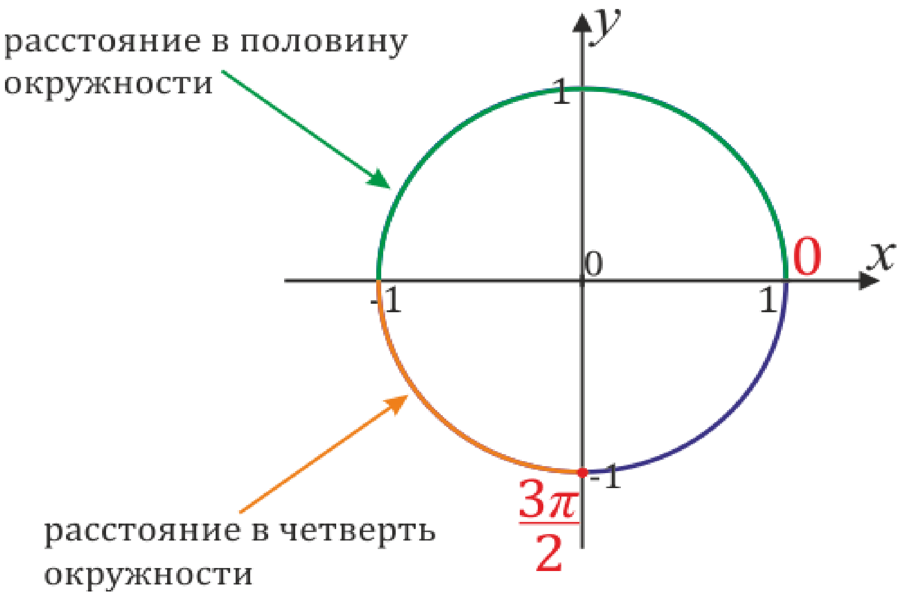



Рис.27 Точка $\frac{3\pi}{2}$

Пример 2. Определите с помощью числовой окружности точки, соответствующие числам $10\pi, -3\pi, \frac{7\pi}{2}, -\frac{21\pi}{2}$.

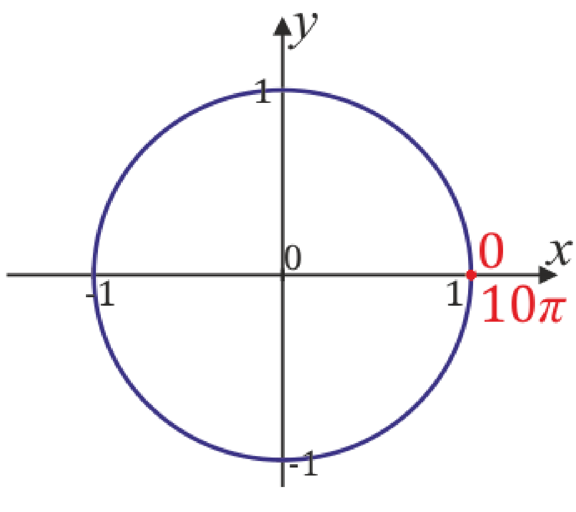



Рис.28 Точка $10\pi$

Решение. Представим $10\pi = 5 \cdot 2\pi$, то есть для того, чтобы отметить число $10\pi$ на числовой окружности, нужно от 0 пройти в положительном направлении расстояние, равное пяти окружностям. Мы окажемся в той же точке, из которой начали отсчет, просто сделаем пять оборотов. На рисунке 28 проиллюстрировано.

Чтобы отметить число на единичной окружности со значением больше $2\pi$ или меньше $-2\pi$, следует выделить из него целое четное количество $\pi$ и отбросить. Тем самым мы определим количество «пустых оборотов», не влияющих на положение числа на единичной окружности. Теперь отметим на окружности число $-3\pi = -\pi - 2\pi$, значит, числа $-\pi$ и $-3\pi$ на окружности расположены в одном месте. На рисунке 29 отмечено число $-3\pi$.

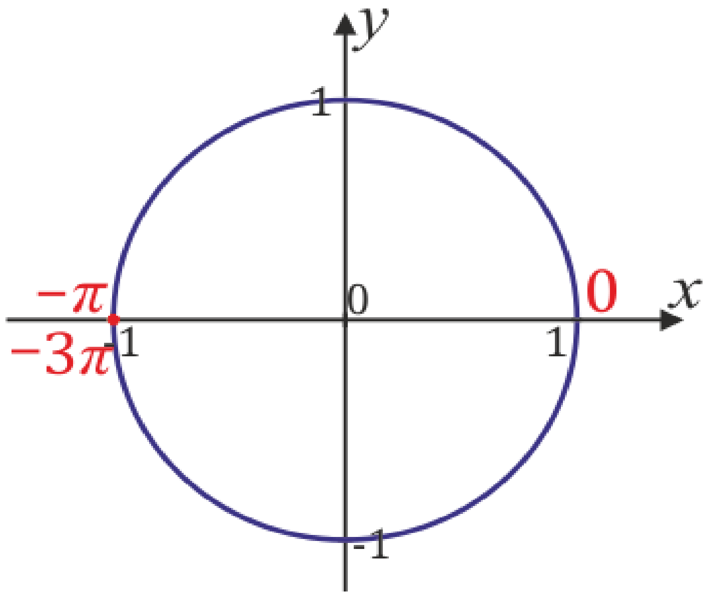



Рис.29 Точки $-\pi$ и $-3\pi$

Преобразуем $\frac{7\pi}{2} = \frac{6\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{2}$. Длину окружности $(2\pi)$ отбрасываем, получается, чтобы отметить число $\frac{7\pi}{2}$ нужно от 0 в положительном направлении пройти расстояние, равное $\pi + \frac{\pi}{2}$, т.е. сначала половину окружности и потом еще четверть. На рисунке 30 изображено число $\frac{7\pi}{2}$ , мы видим, что число $\frac{7\pi}{2}$ на единичной окружности совпадает с числом $\frac{3\pi}{2}$.

Представим $-\frac{21\pi}{2} = -\frac{20\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -10\pi - \frac{\pi}{2}$, т. е. для того, чтобы отметить число $-\frac{21\pi}{2}$ на числовой окружности, нужно от 0 пройти в отрицательном направлении расстояние, равное пяти окружностям и добавить еще четверть окружности. На рисунке 31 изображено число $-\frac{21\pi}{2}$,мы видим, что число $-\frac{21\pi}{2}$ на единичной окружности совпадает с числом $-\frac{\pi}{2}$.

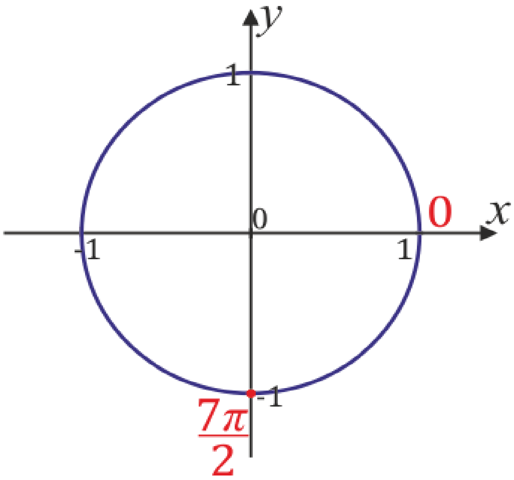



Рис.30 Точка $\frac{7\pi}{2}$

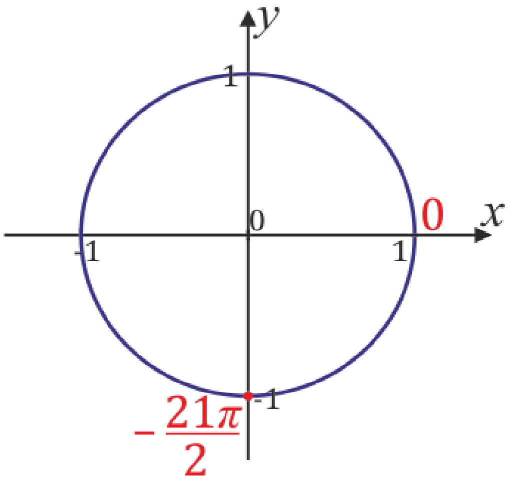



Рис.31 Точка $-\frac{21\pi}{2}$

Рассмотрим два главных макета числовой окружности, которые применяются на уроках математики: на первом из них все четверти разделены пополам на рисунке 32, а на втором – на три равные части на рисунке 33.

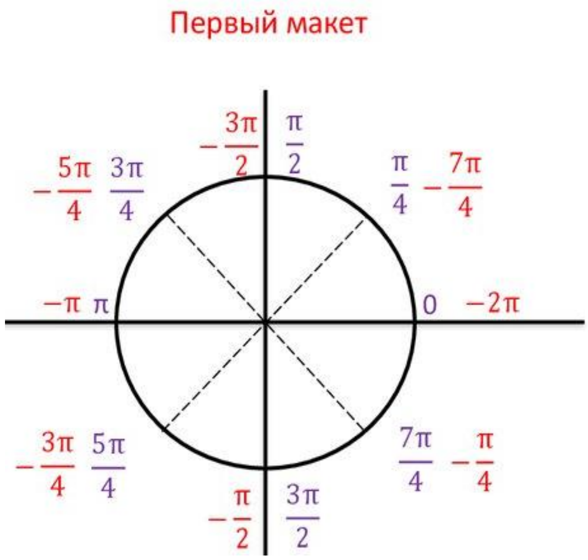



Рис.32 Деление пополам

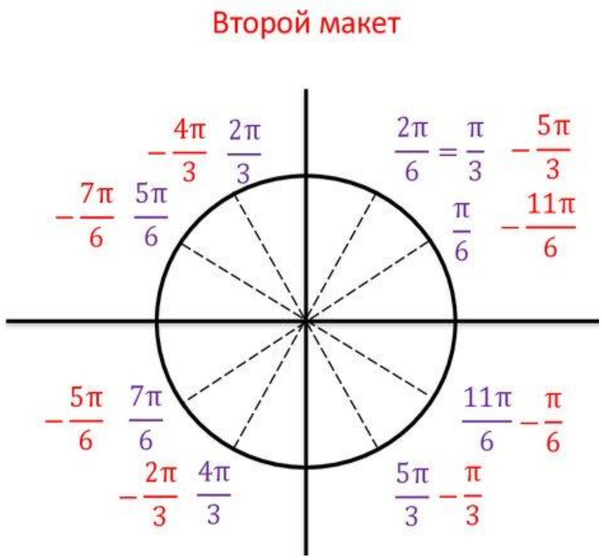



Рис.33 Деление на три равные части

Второй тип задач. Найти на числовой окружности точки, которые соответствуют определенным числам, не выраженным в долях числа $\pi$.

Пример 3. Определить с помощью числовой окружности точки, соответствующие числам 1,2,3,4,5,6, -7.

Решение. Для удобства и лучшей ориентации разделим каждую четверть числовой окружности на три равные части. Затем отметим приблизительно точки $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$, $E_5$ и $E_6$ таким образом, что длины дуг $AE_1$, AE2, AE3, AE4, AE5 и $AE_6$ соответственно равны числам 1, 2, 3, 4, 5 и 6. На рисунке 34 изображены (приблизительно) точки, которые соответствуют названным числам. Заметим, что $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$ – правильный шестиугольник, вписанный в окружность.

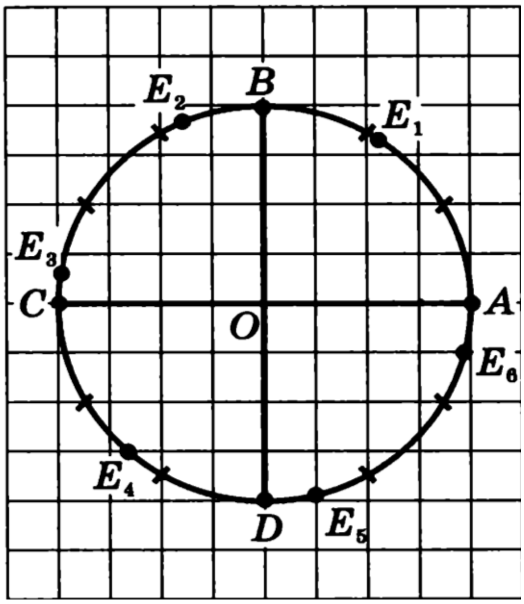



Рис.34 Точки на окружности

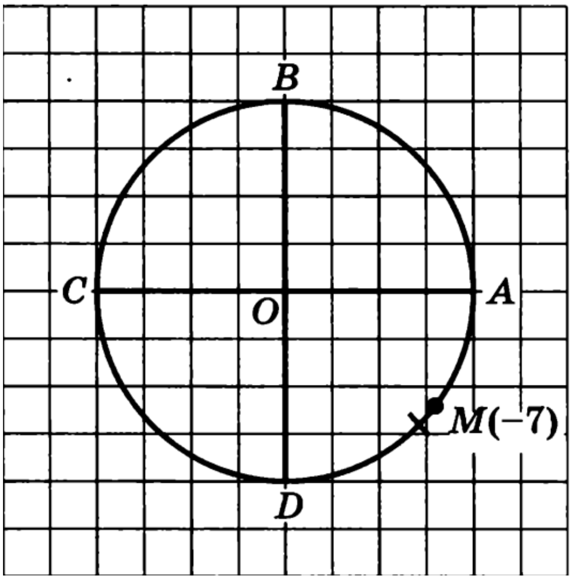


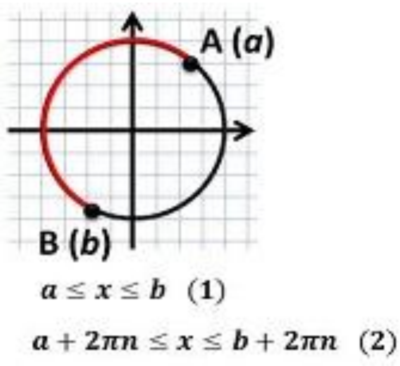
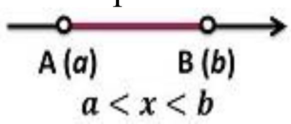
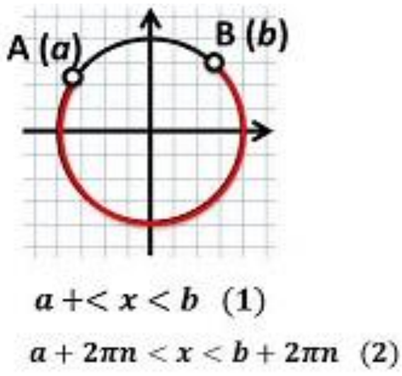

Рис.35 Точка M(-7)

Осталось отметить точку, соответствующую числу -7 на числовой окружности. Так как число отрицательное, то мы будем двигаться по часовой стрелке (в отрицательном направлении) от точки А. Если пройдем путь, равный длине одной окружности, то получим (приблизительно) 6,28, следовательно, нам необходимо продвинуться в этом же направлении на дугу, длина которой равна 0,72, что чуть меньше половины четверти окружности .Ее длина действительно меньше числа $\frac{\pi}{4}$, потому что $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, а $0{,}72 < 0{,}785$. Точка $\mathrm{M} = \mathrm{M}(-7)$ мы отметили на рисунке 35.

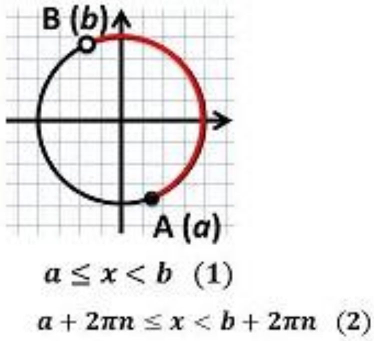
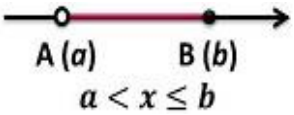
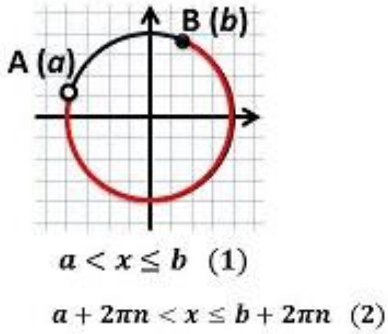
Третий тип задач. Соотнесение дуг числовой окружности и аналитических записей им соответствующих.

Решение данного типа задач предполагает действие по той же схеме, которую используют в 5-8 классах при работе с числовой прямой. Сначала определенному числу ставится в соответствие точка на числовой прямой, и, наоборот, каждой точке числовой прямой – определенное число. Для того чтобы записать промежуток числовой прямой, используют двойные неравенства. В таблице 3 для сравнения приведены примеры изображения числовых промежутков на числовой прямой и на числовой окружности [23].

Таблица 4 Дуги числовой окружности и числовые множества им соответствующие

| Числовой промежуток | Числовая прямая | Числовая окружность |
|---|---|---|
| 1) Отрезок | отрезок AB<br><br> | дуга AB<br><br> |
| 2) Интервал | интервал AB<br><br> | открытая дуга AB<br><br> |

Продолжение таблицы 4

| Числовой промежуток | Числовая прямая | Числовая окружность |
|---|---|---|
| 3)Полуинтервал |   |   |
| |   |   |

Из методических соображений при изучении числовой окружности вводятся термины «ядро аналитической записи дуги» и «аналитическая запись дуги», которые не являются общепринятыми, но все-таки используются в математическом языке. В таблице 3 под цифрой 1 приведена формальная запись ядра аналитической записи дуги, а под цифрой 2 – аналитическая запись дуги [20,27].

Четвертый тип задач. С помощью макета единичной окружности определять декартовы координаты точек числовой окружности.

Важной целью является нахождение координат точек числовой окружности, отмеченные на двух основных макетах (рис.32, 33). Определим координаты точек: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, которые представлены на первой модели. Обозначим $M_1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)$, являющейся серединой первой четверти. Рассмотрим прямоугольный треугольник $OM_1P$, изображенный на рисунке 36 ($M_1P$ – дополнительно построенный перпендикуляр из точки $M_1$). Заметим, что дуга

$AM_1$ составляет половину длины дуги $AB$, следовательно, $\Delta OM_1P$ – равнобедренный прямоугольный треугольник и $\angle AOM_1 = 45°$.Значит, катеты равны, откуда делаем вывод, что абсцисса и ордината точки $M_1$ равны друг другу ($x = y$). Кроме того, точка $M_1(x; y)$ лежит на окружности, из чего следует, что координаты этой точки должны удовлетворять уравнению числовой $x^2 + y^2 = 1$.

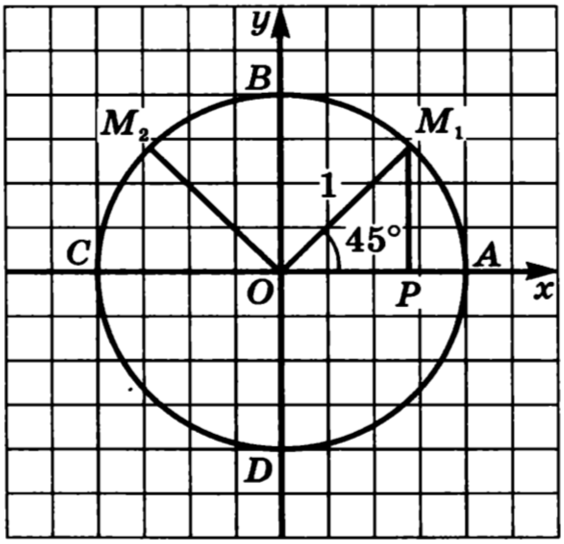



Рис.36 Точка $M_1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)$ на окружности

Для того, чтобы найти координаты точки $M_1$, достаточно решить систему, состоящую из двух уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Воспользуемся методом подстановки: заменим $y$ на $x$ во втором уравнении системы. После подстановки получим уравнение $x^2 + x^2 = 1$; $x^2 = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (точка расположена в первой четверти, значит, ее абсцисса положительная). Так как $x = y$, то и $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В итоге $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Отсюда делаем вывод, что точка $M_1$, соответствующая числу $\frac{\pi}{4}$ на числовой окружности, в прямоугольной системе координат $xOy$ имеет координаты $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Существует два способа записи координат точки: если устанавливается соответствие между точкой числовой окружности и числом $t$, то записывают $M(t)$; если записано $M(x; y)$, то говорят, что числа $x$ и $y$ – соответственно абсцисса и ордината точки $M$. Таким образом, число $t$ называют «криволинейной» координатой точки $M$ на числовой окружности, а пару $(x; y)$ – декартовыми координатами точки $M$. Во избежание трудностей, которые могут возникнуть в дальнейшем, немало важно заострить внимание обучающихся на этом моменте. Обратимся к рисунку 36, на котором отмечена точка $M_2$ – середина второй четверти, соответствующая на числовой окружности числу $\frac{3\pi}{4}$. Обратим внимание, что абсциссы и ординаты этой точки по модулю имеют те же значения, что и у точки $M_1$. Напомним, что во второй четверти $x < 0, y > 0$.

Делаем вывод: $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. На рисунке 36 отмечена точка $M_2$. Аналогично находим координаты точки середины третьей четверти и координаты точки середины четвертой четверти $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right) = M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

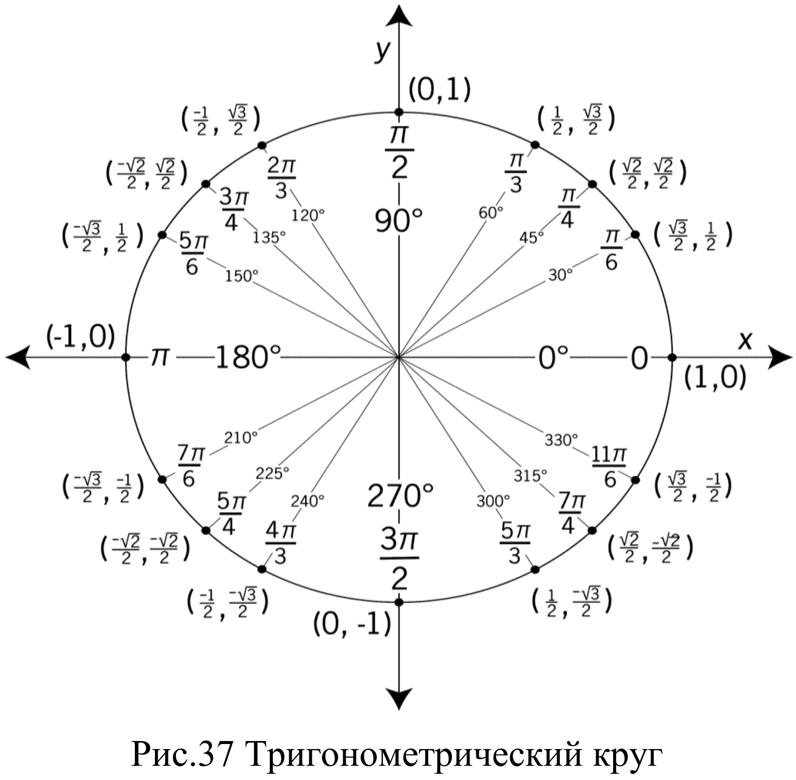



Рис.37 Тригонометрический круг

Для второго макета модели числовой окружности, на которой четверти поделены на три равные части, поступаем таким же образом и находим для каждой точки криволинейную координату и декартовы координаты. На рисунке 37 представлены точки окружности и соответствующие им абсцисса и ордината [17].

Пример 4. Определите декартовы координаты данных точек числовой окружности $T_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)$, $T_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$, $T_3(49\pi)$.

Решение. Во всех трех случаях воспользуемся утверждением о том, что числам $t$ и $t+2\pi k, k\in Z$ соответствует одна и та же точка на числовой окружности. Постараемся представить каждое число в виде $t+2\pi k, k\in Z$.

1) $\frac{45\pi}{4}=\frac{45}{4}\cdot\pi=\left(10+\frac{5}{4}\right)\cdot\pi=10\pi+\frac{5\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 5$. Значит, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (см. рис.37) имеем: $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $T_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)=T_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2) $-\frac{37\pi}{3}=-\frac{37}{3}\cdot\pi=-\left(12+\frac{1}{3}\right)\cdot\pi=-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot(-6)$. Значит, числу $-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка на числовой окружности, что и числу $-\frac{\pi}{3}$. Числу $-\frac{\pi}{3}$ на числовой окружности соответствует та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (см. рис.37) имеем: $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, $T_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)=T_2\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3) $49\pi=48\pi+\pi=\pi+2\pi\cdot 24$. Значит, числу $49\pi$ соответствует та же точка на числовой окружности, что и числу $\pi$. Следовательно, с помощью рисунка 37 получаем $T_3(49\pi)=T_3(-1;0)$.

Пример 5. Дана точка $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найти координаты точек $M_1$, $M_2$, $M_3$, симметричных относительно осей координат и точке $O$.

Решение. Если мы разделим каждую дугу числовой окружности разделим на три равные части, каждая часть будет иметь длину $\frac{\pi}{6}$. Длина дуги *AM* будет составлять 2 части. Т.е. будет равна $\frac{\pi}{3}$. С учетом симметрии получим следующие результаты, которые изображены на рисунке 38. Для точки $M_1$: $t = -\frac{\pi}{3}; x = \frac{1}{2}; y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Для точки $M_2$: $t = \frac{2\pi}{3}; x = -\frac{1}{2}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Для точки $M_3$: $t = -\frac{2\pi}{3}; x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

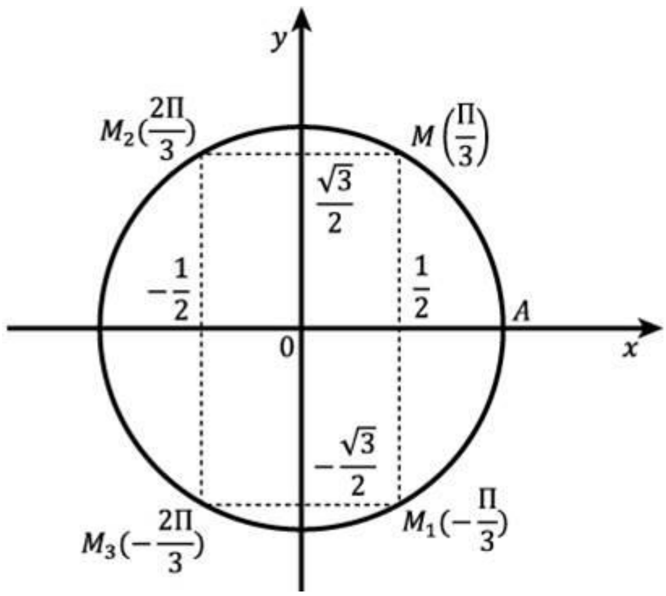



Рис.38 Координаты симметричных точек относительно осей и относительно центра

Пятый тип задач. Нахождение точек на числовой окружности по одной из координат (абсциссе или ординате).

Пример 6. Найдите на числовой окружности точки, абсцисса которых $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и запишите, соответствующие им числа $t$.

Решение. Точки пересечения числовой окружности и прямой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ обозначим $M$ и $P$ (рис. 39).

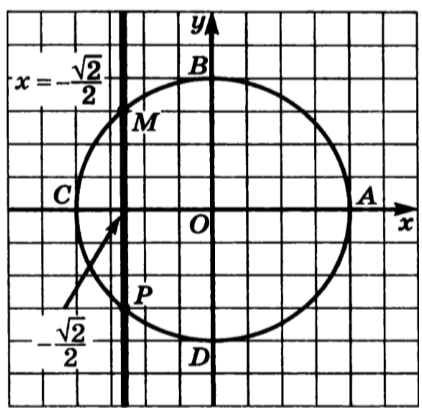



Рис.39 Точки пересечения числовой окружности и прямой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Точка $M$ находится во второй четверти числовой окружности и соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$. Также точке $M$ соответствует любое число вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Точка $P$ соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Таким образом, все числа, которые имеют абсциссу $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, можно записать в виде: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Замечание. Рассуждения в примере 5 можно проводить иначе: расположенная в третьей четверти окружности точка $P$ соответствует числу $-\frac{3\pi}{4}$, а следовательно, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Получим две серии значений: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки $M$) и $t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки $P$). Это решение лучше, чем предыдущее тем, что обе серии значений можно охватить одной формулой: $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

При решении четвертного типа задач устанавливаются декартовы координаты всех точек, которые отмечены на первом и втором основных макетах (рис. 32 и 33). Фактически данный тип задач готовит обучающихся к вычислению значений тригонометрических функций.

## 2.2 Методика изучения тригонометрических функций

В школе курс тригонометрии разделен на две части: одна часть изучается в курсе геометрии, а вторая часть – в курсе алгебры и начал анализа. Первоначальное знакомство обучающихся с тригонометрическими функциями углового аргумента происходит в курсе геометрии 8-9 классов. Затем в курсе алгебры и начал анализа в 10-11 классах происходит систематизация и расширение знаний о тригонометрических функциях. Весь курс можно разбить на важные компоненты: тригонометрические функции, тригонометрические уравнения и неравенства, тригонометрические формулы, с помощью которых производят необходимые преобразования.

Уменьшение количества часов, отводимых для каждой из составляющих курса тригонометрии, начинает отражаться на качестве усвоения материала обучающимися. Для лучшего понимания и усвоения материала, а также отработки практических навыков применения новых знаний, целесообразно начать изучение темы «Тригонометрия» с «простых моделей» (которыми являются элементарные тригонометрические функции), затем перейти к более «сложным моделям» (сложные выражения, которые требуют преобразований с помощью тригонометрических формул) [18,26].

Основным вопросом для любого класса функций является изучение свойств функций, входящих в этот класс. В пункте 1.3 мы подробно рассмотрели графики и свойства основных тригонометрических функций: область определения функции, область значений функции, периодичность, четность и нечетность, интервалы монотонности, экстремумы функции, непрерывность функции [25].

Построение графика функции $y = \sin x$ осуществляется по следующей простой схеме:

1) на отрезке $[0; \pi]$, по так называемым, «точкам»;

2) на отрезке $[-\pi; 0]$ с помощью симметрии относительно начала координат в силу нечетности функции;

3) построение всего графика осуществляется с использованием свойства периодичности функции.

Пример 1. Разбить данный отрезок на два отрезка таким образом, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом – убывала: 1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

Решение. Во всех четырех случаях для решения поставленной задачи будем использовать свойства функции $y = \sin x$ (промежутки возрастания и убывания функции). В результате получим:

1) $[0; \pi]$ – на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция возрастает, на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ – убывает.

2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ – на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция убывает, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ – возрастает.

3) $[-\pi; 0]$ – на отрезке $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ функция убывает, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ – возрастает.

4) $[-2\pi; -\pi]$ – на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ функция убывает, на отрезке $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ – возрастает.

Пример 2. Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа: 1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;
3) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$; 4) $\sin 7$ и $\sin 6$.

Решение. При решении данного типа задач используют свойство монотонности функции $y = \sin x$: сначала определяют, какому интервалу принадлежит число (можно сделать с помощью выделения полного оборота – $2\pi$), а затем смотрят, убывает или возрастает функция на этом интервале.

1) Функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ и $\frac{7\pi}{10} < \frac{13\pi}{10}$, значит, $\sin\frac{7\pi}{10} > \sin\frac{13\pi}{10}$ .

2) Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ и $\frac{11\pi}{7} < \frac{13\pi}{7}$, следовательно, $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$ .

3) Функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$ и $-\frac{8\pi}{7} < -\frac{9\pi}{8}$, значит, $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$.

4) Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ и $6 < 7$, таким образом, $\sin 7 > \sin 6$.

Напомним, что построение графиков и исследование свойств функций можно проводить двумя способами: построение графика по точкам и исследование свойств функций с помощью графической интерпретации, либо построение графика происходит уже после полного исследования функции, наглядное представление о свойствах функции обучающиеся получают с помощью анализа поведения функции на числовой окружности [22].

Построение графика функции $y = \cos x$ можно осуществить двумя способами: по точкам с помощью того же плана, что и для функции $y = \sin x$ или с помощью преобразования графика функции $y = \sin x$.

Пример 3. Построить график функции $y = |\cos x|$.

Решение. Обратим внимание на то, что $\cos x$ стоит под знаком модуля, а значит, учитывая одно из основных свойств модуля, получим $|\cos x| \geq 0$. Для того чтобы построить график функции $y = |\cos x|$, воспользуемся элементарными преобразованиями графика основной функции $y = \cos x$. Все отрицательные «полуволны», где $\cos x < 0$ следует отразить относительно оси $Ox$. На рисунке 40 пунктирной линией выделены «полуволны» графика функции $y = \cos x$, а сплошной линией изображен искомый график функции $y = |\cos x|$.

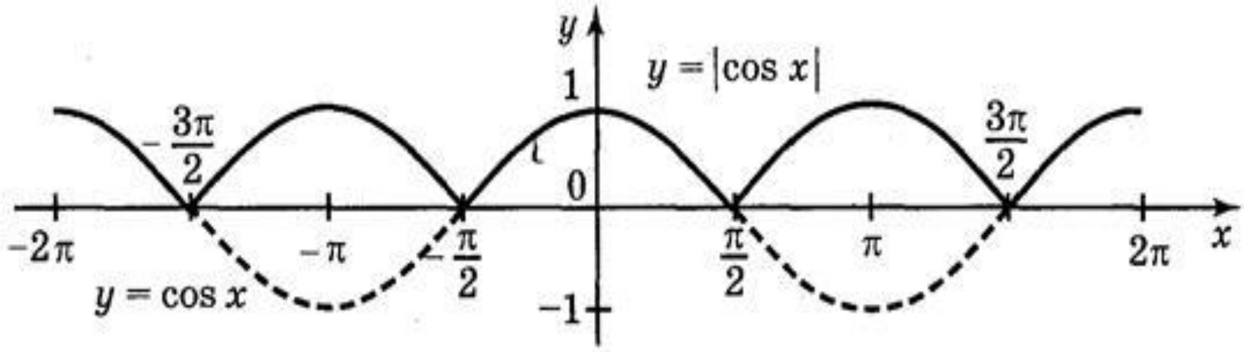



Рис.40 График функции $y = |\cos x|$

Для правильного понимания, как дается определение понятия функции, представления методологической сущности этого понятия, очень полезными являются задания на построение, так называемых, кусочных функций. Напомним, что собой представляют кусочные функции – это функции, заданные разными формулами на разных промежутках. Наиболее часто именно кусочные функции используют для описания математических моделей реальных ситуаций. Их использование способствует преодолению обычного заблуждения многих обучающихся, отождествляющих функцию только с ее аналитическим заданием в виде некоторой формулы, и готовит как в пропедевтическом, так и в мотивационном плане понятие непрерывности. При использовании учителем на уроках блока упражнений, включающих кусочные функции, у обучающихся будет поддерживаться интерес, а также появится возможность самостоятельно конструировать примеры, что будет повышать творческую активность. Можно отметить и воспитательный эффект: это умение принять решение, зависящее от правильной ориентировки в условиях, это и видение своеобразной эстетики графиков кусочных функций [18].

Пример 4. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{если } x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x, \text{если } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решение. Обратим внимание, что задана кусочная функция с разрывом в точке $\frac{\pi}{2}$ , т.е. имеется разрыв в граничной точке. Функция называется кусочной, потому что значение кусочков этой функции в граничной точке не совпадает: при $x = \frac{\pi}{2}$ на первом кусочке $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; при $x = \frac{\pi}{2}$ на втором кусочке $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. На интервале $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$ эта функция имеет вид $f(x) = \sin x$, а на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$ имеет вид $f(x) = \cos x$. На рисунке 41 представлен график искомой функции.

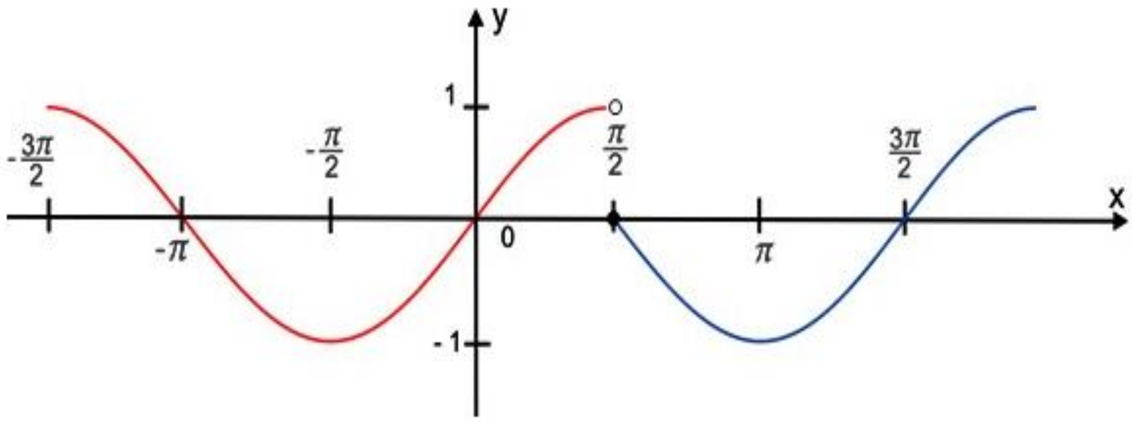



Рис.41 График функции $f(x)$

Функция $y = tg\ x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$, является нечетной и периодической с периодом $\pi$. С учетом свойства периодичности функции будет достаточно построить ее график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения, используя периодичность функции [1]. В пункте 1.3 уделено достаточно внимания основным свойствам функции $y = \operatorname{tg} x$, а также представлен ее график.

Так же, как и для синуса и косинуса, имеет смысл включить эти свойства в систему упражнений.

Пример 5. Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если $x$ принадлежит промежутку: 1) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0; \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Для нахождения множества значений функции $y = \operatorname{tg} x$ на каждом из промежутков воспользуемся двойным неравенством, а также свойством нечетности функции.

1) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right], -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \leq y \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}, -1 \leq y \leq \sqrt{3}$;

2) $x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right), \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} < y < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}, y > -1$;

3) $x \in (0; \pi)$, $\operatorname{tg} 0 < y < \operatorname{tg} \pi$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ – не существует, $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

4) $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \leq y \leq \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ – не существует, $y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 6. Найдите период функций $y = \operatorname{tg} 2x$ и $y = \operatorname{tg}\frac{4}{3}\pi$.

Решение. Если под знаком функции стоит число $x$, умноженное на какой-то коэффициент, то, чтобы найти период данной функции, необходимо разделить стандартный период (для функции $y = \operatorname{tg} x$ основной период равен $\pi$) разделить на этот коэффициент.

Для функции $y = \operatorname{tg} 2x$ получим, что период составляет $\frac{\pi}{2}$. Для функции $y = \operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi$ период равен $\frac{3\pi}{4}$.

Пример 7. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на четность, если: а) $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x + x$.

Решение. Для того чтобы проверить функцию на четность/нечетность необходимо проверить два условия: 1) $f(-x) = f(x)$; 2) $f(-x) = -f(x)$.

Если выполняется первое из указанных условий, то функция является четной. Если выполняется второе условие, то функция нечетная. Имеет место случай, когда оба условия не выполняются, тогда функция является ни четной, ни нечетной.

а) $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x$;

$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) - \cos(-x) = -\operatorname{tg} x - \cos x$. Получили, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Так как не выполняется ни одно из условий, значит, функция является ни четной, ни нечетной.

b) $f(x) = \operatorname{tg} x + x$;

$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) + (-x) = -(\operatorname{tg} x + x) = -f(x)$. Выполняется одно из условий: $f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция нечетная.

Следующая тригонометрическая функция, о которой пойдет речь, это функция $y = \operatorname{ctg} x$. Котангенс не определен в точках $x = \pi n, n \epsilon Z$, в которых синус обращается в нуль. Область значения этой функции есть множество всех действительных чисел. Период функции $y = \operatorname{ctg} x$ такой же, как и у функции $y = \operatorname{tg} x$, $\pi$. Аналогично тангенсу, котангенс является нечетной функцией, т.е. $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ симметричен относительно начала координат [30].

Пример 8. Известно, что $\operatorname{ctg}(7\pi - x) = \frac{5}{7}$. Найдите $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$.

Решение. Наименьший положительный период для котангенса, как известно, равен $\pi$. Используя основные свойства функции $y = ctg\, x$, преобразуем наше выражение следующим образом

$$\operatorname{ctg}(7\pi - x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

С учетом преобразований наше выражение примет вид: $-\operatorname{ctg} x = \frac{5}{7}$. Получим, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{7}$. Так как тригонометрические функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ связаны соотношением $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$, то $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{5}$.

Пример 9. Постройте график функции

$$y = 2\cos^2(\operatorname{ctg} x) + 2\sin^2(\operatorname{ctg} x).$$

Решение. Дана сложная функция, которую можно преобразовать, и с легкостью построить требуемый график функции с учетом области определения функции $y = \operatorname{ctg} x$. Преобразование функции выглядит следующим образом $2\cos^2(\operatorname{ctg} x) + 2\sin^2(\operatorname{ctg} x) = 2\left(\cos^2(\operatorname{ctg} x) + \sin^2(\operatorname{ctg} x)\right) = 2 \cdot 1 = 2$. Данный график изображен на рисунке 42.

$$y = 2\cos^2(\operatorname{ctg} x) + 2\sin^2(\operatorname{ctg} x) = \begin{cases} 2, \\ x \neq \pi k, k\epsilon Z. \end{cases}$$

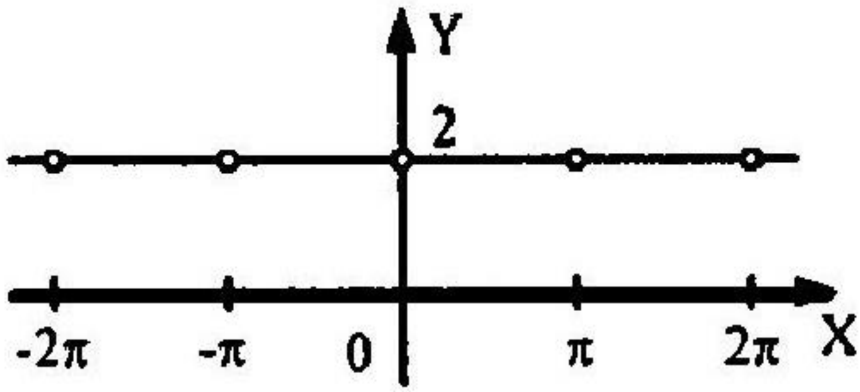



Рис.42 График данной функции

### 2.3 Методические рекомендации по изучению темы «Тригонометрические функции и их свойства»

При изучении тригонометрических функций в старших классах обучающиеся должны усвоить их свойства, научиться строить графики и свободно оперировать формулами, связывающими эти функции. Обучение нужно строить так, чтобы все эти вопросы рассматривались параллельно и, по возможности, в течение более длительного времени [10].

Вначале рассматривается понятие об углах и дугах любой величины, радианном их измерении, запись углов и дуг в общем виде и определяются частные значения их по формулам. Установив, соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек единичной окружности, можно сразу после определения тригонометрических функций рассматривать их как функции любого вещественного числа. Определяя тригонометрические функции некоторых углов, можно одновременно рассматривать изменение этих функций по четвертям и схематически вычерчивать их графики [10].

Тригонометрия изучает свойства особого рода функций, обозначаемых $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и т.д. и называемых тригонометрическими функциями. Эти функции имеют многочисленные применения в разных областях математики и других наук. Естественно подразделить тригонометрию на две части: изучение тригонометрических функций и их свойств; применение этих функций к разным вопросам (где тригонометрические функции являются аппаратом, дающим возможность решить вопрос) [14].

Изучение тригонометрических функций, разумеется, должно начинаться с их определения в геометрической интерпретации. Затем рассматриваются свойства каждой функции и на основании изученных свойств строится график функции. При построении графиков более сложного аргумента, прежде всего, необходимо выработать у обучающихся общие представления о графиках этих функций: периоде, области изменения, нулевых точках. Графики функций сложного аргумента надо сравнивать с соответствующими графиками простейших тригонометрических функций, указывать на их общность и отличие. При построении графиков функций кратных углов надо обратить внимание обучающихся на определение периода этих функций. Обучающиеся должны научиться по графикам читать и записывать в общем виде интервалы монотонности, знакопостоянства, нулевые точки, наибольшее и наименьшее значения тригонометрических функций [4].

Трудность первых уроков по тригонометрии заключается в большом количестве новых понятий, терминов, определений и в некоторой искусственности этих понятий. Если обучающиеся познакомились с пропедевтикой тригонометрии, то перечисленные трудности значительно уменьшаются, но в известной степени все же остаются. Чтобы обойтись меньшим числом понятий, терминов и определений, целесообразно с первых же уроков ввести весь круг, а не только первый квадрант; так следует поступить даже в том случае, когда предполагается изучать функции только в первом квадранте. Введение тригонометрического круга позволяет ввести определения тригонометрических линий в такой редакции, которая будет нужна и при дальнейшем обобщении понятий [22].

В большинстве учебников мы имеем примерно такое расположение материала: после некоторых необходимых предварительных указаний (обобщение понятий угла и дуги, разные способы измерения углов) даются определения тригонометрических функций, притом самые общие, т.е. для любых действительных значений аргумента и устанавливаются основные соотношения между значениями этих функций, соответствующими одному и тому же значению аргумента. Далее рассматривается приведение функций к наименьшему положительному аргументу, затем теоремы сложения и следствия. Эти сведения о тригонометрических функциях позволяют показать, как составляются таблицы их значений [5].

Этому «поступательному» или «линейному» расположению материала, когда каждый вопрос берется сразу в полной его общности и рассматривается в рамках намеченной программы полностью, противопоставляется «концентрическое» его расположение, когда тригонометрические функции определяются и изучаются сначала только в ограниченной области значений аргумента, затем берутся геометрические их приложения, а после делается обобщение [5].

Концентрическое изучение в этом случае имеет ряд неоспоримых преимуществ. Во-первых, тригонометрические функции, связанные с определенным интервалом изменения аргумента кажутся обучающимся более конкретными и простыми; во-вторых, при концентрическом расположении материала трудности, связанные с изучением функций, распределяются на большой отрезок курса, а это значит, что преодоление трудностей облегчается; в-третьих, при концентрическом изучении приходится неоднократно повторять ряд определений, доказательств и формул, изученных в предшествующем концентре, что, как показывает опыт, способствует лучшему запоминанию материала [22].

Концентры определяются этапами обобщения аргумента. Число концентров может быть различно: оно варьируется в зависимости от тех конкретных условий, в которых изучается курс. Большее число концентров можно допустить в средней школе при первичном, неторопливом развертывании курса тригонометрии, при повторных и обзорных курсах, имеющих небольшое число часов. Для обучающихся, хорошо развитых в математическом отношении, число концентров может быть сведено к минимуму [22].

Вопрос о преимуществах линейного и концентрического изложения тригонометрии не считается окончательно решенным. Опыт включения главы о тригонометрических функциях острого угла в связи с решением прямоугольных треугольников в курс геометрии 8 класса показывает, что заметного снижения трудностей усвоения основного курса отсюда не получается. Есть основания полагать, что при несколько большей затрате времени возможно прочное усвоение начальных сведений по тригонометрии, используемых и помогающих лучше усвоить основной курс тригонометрии в дальнейшем. Что же касается разделения на концентры основного курса, то следует с полной определенностью признать, что оно себя не оправдывает: и ясность представлений обучающихся и быстрота работы только выигрывают, если каждый вопрос программы разбирается сразу до конца [5].

В курсе алгебры и начал анализа осуществляется последний, заключительный этап изучения тригонометрических функций. В него входят:

1) формирование представлений об углах с градусной мерой, большей $360^0$; формирование представлений об углах с положительной и отрицательной градусными мерами; перевод этих градусных мер в радианы (положительные и отрицательные действительные числа);

2) закрепление представлений обучающихся о радианной мере угла; отработка навыков перехода от градусной меры к радианной и наоборот;

3) описание тригонометрических функций на языке радианной меры угла;

4) утверждение расширенной функциональной точки зрения на $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ (трактовка $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ как функций действительного аргумента, установление области определения, области значений, построение графика функции, установление промежутков монотонности, знакопостоянства и т.д.);

5) повторение известных и ознакомление с новыми тригонометрическими тождествами, ключом к которым является тождество (формула косинуса суммы двух аргументов): $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Для поддержания интереса к математике у обучающихся иногда полезно проводить уроки закрепления и систематизации знаний в виде игры. В качестве примера рассмотрим методическую разработку обобщающего урока-игры по математике, который помогает активизировать и разнообразить учебную деятельность обучающихся.

**Урок-игра по математике для 10 класса**

**Тема:** «Тригонометрические функции»

**Форма:** обобщающий урок-игра «Путешествие в страну «Тригонометрия»

**Цель:** развитие личностных качеств обучающихся и активизация их мыслительной деятельности, поддержка и развитие творческих способностей и интереса к предмету.

**Задачи:**

**Учебные:**

1. Повторить материал по разделу «Тригонометрия»: определение тригонометрических функций, связь между градусной и радианной мерой угла, свойства тригонометрических функций, основные формулы тригонометрии, вычислений значений тригонометрических выражений.

2. Развитие у обучающихся умений работы с учебной информацией, развитие умений планировать и контролировать свою деятельность.

**Развивающие:**

1. Развивать у обучающихся память, аналитические способности и интерес к математике.

2. Выявлять обучащихся, которые обладают творческими способностями, стремятся к углублению своих знаний по математике.

3. Развивать кругозор о применении тригонометрии в других дисциплинах.

4. Развитие логического мышления, быстроты реакции, внимания.

**Воспитательные:**

1. Воспитывать самостоятельность мышления, волю, упорство в достижении цели, чувство ответственности за свою работу перед коллективом.

2. Воспитание интереса к занятиям математикой, интерес к интеллектуальному труду.

3. Воспитание чувства ответственности, коллективизма и взаимопомощи, самостоятельности, уверенности в своих силах.

**Прогнозируемый результат:**

1. Эмоциональные переживания, радость победы, огорчение при поражении, удовлетворение или неудовлетворение собой или другими, т. е. проведенное мероприятие не должно оставить учеников равнодушными.

2. Подтверждение имеющихся у обучающихся базовых знаний по математике.

3. Выявление круга обучающихся, стремящихся к углублению знаний по математике.

4. Расширение кругозора обучающихся в области тригонометрии.

5. Развитие коммуникативных умений.

**Оборудование:** карточки с заданиями, ручки, карандаши, грамоты.

**Подготовительный этап:** учитель подготавливает карточки с заданиями, поля для морского боя, рисунки, вопросы.

## Ход урока-игры

**1.Организационный этап (3 мин)**

Учитель: Мы завершили изучать большой раздел математики, который называется «Тригонометрия». Знание тригонометрических функций, их свойств, умение вычислять значения тригонометрических функций пригодятся вам на уроках математики в дальнейшем, а также поможет вам и при изучении других дисциплин – физики, электротехники.

Сегодня у нас обобщающий урок по теме «Тригонометрия», на котором вы продемонстрируете, как усвоили учебный материал. Урок пройдет в необычной форме, в виде небольшого путешествия по стране «Тригонометрия». Итак, в добрый путь!

В мероприятии участвуют две команды по семь человек. Перед началом мероприятия проводится распределением по командам с помощью жеребьевки и выбор капитана каждой команды. Капитан должен быть ответственным, коммуникативным, справедливым, находчивым.

**2.Основной этап (40 мин)**

### 2.1 Блиц-турнир (7 мин)

Командам громко в быстром темпе зачитываются вопросы блиц-турнира. Представители команд, если знают ответ, поднимают руку и отвечают на вопрос. В случае правильного ответа команда получает 1 балл.

1. Что изучает тригонометрия?
2. Какой четверти принадлежит угол $\frac{5\pi}{3}$?

3. Чему равно число $\pi$?
4. Основное тригонометрическое тождество;
5. Область определения функции $y = \sin x$;
6. Область значений функции $y = \cos x$;
7. Угол, равный $\frac{1}{360}$ части полного оборота называется…;
8. График функции тангенс называется …
9. Период функции синус равен….
10. Какой четверти принадлежит угол $\frac{7\pi}{6}$?
11. В прямоугольном треугольнике синус острого угла – это…..
12. Может ли для одного и того же угла $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\cos\alpha = 0$?
13. Среди функций $y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x$ указать четную;
14. Назвать нули функции $y = \sin x$;
15. Какая из функций $y = \sin x,\ y = \operatorname{ctg} x$ не является непрерывной?
16. Сколько радиан в полном обороте?
17. Дать определение синуса числового аргумента;
18. Что такое угол в 1 радиан?
19. Область значений функции тангенс?
20. Сколько градусов в развернутом угле?
21. Чему равен период функции котангенс?
22. Назвать среди функций $y = \sin x, y = \operatorname{tg} x$ монотонную?
23. Назвать наименьшее и наибольшее значение функция косинус;

## 2.2 Морской бой (8 мин)

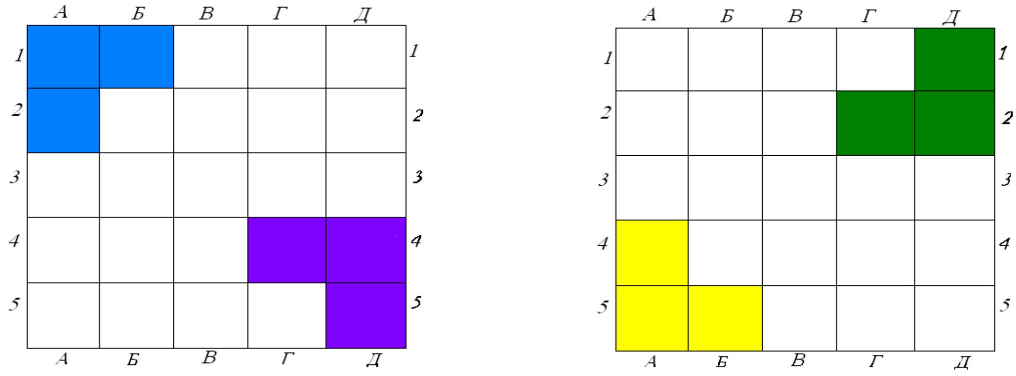



Рис. 43 Поля для морского боя

Учитель: Перед вами два поля, на каждом из них по два корабля. Команда, выбрав себе поле, должна «подбить» на нем корабли. За каждый подбитый квадрат команда получает по 2 балла.

Синий кораблик

1-А: Перевести в градусы $\frac{2\pi}{3}$ радиан.

1-Б: Чему равен синус $\frac{5\pi}{6}$?

2-А: Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\alpha\epsilon\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Желтый кораблик

4-А: Четная, нечетная или общего вида функция $y = \mathrm{ctg}\, x$?

5-А: Чему равен период функции $y = \sin x$?

5-Б: $\cos(\pi - \alpha) = \cdots$

Фиолетовый кораблик

4-Г: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cdots$

4-Д: Чему равен период функции $y = \mathrm{tg}\, x$?

5-Д: Четная, нечетная или общего вида функция $y = \cos x$?

Зеленый кораблик

1-Д: Выразить в радианах $300°$.

2-Г: Чему равен ctg $\frac{\pi}{2}$?

2-Д: Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\alpha\epsilon\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

## 2.3 Найди ошибку в формулах (4 мин)

В этом конкурсе проверяется знание обучающихся формул тригонометрии. Нужно увидеть неточности в формулах и «исправить» ошибки. Каждая найденная ошибка дает команде 1 балл.

Задание для первой команды:

1) $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos\alpha}$;

2) $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;

3) $\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

Задание для второй команды:

1) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

2) $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{2}$;

3) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$;

### 2.4 Остров «Физика» (10 мин)

Учитель: На примере задачи по механике покажем, как можно применить знания тригонометрии в физике. Представитель одной из команд, в случае правильного решения задачи, приносит команде 10 баллов. Каждой команде дается задание: найдите угол наклона горы к горизонту, если в начале движения скорость вагонетки была равна нулю, а затем она двигалась с ускорением 5 м/с$^2$ (трением пренебречь)?

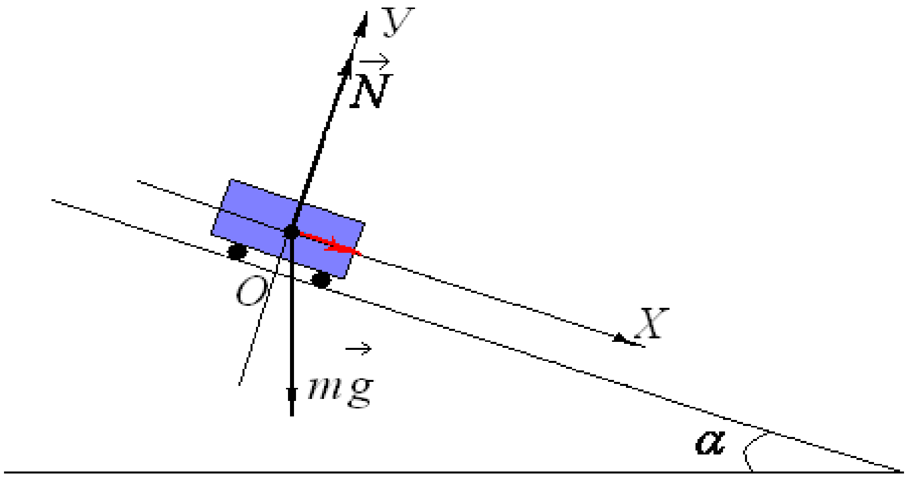


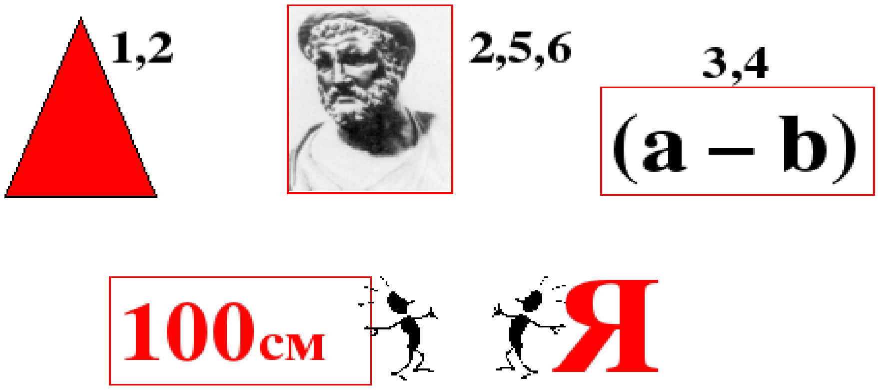

Рис. 44 Силы, действующие на вагонетку

### 2.5 Ребусы (6 мин)

Учитель: Каждой из команд предлагается разгадать по два ребуса. За правильно разгаданные ребусы команда получает 2 балла.

Задание для первой команды:

1. Разгадав ребус, вы узнаете название одного из разделов математики.




Ответ: Тригонометрия.

2. Здесь зашифровано слово, которое переводится с латинского как «дополнительный синус».


Ответ: Косинус.

Задание для второй команды:

1. Зашифровано название тригонометрической функции.


Ответ: Котангенс.

2. «Касательная» – так переводится с латинского языка это слово.


Ответ: Тангенс.

## 2.6 Пройди тест (5 мин)

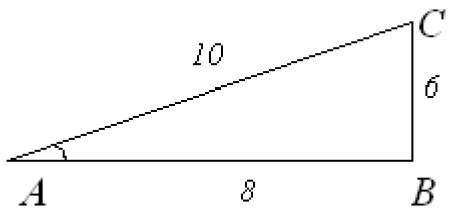
Все участники мероприятия получают задания. На выполнение теста отводится 8 минут. За каждый правильный ответ в работе каждого участника команда получает балл.

### Вариант 1

1.Угол $\frac{7\pi}{12}$ принадлежит:

а) 1 четверти; б) 2 четверти; в) 3 четверти; г) 4 четверти;

2. В прямоугольном треугольнике ABC найти $\sin A$:




а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$ в) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{4}{3}$;

3. Указать верное равенство:

а) $\sin(-\alpha) = \cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$;

в) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$;

4. Указать неверное равенство:

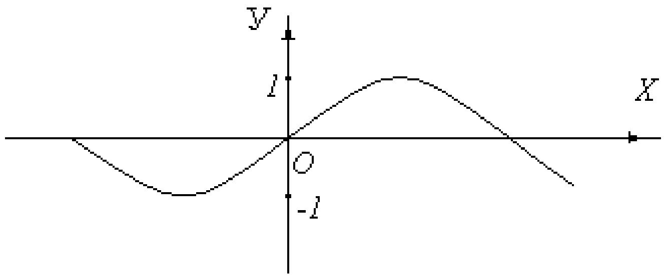
а) $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\alpha$;

б) $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$;

в) $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$;

г) $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$;

5. График какой функции изображен на рисунке?




а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$; в) $y = \sin x$; г) $y = \cos x$;

6. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

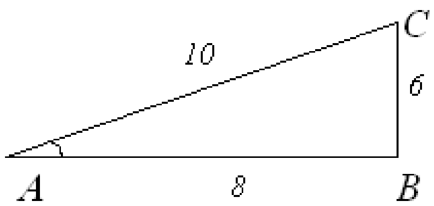
а) $-\frac{4}{5}$; б) 0; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{2}{5}$;

## Вариант 2

1. Угол $\frac{3\pi}{7}$ принадлежит:

а) 1 четверти; б) 2 четверти; в) 3 четверти; г) 4 четверти;

2. В прямоугольном треугольнике ABC найти $\operatorname{tg} A$:




а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{4}{3}$;

3. Указать верное равенство:

а) $\sin(-\alpha) = \cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$;

в) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$;

4. Указать неверное равенство:

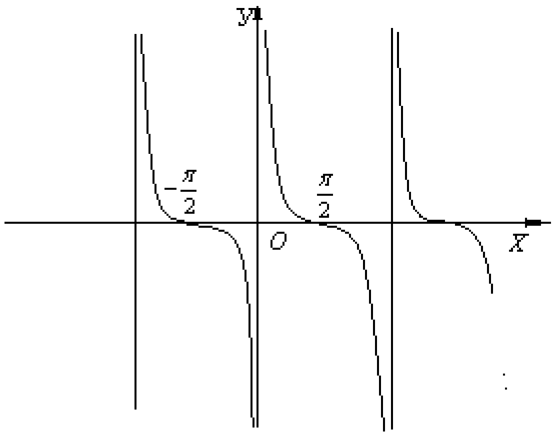
а) $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$;

б) $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$;

в) $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\alpha$;

5. График какой функции изображен на рисунке?




а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$; в) $y = \sin x$; г) $y = \cos x$;

6. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$:

а) $\frac{11}{17}$; б) $\frac{15}{17}$; в) $-\frac{15}{17}$; г) $\frac{12}{17}$;

**3. Заключительный этап. Рефлексия (2 мин)**

**Итог игры, награждение.** Подсчитываются баллы, набранные командами на всех этапах, определяется победитель. Обе команды награждаются грамотами.

А сейчас закончите предложения:

- Сегодня я узнал…
- Сегодня я вспомнил….
- Мне понравилось…
- Я хотел бы…

Спасибо всем участникам за активное участие. Желаю всем дальнейших успехов!

По итогам проведенного урока-игры были разработаны методические рекомендации по изучению темы «Тригонометрические функции» в школьном курсе математики. Изучение тригонометрических функций и их свойств будет более эффективным, если:

1. Перед введением понятия тригонометрических функций проведена детальная работа с числовой окружностью, которая рассматривается не

только как еще одна модель числового множества, но и как элемент декартовой системы координат;

2. Построение графиков осуществляется лишь после исследования свойств основных тригонометрических функций, которые были получены из анализа поведения функции на числовой окружности;

3. Каждое из свойств тригонометрических функций четко обосновано, и все они обязательно систематизированы;

4. Обучающиеся твердо знают и понимают связь тригонометрических функций через формулы, как в прямом, так и в обратном порядке.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показана необходимость и важность изучения тригонометрических функций и их свойств.

В работе нашли решение следующие конкретные задачи, выдвинутые в связи с исследованием проблемы, которая заключается в анализе теоретических основ и методики изучения понятия тригонометрических функций в школьном курсе математики, и получены следующие основные результаты:

1. Проведен анализ школьных учебников и методической литературы в соответствии с проблемой исследования.

Традиционно аргументами тригонометрических функций рассматривались именованные величины – углы (дуги), измеренные в градусах или радианах. Значения тригонометрических функций как отношения отрезков являются абстрактными величинами – числами. При изучении тригонометрических функций необходимо сравнивать изменения функции в связи с изменением аргумента. Сравнивать же можно только однородные или, что точнее, абстрактные величины – числа. Поэтому введение тригонометрических функций числового аргумента дает возможность применять эти функции в математике, технике, физике.

2. Рассмотрена методика изучения тригонометрических функций в школьном курсе математики.

В школе курс тригонометрии разделен на две части: одна часть изучается в курсе геометрии, а вторая часть – в курсе алгебры и начал анализа. Первоначальное знакомство обучающихся с тригонометрическими функциями углового аргумента происходит в курсе геометрии 8-9 классов. Затем в курсе алгебры и начал анализа в 10-11 классах происходит систематизация и расширение знаний о тригонометрических функциях. Весь курс можно разбить на важные компоненты: тригонометрические функции, тригонометрические уравнения и неравенства, тригонометрические формулы, с помощью которых производят необходимые преобразования.

Уменьшение количества часов, отводимых для каждой из составляющих курса тригонометрии, начинает отражаться на качестве усвоения материала обучающимися. Для лучшего понимания и усвоения материала, а также отработки практических навыков применения новых знаний, целесообразно начать изучение темы «Тригонометрия» с «простых моделей» (которыми являются элементарные тригонометрические функции), затем перейти к более «сложным моделям» (сложные выражения, которые требуют преобразований с помощью тригонометрических формул). Основным вопросом для любого класса функций является изучение свойств функций, входящих в этот класс, подробно рассматриваются графики и свойства основных тригонометрических функций: область определения функции, область значений функции, периодичность, четность и нечетность, интервалы монотонности, экстремумы функции, непрерывность функции.

3. Рассмотрена методика формирования понятия «Тригонометрические функции» в школьном курсе математики.

Программой предусматривается изучение тригонометрических функций в 10-11 классах, но как мы видим, в 8-9 классах уже знакомятся с тригонометрическими функциями, которые определяются с геометрической точки зрения. Тема тригонометрические функции и их свойства очень важна. В настоящее время ведутся дальнейшие поиски по совершенствованию школьных программ и учебников, по разгрузке их от второстепенного материала, по совершенствованию трактовки школьной математики.

4. Представлены методические рекомендации по изучению темы «Тригонометрические функции и их свойства» на уроках математики в виде обобщающего урока-игры «Путешествие в страну «Тригонометрия». Игра помогает учителю сплотить ученический коллектив, включить в активную деятельность замкнутых и застенчивых обучающихся, повторить и систематизировать весь пройденный ранее материал. Использование игровой формы способствует совершенствованию учебного процесса, позволяет развивать у обучащихся творческие способности, дает возможность

повысить качество знаний по данной теме, способствует осуществлению активных действий обучающихся.

**Практическая значимость данной работы** заключается в том, что содержащиеся в исследовании обоснования педагогических условий формирования понятия тригонометрических функций у обучающихся на уроках математики с использованием системы предложенных методов и организации форм обучения  позволяет целенаправленно совершенствовать процесс обучения в общеобразовательном учреждении. Результаты работы, включая разработку урока-игры по теме «Тригонометрические функции», могут быть использованы учителями образовательных учреждений, студентами – практикантами в практической работе со школьниками.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень / Ш. А. Алимов [ и др.];– 18-е изд. – М.: Просвещение, 2018.– 464 с.

2. Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. сред.шк. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 351 с.

3. Бермант, А.Ф., Люстерн, Л.А. Тригонометрия / А.Ф. Бермант, Л.А. Люстерн, под ред. А.З. Рывкина. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 2012. – 172 с.

4. Бескин, Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания / Н.М. Бескин. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения, 2015. – 138 с.

5. Брадис, В.М. Методика преподавания математики в средней школе / В.М. Брадис, под ред. А.И. Маркушевича. – 3-е изд. – М.: Наука, 2010. – 495 с.

6. Виленкин, Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл.: учеб. для углубл. изуч. математики в общеобразоват. учреждениях / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – 13-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2016. – 335 с.

7. Гастева, С.А. Методика преподавания математики / С.А. Гастева [ и др.]; – М.: Просвещение, 2007. – 730 с.

8. Гельфанд, И.М. Тригонометрия / И.М. Гельфанд, С.М. Львовский, А.Л. Тоом.– М.: МЦНМО, 2013. – 200 с.

9. Демидова, Н.Е. Математика. Основы тригонометрии: Учебное пособие. – Н. Новгород, 2017. – 92 с.

10. Иванова, И.Ю., Нахман, А.Д. Вопросы содержания и технологии преподавания курса «Тригонометрия» / И.Ю. Иванова, А.Д. Нахман. – Тамбов: ТОГОАУ «Институт повышения квалификации работников образования» – 2015. – 11 с.

11. Калнин, Р.А. Алгебра и элементарные функции / Р.А. Калнин. – М.: Наука, 2016. – 464 с.

12. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / А.Н. Колмогоров [ и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. – 26-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 384 с.

13. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. Пед. институтов / Ю.М. Колягин [ и др.]; – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

14. Крамор, В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор. – 4-е изд. – М.: Оникс: Мир и образование, 2016. – 416 с.

15. Лященко, Е.И. Изучение функций в курсе математики / Е.И. Лященко. – Минск: Академкнига, 2006. – 176 с.

16. Макарычев, Ю.Н. Тригонометрия. 10 класс: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев [ и др.]; под ред. С.А. Теляковского. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 61 с.

17. Моркович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2018. – 399 с.

18. Мордкович, А.Г. Беседы с учителями математики: Учеб. - метод. пособие / А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: ОНИКС 21 век, 2015. – 336 с.

19. Новоселов, С.И. Специальный курс тригонометрии / С.И. Новоселов. – М.: Наука, 2014. – 465 с.

20. Панчишкин, А.А., Шавгулидзе, Е.Т. Тригонометрические функции в задачах / А.А. Панчишкин, Е.Т. Шавгулидзе. – М.: Наука, 2011. – 160 с.

21. Рашевский, К.Н. Тригонометрия / К.Н. Рашевский. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 2015. – 68 с.

22. Репьев, В.В. Методика тригонометрии / В.В. Репьев. – М.: Физматлит, 2008. – 150 с.

23. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие: в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 388 с.

24. Сканави, М.И. Элементарная математика / М.И. Сканави [ и др.]; – М.: Наука, 2010. – 609 с.

25. Столяр, А.А. Педагогика математики / А.А. Столяр. – 3-е изд., перераб и доп. – М.: Высшая школа, 2013. – 414 с.

26. Суховиенко, Е.А. Теория и методика обучения математике: общая методика: учеб. пособие / Е.А. Суховиенко, З.П. Самигуллина [ и др.]; – Челябинск: Образование, 2010. – 65 с.

27. Фалин, Г.И. Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г.И. Фалин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 327 с.

28. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии. – М.: Просвещение, 2012. – 160 с.

29. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача. Ч.1. Пособие для учителей / Под. ред. Н.Я. Виленкина; сокр. Пер. с нем. А.Я. Халамайзера. – М.: Просвещение, 2014. – 208 с.

30. Шахмейстер, А.Х. Тригонометрия: учеб. пособие. – 4-е изд. – М.: МЦНМО, 2014. – 750 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

1. Вычисление значений тригонометрических функций.

Пример 1. Вычислите $\cos^2\left(\frac{21\pi}{2}-2\right)+\sin^2\left(2-\frac{183\pi}{2}\right)$.

Решение. По формулам приведения получим

$\cos\left(\frac{21\pi}{2}-2\right)=\cos\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-2\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=\sin 2;$

$\sin\left(2-\frac{183\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{183\pi}{2}-2\right)=-\sin\left(90\pi+\frac{3\pi}{2}-2\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)=$ $\cos 2.$

Поэтому $\cos^2\left(\frac{21\pi}{2}-2\right)+\sin^2\left(2-\frac{183\pi}{2}\right)=\sin^2 2+\cos^2 2=1.$

Ответ: 1.

Пример 2. Вычислите $\frac{\cos 71°\cdot\cos 10°+\cos 80°\cdot\cos 19°}{2\cos 69°\cdot\cos 8°+2\cos 82°\cdot\cos 21°}$.

Решение. Используя формулы приведения и формулу суммы тригонометрических функций, получим $\frac{\cos 71°\cdot\cos 10°+\cos 80°\cdot\cos 19°}{2\cos 69°\cdot\cos 8°+2\cos 82°\cdot\cos 21°}=$ $\frac{\cos 71°\cdot\cos 10°+\sin 10°\cdot\sin 71°}{2(\cos 69°\cdot\cos 8°+\sin 8°\cdot\sin 69°)}=\frac{\cos 61°}{2\cos 61°}=\frac{1}{2}=0{,}5.$

Ответ: 0,5.

Пример 3. Вычислите $\frac{3(\sin 10°+\sin 80°)(\cos 80°-\cos 10°)}{2\sin 70°}$.

Решение. Используя формулы приведения и формулу суммы тригонометрических функций, получим $\frac{3(\sin 10°+\sin 80°)(\cos 80°-\cos 10°)}{2\sin 70°}=$ $\frac{-3\cdot 2\sin 45°\cos 35°\cdot 2\sin 45°\sin 35°}{2\sin 70°}=\frac{-3\sin 90°\cdot\sin 70°}{2\sin 70°}=-1{,}5.$

Ответ: 1,5.

Пример 4. Найдите значение выражения:

$\cos 114°\cdot\cos 24°+\sin 114°(\sin 8°\cdot\cos 16°+\cos 8°\cdot\sin 16°)$

Решение. Используя тригонометрические формулы, получим

$\cos 114°\cdot\cos 24°+\sin 114°(\sin 8°\cdot\cos 16°+\cos 8°\cdot\sin 16°)=\cos 114°\cdot$ $\cos 24°+\sin 114°\cdot\sin 24°=\cos 90°=0.$

Ответ:0.

Пример 5.Найдите значение выражения $\frac{87}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 0{,}2$.

Решение. Воспользуемся формулой косинуса двойного угла

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+tg^2\alpha};\ \cos 2\alpha = \frac{1-0{,}04}{1+0{,}04} = \frac{0{,}96}{1{,}04} = \frac{12}{13};$$

$$\frac{87}{3+4\cos 2\alpha} = \frac{87}{3+\frac{4\cdot 12}{13}} = \frac{87\cdot 13}{87} = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 6. Найдите значение выражения $\frac{7\sqrt{3}}{3}\cos(70° + \alpha)$, если

$\sin(40° + \alpha) = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$ и $50° < \alpha < 230°$.

Решение. $90° < \alpha + 40° < 270°$, так как $\sin(40° + \alpha) < 0$, то $(40° + \alpha) \in III$ четверти. Вычислим косинус угла:

$$(40° + \alpha), \cos(40° + \alpha) = -\sqrt{1 - \frac{16\cdot 3}{49}} = -\frac{1}{7}.$$

Найдем значение данного выражения

$$\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\cos(70° + \alpha) = \frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\big(30° + (40° + \alpha)\big) =$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot(\cos 30°\cdot\cos(40° + \alpha) - \sin 30°\cdot\sin(40° + \alpha)) = \frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{4\sqrt{3}}{2\cdot 7}\right) =$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

2. Четность и нечетность тригонометрических функций.

Пример 1. Установите, какие из приведенных функций являются четными или нечетными:

а) $y = \sin 3x, x \in [-100\pi; 102\pi]$;

б) $y = \cos\frac{x}{2}\cdot|\operatorname{tg} x|, x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\epsilon Z$;

в) $y = \sin(x^2 + 4), x \in R$;

г) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in R, x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

д) $y = (x^3 - x)\cdot\operatorname{ctg} x, x \in R, x \neq \pi n, n \in Z$;

е) $y = \cos x\cdot\operatorname{ctg} x, x \in R, x \neq \pi n, n \in Z$;

ж) $y = c, c \in R$.

Решение. а) отрезок $[-100\pi; 102\pi]$ не симметричен относительно точки $x = 0$, поэтому функция $y = \sin 3x$ на указанном промежутке не является ни четной, ни нечетной; б) четная как произведение двух четных функций; в) четная, так как: 1) область задания симметрична относительно точки $x = 0$; 2) $\sin((-x)^2 + 4) = \sin(x^2 + 4)$ для всех $x \in R$; г) ни четная, ни нечетная, так как область определения не симметрична относительно точки $x = 0$ и $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \neq \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \neq 0$; $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \neq -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; д) четная как произведение двух нечетных функций; е) нечетная как произведение четной и нечетной функций; ж) четная, так как $y(-x) = y(x) = c$ для любого $x \in R$. При $c = 0$ функция $y = 0$ является одновременно и четной, и нечетной.

Ответ: четные – б), в), д), ж); нечетные – е).

3. Периодичность тригонометрических функций.

Пример 1. Определите основной период функций: а) $y = 3\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 2\cos\left(\frac{2}{5}x + 4\right)$; в) $y = \operatorname{tg} 6x$.

Решение. Для того чтобы найти период функции, необходимо основной период функции разделить на коэффициент, стоящий перед $x$. Для данных функций получим: а) $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; б) $T = \frac{2\pi}{(2/5)} = 5\pi$; в) $T = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $5\pi$; в) $\frac{\pi}{6}$.

Пример 2. Определите основной период функции $y = 2\sin 3x + \cos 12x, x \epsilon R$.

Решение. Данная функция представлена в виде суммы периодических функций с периодами $T_1$ и $T_2$. Основной период нашей функции вычисляем по формуле $T = nT_1 = mT_2, n \in N, m \in N$ и $n$, $m$ взаимно просты. Говорят, что числа $T_1$ и $T_2$ соизмеримы.

$T_{\sin 3x} = \frac{2\pi}{3}$; $T_{\cos 12x} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $T_y = T = \frac{2\pi}{3} \cdot n = \frac{\pi}{6} \cdot m \Rightarrow n = \frac{m}{4}$. Наименьшее положительное $m$, делящееся на 4, равно 4. Поэтому $T_y = \frac{\pi}{6} \cdot 4 = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Пример 3. Определите основной период функции $y = \cos^2 8x$.

Решение. Используя формулу понижения степени, получаем $y = \frac{1+\cos 16x}{2} \Rightarrow$ $T_y = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

Пример 4. Установите, являются ли периодическими функции, и если являются, то найдите их основной период:

а) $y = \cos 4\pi x + \sin 2x$;

б) $y = \cos 6x + \sin\sqrt{2}x$;

в) $y = \cos 4\pi x + \sin 6\pi x$.

Решение. а) $T_{\cos 4\pi x} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$; $T_{\sin 2x} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Функция $y = \cos 4\pi x + \sin 2x$ не будет периодической, так как равенство $\frac{1}{2}n = \pi m$ невозможно ни при каких рациональных $n$ и $m$, кроме $n = m = 0$;

б) $T_{\cos 6x} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; $T_{\sin\sqrt{2}x} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$. И здесь равенство $\frac{\pi}{3}n = m\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow$ $\frac{n}{3} = m\sqrt{2}$ невозможно ни при каких рациональных $n$ и $m$, кроме $n = m = 0$;

в) $T_{\cos 4\pi x} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$; $T_{\sin 6\pi x} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_y = T$.

$T = \frac{n}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow n = 2 \cdot \frac{m}{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 3, \\ n = 2, \end{cases} T_y = 1.$

Ответ: а) непериодическая; б) непериодическая; в) $T_y = 1$.

Рассмотрим отдельно без решения включенные в открытый банк для подготовки к ЕГЭ различного рода задачи, содержащие тригонометрические функции:

1) Найдите значение выражения: $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x \cdot \cos(x - \pi)$, если $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) Найдите значение выражения: $3\sqrt{2}\mathrm{ctg}\,x \cdot \sin(x - \pi)$, если $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3) Найдите значение выражения: $17\sin 2x$, если $\cos x = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

4) Найдите значение выражения: $25\sin 4x$, если $\sin x = \frac{2}{\sqrt{20}}$.

5) Найдите значение $\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если известно, что $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ и $0<\alpha<\pi$.

6) Найдите значение $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

7) Найдите $\operatorname{tg} 2x$, если $\cos x=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ и $-\pi<\alpha<0$.

8) Найдите значение выражения $1{,}5\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin x=-\frac{1}{3}$.

9) Найдите значение выражения $-3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

10) Найдите значение выражения: $3\operatorname{tg} 2x$, если $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

11) Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

12) Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sin\sqrt{ax-x^2-\pi^2}+\cos 2\sqrt{ax-x^2-\pi^2}=0$, имеет ровно два решения.

13) Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\operatorname{tg}(-300°)$.

14) Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\operatorname{tg}(-600°)$.

15) Найдите значение выражения $-17\sqrt{3}\operatorname{tg}(1050°)$.

16) Найдите значение выражения $5\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

17) Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{2\pi ax-4x^2}+\cos 2\sqrt{2\pi ax-4x^2}=0$, имеет ровно два решения.

18) Найдите произведение всех корней уравнения

$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\log_3 3x\cdot\sqrt{3-x}=0$.

19) Найдите значение выражения $6\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos(\pi-\alpha)$, если $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

20) Найдите значение выражения $8\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin(\pi+\alpha)$, если $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21) Сколько корней имеет уравнение $(\sin^2 x-\cos^2 2x)\cdot\sqrt{2-x^2}=0$.

22) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi-x)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin\frac{5\pi}{6}$.

23) Решите уравнение $6\sin^2 x+7\cos x-7=0$.

24) Решите уравнение $\left(49^{\sin x}\right)^{\cos x}=7^{\sqrt{3}\sin x}$.

25) Вычислите $10{,}5-3\sin^2 x$, если $\cos x=-1$.