ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В СЕМЕЙСТВЕ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Научно-квалификационная работа
аспиранта очной формы обучения
направления подготовки: 01.06.01 Математика и механика,
образовательная программа: «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»
Аверьянова Георгия Николаевича

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Солдатов А.П.

Белгород 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава 1. Задача линейного сопряжения для аналитических функций 11

1.1 Весовые классы Гельдера 11

1.2 Задача линейного сопряжения 17

1.3 Асимптотика решения 20

Глава 2. Задача линейного сопряжения с треугольным матричным коэффициентом 29

2.1 Задача линейного сопряжения в l-мерном пространстве . . . 29

2.2 Каноническая матрица-функция 37

Заключение 56

Список использованной литературы 57

ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений занимает центральное место в математической науке. Развитие этой теории тесно связано с такими классическими областями естествознания, как аэродинамика, гидродинамика, теория упругости, теория электромагнитного поля. Кроме того, в последнее время дифференциальные уравнения находят применение при изучении вопросов биологии, экологии, цифровой обработки сигналов, математического моделирования физических процессов и т.д.

В предлагаемой работе изучается задача линейного сопряжения. Пусть Γ - некоторая, кусочно-гладкая кривая. В работе Римана [19], возникает следующая граничная задача:

$$\varphi^{+}(t) = G(t)\varphi^{-}(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где $G(t)$ - заданная на Γ матрица с кусочно-постоянными коэффициентами, а $\varphi^{+}(t)$ и $\varphi^{-}(t)$ - граничные значения искомой функций $\varphi(z)$. Однако Риман не приводит каких-либо указаний, относительно методов решения таких задач. В 1873 г. Ю.В. Сохоцким [27] была решена следующая граничная задача: пусть $g(t)$ - заданная на кривой Γ функция, требуется найти кусочно-аналитическую функцию $\varphi(z)$ с заданной главной частью на бесконечности по граничному условию

$$\varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t) = g(t), \tag{2}$$

которое выполняется всюду на Γ за исключение конечного множества точек. Эта задача является частным случаем следующей задачи: требуется отыскать кусочно-аналитическую функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую граничному условию

$$\varphi^{+}(t) = G(t)\varphi^{-}(t) + g(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{3}$$

с заданными на Γ функциями $G(t)$ и $g(t)$. Однородный случай (т.е. случай, когда $g(t) = 0$) задачи (3) и есть задача (1), впервые сформулированная Риманом. Задачу (3), следуя Н.И. Мусхелишвили [16], принято называть задачей сопряжения или задачей Римана. Таким образом, первое решение частного случая (2) задачи (3) принадлежит Ю. В. Сохоцкому. Именно ему принадлежит метод исследования граничных задач, оказавшийся в последствии самым эффективным - метод интегралов типа Коши.

В случае, когда коэффициенты задачи (3) удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ (т.е. $G(t), g(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$) и $G(t) \neq 0$ при всех значениях $t \in \Gamma$, задача (3) была решена Ф.Д. Гаховым [14], затем Б.В. Хведелидзе [28], [29] решил задачу (3) при условии, что функция $g(t)$ принадлежит пространству $L^{p}(\Gamma)$ при $1 < p < \infty$. В работах И.Б. Симоненко [20], [21], [22] был существенно расширен класс коэффициентов $G(t)$, для $g(t) \in L^{p}(\Gamma)$ при $1 < p < \infty$. Во всех случаях решение записывается в виде интеграла типа Коши.

Случай, когда Γ является конечной совокупностью разомкнутых линий, изучен Н.И. Мусхелишвили [15]. Для исследования этого случая, существенно отличающегося от случая замкнутых линий, Мусхелишвили ввел функции класса C_0^μ $(\varphi \in C_0^\mu$ если она удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме конечного множества точек $\{\tau\}$, а вблизи точек τ представима в виде $\phi(t) = (t-\tau)^{-\mu}\psi(t)$, где $\psi(t) \in C^\mu(\Gamma), 0 < \mu < 1)$ и изучил свойства интегралов типа Коши в предположении, что их плотности принадлежат к тому же классу.

Кроме того, теория этой и других краевых задач для аналитических функций получила глубокое развитие в работах Ф.Д. Гахова [12]-[14], И.Н. Векуа [7]-[10], Н.П. Векуа [11], Б.В. Боярского [4]-[6], А.В. Бицадзе [1]-[3], Б.В. Пальцева [17], [18], А.П. Солдатова [23]-[26].

В свете выше изложенного, можем заключить, что изучение задачи линейного сопряжения в весовых пространствах является актуальным.

Объект исследования

Задача линейного сопряжения для аналитических функций в весовом пространстве.

Цель работы

Изучить задачу линейного сопряжения для аналитических функций в весовом пространстве.

Методы исследования

Применяются методы теории аналитических функций и теории граничных задач.

Научная новизна

Все результаты являются новыми.

Теоретическая значимость работы

Полученные результаты носят, в основном, теоретический характер и могут быть применены при исследовании граничных задач для дифференциальных уравнений и систем с частными производными, а так же при исследовании практических вопросов, приводящих к таким задачам.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на международных конференциях

"Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXVI Воронеж, 2015 и "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXVII Воронеж, 2016

Содержание работы

В данной работе изучение задачи (3) проводится в весовых пространствах C_λ^μ (подробному описанию которых посвящен первый параграф первой главы) на плоскости (глава 1) и в l-мерном пространстве (глава 2) для случая, когда коэффициент $G(t)$ представляет собой треугольную матрицу.

В первой главе рассматривается классическая задача линейного сопряжения для аналитических функций (3) на ориентированной кусочно-гладкой кривой Γ в семействе весовых пространств Гельдера. Под кусочно-гладкой кривой понимается объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Каждая из дуг Γ_j определённым образом ориентирована и предельные значения $\varphi^{\pm}$ в (3) понимаются по отношению к этой ориентации.

Задачу (3) будем рассматривать в пространстве $C^{\mu}_{\lambda(k)}(\widehat{D},F)$ с произвольными весовым порядком λ и $k \in Z$. Это пространсво состоит из функций, аналитических в D = C $\setminus$ Γ, которые вне окрестности точек $\tau \in F$ удовлетворяют условию Гельдера вплоть до границы, а при $z \to \tau$ ведут себя как $O(|z - \tau|^{\lambda_\tau})$, и при $z \to \infty$ ведут себя как $O(|z|^{k-1})$ (Более точное определение см. в первом параграфе первой главы). Кусочно - непрерывный коэффициент $G(t)$ принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{\Gamma},F)$ и предполагается всюду отличным от нуля, включая его односторонние предельные значения в узлах $\tau \in F$.

Положим

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\ln\left[\prod\nolimits_{j=1}^{n_\tau}[G(\tau,j)]^{\sigma_{\tau,j}}\right], \quad 0 \le \alpha_\tau < 1.$$

где n_τ - количество концов дуг, связынных с τ, $G(\tau,j)$ пределы значений функции $G(t)$ по этим концам, $\sigma_{\tau,j} = 1$ если это правый конец дуги, $\sigma_{\tau,j} = -1$ в противном случае.

Пусть

$$æ(G) = \mathrm{Ind}G - \sum\nolimits_{\tau}(\alpha_\tau + i\beta_\tau) \in Z,$$

где

$$\mathrm{Ind}G = \sum\nolimits_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}(\ln G)\big|_{\Gamma_j}.$$

Теорема 1. *Для любого целочисленного порядка* $s = (s_\tau,\ \tau \in F)$ *существует единственная функция* $X(z) \in C^{\mu}_{\alpha-s}(\widehat{D},F)$ *, которая всюду от-*

лична от нуля, включая предельные значения $X^{\pm}$ на $\Gamma \setminus F$, такая, что

$$X^{+} = GX^{-}, \quad \lim_{z\to\infty} X(z) z^{æ(G)+s(F)} = 1,$$

где $s(F) = \sum_{\tau} s_{\tau}$.

Функцию $X(z)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, принято называть канонической (или G-канонической). С ее помощью решение задачи (3) строится следующим образом:

Теорема 2. *Пусть $\lambda_{\tau} - \alpha_{\tau} \notin \mathbb{Z}$, $\tau \in F$, каноническая функция X задачи (3) отвечает семейству $s_{\tau} = [\alpha_{\tau} - \lambda_{\tau}]$, $\tau \in F$ и $æ = æ(G) + s(F) + k$.*

Тогда условия ортогональности

$$\int_{\Gamma} [X^{+}(t)]^{-1} g(t) q(t) dt = 0, \qquad q \in P_{-æ},$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (3) в классе $C^{\mu}_{\lambda(k)}$, и при их выполнении все ее решения φ даются формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)dt}{X^{+}(t)(t-z)} + X(z)p(z), \quad p \in P_{æ}.$$

В общем случае произвольного λ эти утверждения справедливы по отношению к классу $C^{\mu}_{\lambda-0(k)}$.

Во второй главе задача (3) рассматривается для аналитических l–векторфункций $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$ компоненты φ_k которых имеют конечные порядки на бесконечности, подчиненные условию

$$\deg \varphi_k \le n_k - 1, \qquad 1 \le k \le l, \tag{4}$$

с заданными целыми числами n_k. G - треугольный матричный коэффициент , заданный на кусочно-гладкой кривой Г. Подробно разобран случай $l = 2$, когда

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Существует каноническая функция X_k

$$\lim_{z\to\infty} z^{æ_k} X_k(z) = 1 , \qquad æ_k = \sum_\tau [\alpha_{k,\tau} - \lambda_\tau] + \mathrm{Ind} G_k - \sum_\tau (\alpha_{k,\tau} + i\beta_{k,\tau}). \qquad (6)$$

Обозначим P_k класс многочленов степени не выше $æ_k+n_k-1$ (считая $P_k = 0$ при $æ_k + n_k \le 0$) и пусть Q_k имеет аналогичный смысл по отношению к многочленам степени не выше $-(æ_k + n_k) - 1$. Таким образом, $\dim P_k = æ_k + n_k$, $\dim Q_k = 0$ при $æ_k + n_k \ge 0$ и $\dim P_k = 0$, $\dim Q_k = -(æ_k + n_k)$ при $æ_k+n_k \le 0$. Во всех случаях $\dim P_k - \dim Q_k = æ_k+n_k$. В соответствии с этими обозначениями можем ввести классы многочленов

$$P_2^0 = \{p \in P_2 \mid \langle ap, q\rangle = 0,\ q \in Q_1\},$$

$$Q_1^0 = \{q \in Q_1 \mid \langle ap, q\rangle = 0,\ p \in P_2\}.$$

Лемма 1. *В разложениях*

$$P_2 = P_2^0 \oplus P_2^1, \quad Q_1 = Q_1^0 \oplus Q_1^1$$

подпространства P_2^1 *и* Q_1^1 *имеют общую размерность* $r = \dim P_2^1 = \dim Q_1^1$.

При этом существует единственный линейный оператор R, который интегрируемой на Γ функции $g \in L(\Gamma)$ ставит в соответствие много-

член $p = Rg \in P_2^1$ *со свойством*

$$\langle ap, q_i \rangle = \langle g, q_i \rangle, \qquad 1 \le i \le r,$$

где $q_1, \ldots, q_r$ *– некоторый базис в* Q_1^1.

Теорема 3. *Пусть условия (6) выполнены для обоих значений* $k = 1,2$ *и функции* $f_1, f_2 \in L(\Gamma)$ *определяются равенствами*

$$2X_1^+ f_1 = 2g_1 + G_0 G_2^{-1}[-g_2 + X_2^+ S(X_2^+)^{-1} g_2], \quad X_2^+ f_2 = g_2$$

с сингулярным оператором Коши S.

Тогда задача (3) – (5) разрешима в классе $C_\lambda^\mu(\hat{D}, F)$ *аналитических в* $D = \mathrm{C} \setminus \Gamma$ *вектор- функций* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\langle f_1, q \rangle = 0,\ q \in Q_1^0; \quad \langle f_2, q \rangle = 0,\ q \in Q_2,$$

и при выполнении этих условий общее решение задачи дается формулой

$$\phi_1 = X_1[I(f_1 - Rf_1 + p_2^0) + p_1], \quad p_1 \in P_1,\ p_2^0 \in P_2^0,$$

$$\phi_2 = X_2(If_2 - Rf_1 + p_2^0),$$

с оператором R

Во втором параграфе второй главы решается вопрос существования канонической матрицы-функкци и ее использования для решения задачи (3).

Теорема 4. *Пусть каноническая функция* $X(z)$ *имеет нормальную форму на бесконечности и подчинена весовому порядку* λ*. Пусть функция* $g \in C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$*. Тогда задачи (3) в классе* $C^\mu_{\lambda-1+0}(\hat{D}, F)$ *разрешима тогда и*

только тогда, когда f удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_\Gamma [(X^+)^{-1}g](t)q_j(t)dt = 0, \qquad \deg q_j \leq -(æ_j + k) - 1.$$

При выполнении этих условий общее решение задачи в рассматриваемом классе дается формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{[(X^+)^{-1}g](t)dt}{t-z} + X(z)p(z),$$

где многочлен p удовлетворяет условию $\deg p_j \leq æ_j + k - 1, \qquad 1 \leq j \leq l.$

Глава 1. Задача линейного сопряжения для аналитических функций

1.1 Весовые классы Гельдера

Рассмотрим классическую задачу линейного сопряжения для аналитических функций

$$\varphi^{+} - G\varphi^{-} = g \tag{1.1}$$

на ориентированной кусочно-гладкой кривой Γ в семействе весовых пространств Гельдера. Под кусочно-гладкой кривой понимается объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Каждая из дуг Γ_j определённым образом ориентирована и предельные значения $\varphi^{\pm}$ в (1.1) понимаются по отношению к этой
ориентации.

Задача (1.1) хорошо изучена [16] как в пространствах Гельдера, так и в весовых гельдеровых пространствах функций, ограниченных в окрестности точек $\tau \in F$ или допускающих в них особенности порядка меньше 1. Как известно, основным инструментом ее исследования служат интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{1.2}$$

и связанный с ним сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma \setminus F. \tag{1.3}$$

Остановимся подробнее на определении этих пространств. Для компакта K на плоскости обозначим $C^{\mu}(K)$, $0 < \mu < 1$, обычное пространство Гельдера с показателем μ, которое банахово относительно нормы

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + [\varphi]_\mu, \quad [\varphi]_\mu = \sup_{z_i \in K} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu},$$

где $|\phi|_0$ означает $\sup$-норму.

Для фиксированной точки $\tau \in K$ пусть $C_0^\mu(K;\tau)$ означает пространство всех ограниченных функций $\phi(z)$ на $K \backslash \tau$, для которых $\psi(z) = |z - \tau|^\mu \phi(z) \in C^\mu(K)$, относительно нормы $|\phi| = |\phi|_0 + [\psi]_\mu$ это пространство банахово. Нетрудно показать, что эта норма эквивалентна норме

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_\mu, \quad \{\varphi\}_\mu = \sup_{z_i \in K} \frac{|z_1 - \tau|^\mu |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}.$$

Наконец, пусть пространство $C_\lambda^\mu(K;\tau),\ \lambda \in \mathbb{R}$, состоит из всех функций

$$\varphi(z) = |z - \tau|^\lambda \varphi_0(z), \quad \varphi_0 \in C_0^\mu(K;\tau),$$

снабженное "перенесенной"нормой $|\varphi| = |\varphi_0|_{C_0^\mu}$. Совершенно аналогично можно ввести и весовое пространство $C_\lambda^\mu(K,F)$ в ситуации, когда роль τ играет конечное множество $F \subseteq K$ и λ является семейством $(\lambda_\tau,\ \tau \in F)$ вещественных чисел. В этом случае роль $|z - \tau|^\lambda$ играет весовая функция

$$\rho_\lambda(z) = \prod_\tau |z - \tau|^{\lambda_\tau}. \tag{1.4}$$

Введенное весовое пространство обладает следующими свойствами [25].

Лемма 1.1. (a) *Операция умножения как билинейное отображение ограничено* $C_{\lambda\mu'} \times C_{\lambda\mu''} \to C_{\lambda\mu'+\lambda''}$.

(b) *Семейство пространств* $(C_\lambda{}^\mu)$ *монотонно убывает (в смысле вложения банаховых пространств) по каждому из параметров* μ *и* λ.

(c) *Для любых* $\alpha \in$ R, $\varepsilon > 0$ *и* $n = 0,1,\ldots$ *функции*

$$|z-\tau|^{i\alpha} \in C_0^\mu(K,\tau), \quad |z-\tau|^{i\alpha}\ln^n|z-\tau| \in C_{-\varepsilon}^\mu(K,\tau). \tag{1.5}$$

Утверждение (b) леммы позволяет ввести классы

$$C_{\lambda-0}^\mu = \cap_{\varepsilon>0} C_{\lambda-\varepsilon}^\mu, \quad C_{\lambda+0}^\mu = \cup_{\varepsilon>0} C_{\lambda+\varepsilon}^\mu. \tag{1.6}$$

При $\lambda = 0$ их записываем кратко $C_{\pm 0}^\mu$. В этих обозначениях вторая функция в (1.5) принадлежит $C_{-0}^\mu(K,\tau)$.

Очевидно, функции из $C_{+0}^\mu(K,F)$ непрерывны на K и в точках $\tau \in F$ обращаются в нуль. Поскольку $C_\mu^\mu(K,F) = \{\varphi \in C^\mu(K),\ \varphi\big|_F = 0\}$, можно ввести класс

$$C_{(+0)}^\mu(K,F) = C_{+0}^\mu(K,F) + C^\mu(K),$$

который является конечномерным расширением $C_{+0}^\mu(K,F)$.

Условимся область на комплексной плоскости называть простой, если она односвязна и ограничена кусочно гладким контуром ∂D. Для такой

—

области в определении пространства $C_\lambda^\mu(D,F)$, где $F \subseteq \partial D$, весовую функцию (1.4) можно заменить на

$$R_\lambda(z) = \prod_\tau (z - \tau)^{\lambda_\tau}.$$

Это пространство ниже используется для аналитических в D функций. Если $\zeta_\tau \in \mathbb{C}$ и $\mathrm{Re}\zeta_\tau = \lambda_\tau$, то аналогично лемме 1(c) устанавливается, что

$$\prod_\tau (z-\tau)^{\zeta_\tau} \in C_\lambda^\mu(\overline{D},F), \quad \sum_\tau p_\tau[\ln(z-\tau)] \in C_{-0}^\mu(\overline{D},F)$$

для любых многочленов $p_\tau(u)$.

Пространство $C_\lambda^\mu(\overline{D,F})$ можно ввести и для функций, аналитических в любой области D с кусочно гладкой границей. В этом случае некоторые из дуг $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ могут служить разрезами для области D (т.е. эта область лежит

по обе стороны от Γ_0). По этой причине вместо замыкания $\overline{D}$ в обозначении весового пространства используем символ $\dot{D}$.

Предварительно остановимся на кусочно гладкой кривой $\Gamma = \partial D$ подробнее. Как известно, гладкая дуга Γ_0 определяется как образ функции $\gamma(s) \in C^1[0,1]$, производная $\gamma'(s)$ которой всюду отлична от нуля. Кроме того, равенство $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$ при $s_1 \leq s_2$ влечет либо $s_1 = s_2$, либо $s_1 = 0$, $s_2 = 1$. Эта дуга разомкнута при $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ и сомкнута в противном случае. Таким образом, концы сомкнутой дуги совпадают и она является кусочно- гладким контуром, гладким при $\gamma'(0) = \gamma'(1)$. Одноили двухэлементное множество концов дуги Γ_0 обозначим $\partial\Gamma_0$.

Пусть на кусочно - гладкой кривой $\Gamma = \partial D$ задано конечное подмножество F так, что связные компоненты $\Gamma \setminus F$ представляют собой гладкие дуги (разомкнутые или сомкнутые) без своих концов. В этом случае точки $\tau \in F$ называем узлами кривой Γ. Таким образом, кривая Γ и множество $F \subseteq \Gamma$ с помощью гладких дуг Γ_j, $1 \le j \le m$, представлены в виде

объединений

$$\Gamma = \cup_{j=1}^{m}\Gamma_j, \quad F = \cup_{j=1}^{m}\partial\Gamma_j, \tag{1.7}$$

где открытые дуги $\Gamma_j \setminus \partial\Gamma_j$ попарно не пересекаются.

Предположим сначала, что область D конечна, т.е. лежит внутри некоторого круга. Условимся гладкую дугу $\Gamma_0 \subseteq \overline{D}$, которая за возможным исключением концов содержится в D, называть разрезом области D. Дополним Γ до кусочно - гладкой кривой $\widetilde{\Gamma}$ с помощью конечного числа разрезов так, чтобы все связные компоненты $D \setminus \widetilde{\Gamma}$ были простыми областями. Тогда по определению пространство $C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{D}, F)$ состоит из всех аналитических в D функций, которые в связных компонентах D_0 открытого множества $D \setminus \widetilde{\Gamma}$ принадлежат $C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}_0, F)$. Совершенно аналогично определяется

и пространство $C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{D}, F)$ условием $\phi \in C^{\mu}_{(+0)}(\overline{D}_0, F)$ в связных компо-

нентах D_0.

Если область D бесконечна, т.е. $D \supseteq \{|z| \geq R\}$ для некоторого $R > 0$, то область $D_R = D \cup \{|z| < R\}$ конечна и пространство $C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{D}, F)$ аналитических в D функций определяется как выше по отношению к области D_R. В этом случае для целого k в данном пространстве выделяем подпространство $C^{\mu}_{\lambda(k)}(\overline{D}, F)$ всех функций, допускающих оценку $|\varphi(z)| \leq C|z|^{k-1}$ при $|z| \geq R$. Эта оценка равносильна тому, что функция $\varphi(z)$ в области $|z| \geq R$ раскладывается в ряд

$$\phi(z) = \sum_{j=-\infty}^{k-1} c_j z^j.$$

Наибольшее $j < k$, для которого $c_j \neq 0$ в этом разложении, называется порядком $\deg\varphi$ на бесконечности. Таким образом, указанную оценку можем выразить условием $\deg\varphi \leq k - 1$. В частности, при $k = 1$ функция φ ограничена в окрестности бесконечности. При $k = 0$ говорим также, что функция φ исчезает на бесконечности. По отношению к функции $\varphi = p$, являющейся многочленом, порядок $\deg p$ является его степенью. В этом случае удобно считать $p = 0$ при $\deg p < 0$. Класс многочленов p степени $\deg p \leq k - 1$ обозначим P_k. Таким образом, $P_k = 0$ при $k \leq 0$ и $\dim P_k = k$ при $k > 0$.

Совершенно аналогично пространство $C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{D}, F)$ определяется и для функций, аналитических в открытом множестве D с кусочно гладкой границей Γ, состоящим из нескольких областей. В частности, роль D может играть все открытое множество $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Если кривая Γ ориентируема, т.е. ориентируемы все дуги Γ_j в (1.7), то тогда для $\phi \in C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{D}, F)$ естественным образом определены односторонние граничные значения $\varphi^{\pm}$ на $\Gamma \setminus F$, которые, очевидно, принадлежат $C_{\lambda}{}^{\mu}(\Gamma,F)$. Заметим, что для $\phi \in C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{D}, F)$ граничные значения $\varphi^{\pm}$ принадлежат соответствующему классу $C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$. По определению он состоит из функций $\phi \in C(\Gamma \setminus F)$, которые на каждой гладкой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, не содержащих внутри точек $\tau \in F$, принадлежат

$C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma_0, F_0)$, где $F_0 = F \cap \Gamma_0$. В точках $\tau \in F$ функция ϕ имеет односторонние предельные значения по каждой дуге, сходящейся к этой точке.

Действие интегрального оператора типа Коши (1.2) в весовых пространствах Гельдера (без конкретизации показателя μ) изучено в [16]. В пространствах C^{μ}_{λ} этот результат был уточнен в [26], который сформулируем

отдельно.

Теорема 1.1. *Пусть кусочно гладкая кривая Γ представлена в виде (1.7) с помощью ориентируемых гладких дуг Γ_j и D = С $\setminus \Gamma$.*

Тогда интегральный оператор типа Коши I ограничен $C_{\lambda}{}^{\mu}(\Gamma,F) \to$ $C^{\mu}_{\lambda(0)}(\widehat{D}, F), \quad -1 < \lambda < 0$, и справедливы формулы Сохоцкого – Племе-

ля $2\varphi^{\pm} = \pm\phi + S\phi$, связывающие интегралы (1.2) и (1.3).

Обратно, если $\phi \in C^{\mu}_{\lambda(k)}(\widehat{D}, F), \quad -1 < \lambda < 0$, и $\phi = \varphi^{+} - \varphi^{-}$, то $\varphi = I\phi + p$ с некоторым многочленом $p \in P_k$, причем

$$\int_{\Gamma} \phi(t)q(t)dt = 0, \qquad q \in P_{-k}. \tag{1.9}$$

Условия ортогональности в этой теореме вытекают из разложения

$$(I\varphi)(z) = \sum\nolimits_{j\geq 0} c_j z^{-j-1}, \quad c_j = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(t) t^j dt,$$

интеграла типа Коши в окрестности ∞. Оно показывает, что неравенство $\deg(I\phi) \leq k-1$ обеспечивается условиями $c_j = 0$, $0 \leq j \leq -k-1$, которые

равносильны (1.9).

1.2 Задача линейного сопряжения

Обратимся к задаче (1.1), которую в условиях теоремы 1.1 рассматривает в пространстве $C^{\mu}_{\lambda(k)}(\widehat{D}, F)$ с произвольными весовым порядком λ и $k \in Z$. Кусочно - непрерывный коэффициент $G(t)$ принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$, который предполагается всюду отличным от нуля, включая его односторонние предельные значения в узлах $\tau \in F$. Нетрудно показать, что непрерывная на $\Gamma \backslash F$ ветвь логарифма $\ln G$ также принадлежит

$C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$.

Пусть $\rho > 0$ столь мало, что круги $|z-\tau| \leq \rho$ с центрами $\tau \in F$ попарно не пересекаются и

$$\Gamma \cap \{|z - \tau| \leq \rho\} = \cup_{1\leq j\leq n_\tau} \Gamma_{\tau,j},$$
$$\{|z - \tau| < \rho\} \setminus \Gamma = \cup_{1\leq j\leq n_\tau} S_{\tau,j}, \quad (1.9)$$

где гладкие дуги $\Gamma_{\tau,j}$ имеют своим общим концом точку τ и за исключением его попарно не пересекаются, а криволинейные сектора $S_{\tau,j}$, $1 \leq j \leq n_\tau$ имеют своей общей вершиной τ и попарно не пересекаются. Боковыми сторонами этих секторов служат дуги $\Gamma_{\tau,j}$.

Заметим, что в обозначениях (1.7) сумма $\sum_\tau n_\tau = 2m$. Предполагается, что ориентация дуг $\Gamma_{\tau,j}$ определяется ориентацией Γ.

В соответствии с (1.9) в точках множества F функция $\varphi \in C^\mu_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$ имеет $2m$ односторонних предельных значений

$$\phi(\tau,j) = \lim \phi(t) \quad \text{при} \quad t \to \tau,\ t \in \Gamma_{\tau,j}. \qquad (1.10)$$

Для этих функций имеем следующее дополнение теоремы 1.1, которое для общих кусочно - гельдеровых функций хорошо известно [16] и которое охватывается приводимой ниже леммой 1.3.

Лемма 1.2. *Если* $\varphi \in C^\mu_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$*, то в секторе* $S_{\tau,j}$ *интеграл типа Коши* $\varphi = I\phi$ *представим в виде*

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum\nolimits_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j}\varphi(\tau,j)\right]\ln(z-\tau) + \phi_\tau(z),\ \phi_\tau \in C^\mu_{+0}(S_{\tau,j},\tau),$$

где $\sigma_{\tau,j} = 1$ $(\sigma_{\tau,j} = -1)$*, если* τ *является правым (левым) концом дуги* $\Gamma_{\tau,j}$.

Положим

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\ln\left[\prod\nolimits_{j=1}^{n_\tau}[G(\tau,j)]^{\sigma_{\tau,j}}\right], \quad 0 \le \alpha_\tau < 1. \qquad (1.11)$$

Каждая дуга Γ_j с концами τ', τ'' в (1.7) содержит две дуги $\Gamma_{\tau',j'}$ и $\Gamma_{\tau'',j''}$, причем $\sigma_{\tau',j'} = -\sigma_{\tau'',j''}$. Поэтому комплексное число

$$\mathrm{Ind}\, G = \sum\nolimits_{\tau\in F}\zeta_\tau, \quad \zeta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\sum\nolimits_{j=1}^{n_\tau}\sigma_{\tau,j}(\ln G)(\tau,j), \qquad (1.12)$$

не зависит от выбора ветви логарифма и

$$æ(G) = \mathrm{Ind}\, G - \sum_\tau (\alpha_\tau + i\beta_\tau) \in \mathbb{Z}. \qquad (1.13)$$

Легко видеть также, что

$$\mathrm{Ind}\,G = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}(\ln G)\big|_{\Gamma_j},$$

где $(\ln G)\big|_{\Gamma_j}$ означают приращения функции $\ln G$ на дугах Γ_j в (1.7). По этой причине $\mathrm{Ind}\,G$ называем индексом Коши функции G.

Пользуясь теоремой 1.1 и леммой 1.2, стандартным образом [16] строится так называемая каноническая функция $X(z)$, отвечающая задаче (1.1) в заданном весовом классе C_λ^μ.

Теорема 1.2. *Для любого целочисленного порядка $s = (s_\tau,\ \tau \in F)$ существует единственная функция $X(z) \in C^\mu_{\alpha - s}(\widehat{D}, F)$, которая всюду отлична от нуля, включая предельные значения $X^\pm$ на $\Gamma \setminus F$, в секторах $S_{\tau,j}$ представима в виде*

$$X(z) = X_{\tau,j}(z)(z - \tau)^{\alpha_\tau + i\beta_\tau - s_\tau},\ z \in S_{\tau,j}, \tag{1.14}$$

где множитель $X_{\tau,j}$ принадлежит $C^\mu_{(+0)}(\widehat{S}_{\tau,j}, \tau)$ и всюду отличен от нуля, и удовлетворяет условиям

$$X^+ = GX^-, \qquad \lim_{z\to\infty} X(z)z^{æ(G)+s(F)} = 1, \tag{1.15}$$

где $s(F) = \sum_\tau s_\tau$.

Доказательство. Исходя из непрерывной на $\Gamma \setminus F$ ветви логарифма $\ln G \in C^\mu(\Gamma;F)$, рассмотрим интеграл типа Коши

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(\ln G)(t)dt}{t - z}, \quad z \in D.$$

В силу леммы 1.2 эта функция принадлежит $C^\mu_{-0}(\widehat{D}, F)$, удовлетворяет краевому условию $L^+ - L^- = \ln G$ и в секторах $S_{\tau,j}$ представима в виде

$$L(z) = \zeta_\tau \ln(z-\tau) + L_{\tau,j}(z), \quad L_{\tau,j} \in C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{S}_{\tau,j}, \tau),$$

где ζ_τ фигурирует в (1.12). Согласно (1.11) разность $k_\tau = \zeta_\tau - (\alpha_\tau + i\beta_\tau)$ является целым числом, причем в силу (1.12), (1.13) сумма $\sum_\tau k_\tau$ совпадает с $æ(G)$. Поэтому функция

$$X(z) = \prod_{\tau \in F} (z-\tau)^{-s_\tau - k_\tau} e^{L(z)}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

Если вместе с X этим условиям удовлетворяет и X_1, то их отношение $Y = X_1/X$ является ограниченной функцией, которая обладает свойством $Y^+ = Y^-$ и стремится к 1 на бесконечности. Поэтому на основании второй части теоремы 1.1 эта функция тождественно равна 1.

Отметим, что асимптотика канонических матриц- функции в точках $\tau \in F$ для задачи (1.1) в общем векторном случае приведена в [23]. С помощью канонической функции, обычным образом [16] строится эффективное решение задачи (1.1) в классе $C^{\mu}_{\lambda(k)}$.

Теорема 1.3. *Пусть $\lambda_\tau - \alpha_\tau \notin \mathbb{Z}$, $\tau \in F$, каноническая функция X задачи (1.1) отвечает семейству $s_\tau = [\alpha_\tau - \lambda_\tau]$, $\tau \in F$ и $æ = æ(G) + s(F) + k$. Тогда условия ортогональности*

$$\int_\Gamma [X^+(t)]^{-1} f(t) q(t)\, dt = 0, \qquad q \in P_{-æ}, \tag{1.16}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (1.1) в классе $C^{\mu}_{\lambda(k)}$, и при их выполнении все ее решения φ даются формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)p(z), \quad p \in P_æ. \tag{1.17}$$

В общем случае произвольного λ *эти утверждения справедливы по отношению к классу* $C^\mu_{\lambda-0(k)}$.

1.3 Асимптотика решения

Теорема 1.3 позволяет описать степенно- логарифмическую асимптотику в точках $\tau \in F$ решений задачи (1.1) при условии, что аналогичное поведение имеет правая часть f задачи (1.1). Начнем со следующего вспомогательного результата.

Пусть гладкая дуга Γ_0 с концами $\tau \neq \tau'$ ориентирована от τ к τ', задана простая область $D_0 \subseteq \mathbb{C}\setminus\Gamma_0$, причем $\Gamma_0 \cap \partial D_0$ является дугой с концами τ и $\tau_1' \neq \tau'$. Пусть в области D_0 выбрана ветвь логарифма $\ln(z-\tau)$ с разрезом вдоль Γ_0 и граничными значениями $\ln^+(t-\tau) = \ln(t-\tau)$ и $\ln^-(t-\tau) = \ln(t-\tau) + 2\pi i$ на Γ_0. Рассмотрим поведение интеграла типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D_0,$$

при $z \to \tau$ в ситуации, когда функция $\varphi \in C^\mu_{\lambda-0}(\Gamma_0,\tau)$ допускает степенно логарифмическую асимптотику вида

$$\varphi(t) = (t-\tau)^\zeta q[\ln(t-\tau)] + \varphi_0(t), \quad \varphi_0 \in C^\mu_\nu(\Gamma_0,\tau), \tag{1.18}$$

с некоторым многочленом $q \in P_n$ и $\mathrm{Re}\zeta = \lambda$.

Лемма 1.3. (а) *Пусть* $-1 < \mathrm{Re}\zeta = \lambda < \nu < 0$. *Тогда*

$$\phi(z) = (z-\tau)^{\zeta} p[\ln(z-\tau)] + \phi_0(z), \ \phi_0 \in C^{\mu}_{\nu}(\overline{D}_0, \tau), \qquad (1.19)$$

где многочлен p также принадлежит P_n и однозначно определяется из уравнения

$$p(u) - e^{2\pi i\zeta} p(u + 2\pi i) = q(u). \qquad (1.20)$$

(b) *Пусть* $\mathrm{Re}\zeta = \lambda = 0 < \nu < 1$. *Тогда при* $\zeta \neq 0$ *имеет место разложение*

$$\phi(z) = (z-\tau)^{\zeta} p[\ln(z-\tau)] + c_0 + \phi_0(z), \ \phi_0 \in C^{\mu}_{\nu}(\overline{D}_0, \tau), \qquad (1.21)$$

с некоторыми $p \in P_n$ и $c_0 \in$ C. Если $\zeta = 0$, то справедливо разложение (1.19) с той разницей, что $p \in P_{n+1}$.

Доказательство. (a) Убедимся прежде всего, что при $e^{2\pi i\zeta} \neq 1$ уравнение (1.20) в классе P_n однозначно разрешимо. Очевидно, оператор N этого уравнения можно записать в форме

$$Np = (1 - e^{2\pi i\zeta})p - \sum_{k\geq 1} \frac{(2\pi i)^k}{k!} p^{(k)} e^{2\pi i\zeta}, \qquad (1.22)$$

так что многочлен Np имеет ту же степень, что и p. Поэтому равенство $Np = 0$ влечет $p = 0$ и, следовательно, оператор N обратим в P_n.

Выберем положительные числа $\rho_1 < \rho_2$ столь малыми, что пересечение круга $\{|z - \tau| \leq \rho_k\}$ с Γ_0 является некоторой дугой Γ_k, $k = 1,2$ и, пусть S_k есть дополнение к Γ_0 в этом круге. Очевидно, утверждение леммы достаточно установить по отношению к сектору S_1, записывая условие

на функцию φ_0 в (1.19) в форме $\phi_0 \in C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{S}_1, \tau)$. Применим в секторе S_2

к функции $\Omega(z) = (z - \tau)^{\zeta} p[\ln(z - \tau)]$, где многочлен $p(u)$ есть решение уравнения (1.20), формулу Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-\tau|=\rho_2}\frac{\Omega(t)dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{[\Omega^{+}(t)-\Omega^{+}(t)]dt}{t-z}=\Omega(z), \quad z\in S_2.$$

В результате приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{(t-\tau)^{\zeta}q[\ln(t-\tau)]dt}{t-z}=\Omega(z)+H_0(z), \quad z\in S_1,$$

где функция $H_0(z)$ аналитична в круге $|z - \tau| < \rho_2$. Отсюда приходим к равенству (1.19) с функцией

$$\phi_0(z)=H_0(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0\setminus\Gamma_2}\frac{(t-\tau)^{\zeta}q[\ln(t-\tau)]dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi_0(t)dt}{t-z}, \quad z\in S_1,$$

и на основании теоремы 1.1 функция $\phi_0 \in C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{S}_1,\tau)$.

(b) Предположим сначала, что $\zeta \neq 0$. В силу очевидного соотношения

$$\frac{z-\tau}{(t-\tau)(t-z)}=\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\tau}$$

можем записать

$$\phi(z)=(z-\tau)\int_{\Gamma_0}\frac{\widetilde{\varphi}(t)dt}{t-z}+\int_{\Gamma_0}\widetilde{\varphi}(t)dt$$

с функцией $\widetilde{\varphi}(t)=(t-\tau)^{-1}\varphi_0(t)\in C^{\mu}_{\lambda-1}(\Gamma_0,\tau)$. Применяя к интегралу типа

Коши с плотностью ϕ первую часть (a) леммы, приходим к представлению

~

(1.21).

Пусть далее $\zeta = 0$. В этом случае (1.22) переходит в

$$Np=-\sum_{k\geq 1}\frac{(2\pi i)^k}{k!}p^{(k)}.$$

Запишем правую часть в форме $N_1 p'$, тогда соответствующие рассуждения (a) показывают, что оператор N_1 обратим в классе P_n. Следовательно, уравнение $p(u) - p(u + 2\pi i) = q(u)$ с правой частью $q \in P_n$ разрешимо в классе P_{n+1} и определено с точностью до константы. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим.

Отметим, что уравнение (1.20) можно решить в явной форме. С этой целью рассмотрим аналитическую функцию $g(u) = 1 - e^{2\pi iu}$. Исходя из тейлоровского разложения $g(\zeta + u)$ по степеням u и операции дифференцирования $Dp = p'$ в классе многочленов p, введем в этом классе линейную операцию

$$g(\zeta + D)p = \sum_{k\geq 0} \frac{g^{(k)}(\zeta)}{k!} D^k p.$$

В терминах этой операции уравнение (1.20) можно записать в виде $g(\zeta + D)p = q$. Пусть $\zeta \neq 0$ и $h(u) = (1 - e^{2\pi iu})^{-1}$. Тогда записывая тождество $h(\zeta + u)g(\zeta + u) = g(\zeta + u)h(\zeta + u) = 1$ для тейлоровских разложений по степеням u, убеждаемся, что операции $g(\zeta + D)$ и $h(\zeta + D)$ взаимно обратны, так что решением уравнения (1.20) служит $p = h(\zeta + D)q$.

При $\zeta = 0$ рассмотрим разложение функции $h(u)$ в ряд Лорана

$$h(u) = -\frac{1}{2\pi i} u^{-1} + \sum_{k\geq 0} c_k u^k$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{2\pi i}{12}, \quad c_2 = 0, \ldots,$$

и соответственно этому разложению положим

$$h(D)p = -\frac{1}{2\pi i} p^{(-1)} + \sum_{k\geq 0} c_k D^k p, \quad p^{(-1)}(u) = \int_0^u p(v)dv.$$

Тогда аналогично предыдущему проверяется, что $g(D)h(D)p = p$ для любого многочлена p, однако порядок операций здесь существенен. Поэтому многочлен $p = h(D)q$ является решением уравнения (1.20) и в этом случае.

Теорема 1.4. *Пусть функция* $\phi \in C^{\mu}_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ *есть решение задачи (1.1) с правой частью* $f \in C^{\mu}_{\lambda-0}(\Gamma, F)$, *которая в окрестности фиксированной точки* $\tau \in F$ *представима в виде*

$$f(t) = (t-\tau)^{\zeta} q_j[\ln(t-\tau)] + f_j(t),\ f_j \in C^{\mu}_{\lambda_\tau+0}(\Gamma_{\tau,j}, \tau), \tag{1.23}$$

где $\mathrm{Re}\zeta = \lambda_\tau$ *и* $q_j \in P_n$, $1 \le j \le n_\tau$.

Тогда если $\lambda_\tau - \alpha_\tau$ *разность не является целым числом, то в секторах* $S_{\tau,j}$ *функция* φ *представима в аналогичном виде*

$$\phi(z) = (z-\tau)^{\zeta} p_j[\ln(z-\tau)] + \phi_j(z),\ \phi_j \in C^{\mu}_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau), \tag{1.24}$$

с некоторыми многочленами $p_j \in P_n$. *Если* $\lambda_\tau - \alpha_\tau \in$ Z *и* $\zeta \neq \alpha_\tau + i\beta_\tau$, *то*

$$\phi(z) = (z-\tau)^{\zeta} p_j[\ln(z-\tau)] + c_j(z-\tau)^{\lambda_\tau + i\beta_\tau} + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^{\mu}_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau), \tag{1.25}$$

с некоторыми $c_j \in$ C *и* $p_j \in P_n$. *Наконец, при* $\zeta = \lambda_\tau + i\beta_\tau$ *имеет место представление (1.24) с многочленом* $p_j \in P_{n+1}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.3 решение $\phi \in C^{\mu}_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ задачи (1.1) представимо в виде

$$\varphi = X(\varphi_0 + p_0), \qquad \varphi_0 = I[(X^+)^{-1} f], \tag{1.26}$$

с некоторым многочленом p_0. На основании (1.23) и теоремы 1.2 можем записать

$$[X^+(t)]^{-1}f(t) = (t-\tau)^{\zeta_0}q_j[\ln(t-\tau)] + f_j^0(t), \quad f_j^0 \in C^\mu_{\nu_\tau+0}(\Gamma_{\tau,j},\tau),$$

где $\zeta_0 = \zeta - (\alpha_\tau + i\beta_\tau) + s_\tau$ и $\mathrm{Re}\zeta_0 = \nu_\tau$, $-1 < \nu_\tau \le 0$.

Предположим сначала, что $\nu_\tau < 0$. Тогда в силу леммы 1.3(a) отсюда

$$\phi_0(z) = (z-\tau)^{\zeta_0}p_j[\ln(z-\tau)] + \phi_j^0(z), \quad \phi_j^0 \in C^\mu_{\nu_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau), \qquad (1.27)$$

с многочленом $p_j \in P_n$, что для функции φ в (1.26) приводит к представлению (1.24).

Если $\nu_\tau = 0$ и $\mathrm{Im}\zeta_0 \neq 0$, то на основании леммы 1.3(b)

$$\phi_0(z) = (z-\tau)^{\zeta_0}p_j[\ln(z-\tau)] + c_j + \phi_j^0(z), \quad \phi_j^0 \in C^\mu_{+0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau),$$

с многочленами $p_j \in P_n$. Совместно с (1.26) отсюда следует представление (1.25). Наконец, при $\zeta_0 = 0$ из тех же соображений имеем разложение (1.27) с многочленом $p_j \in P_{n+1}$, что приводит к к представлению (1.24) и в этом

случае.

Проиллюстрируем теорему в ситуации, когда $\lambda_\tau = \zeta = 0$ и q_j являются многочленами нулевой степени, т.е. когда условие (1.23) переходит в

$$f(t) \in C^\mu_{(+0)}(\Gamma_{\tau,j},\tau), \quad 1 \le j \le n_\tau. \qquad (1.28)$$

На основании теоремы 1.4 отсюда следует, что при $0 < \alpha_\tau < 1$ любое решение $\phi \in C^\mu_{-0}$ задачи (1.1) в секторах $S_{\tau,j}$ также принадлежит классу $C^\mu_{(+0)}(\overline{S}_{\tau,j},\tau)$. Если $\alpha_\tau = 0$, но $\beta_\tau \neq 0$, то согласно (1.25) имеем разложение

$$\phi(z) = c_j (z-\tau)^{i\beta_\tau} + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^{\mu}_{(+0)}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau).$$

Наконец при $\alpha_\tau = \beta_\tau = 0$ многочлены p_j в (1.24) имеют степень 1 и, следовательно, в этом случае

$$\phi(z) = c_j \ln(z-\tau) + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^{\mu}_{(+0)}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau). \tag{1.29}$$

Таким образом, решение φ будет ограниченным в окрестности τ для любой функции f вида (1.28) тогда и только тогда, когда $\alpha_\tau + i\beta_\tau \neq 0$. По терминологии Н.И. Мусхелишвили [16] точки $\tau \in F$, для которых $\alpha_\tau \neq 0$, называются неособенными.

Из доказательства теоремы 1.4 и леммы 1.2 видно, что при $\alpha_\tau = 0$ коэффициент c_j в разложении (1.29) обращаются в нуль тогда и только тогда, когда функция f в (1.28) подчинена условию

$$\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j} \frac{f(\tau,j)}{X^+(\tau,j)} = 0. \tag{1.30}$$

Здесь учтено, что в соответствии с принятым предположением и теоремой 1.2 каноническая функция $X(z) \in C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{S}_{\tau,j}, \tau)$ и, следовательно, $X^+ \in C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma_{\tau,j})$.

Рассмотрим частный случай, когда $n_\tau = 2$ и знаки $\sigma_{\tau,j}$, $j = 1,2$, противоположны, например, $\sigma_{\tau,1} = -\sigma_{\tau,2} = 1$. Тогда в окрестности τ кривая Γ ориентирована единым образом, причем дуга $\Gamma_{\tau,1}$ лежит слева от τ и ее можно обозначить $\Gamma_{\tau,-0}$, и аналогично $\Gamma_{\tau,2} = \Gamma_{\tau,+0}$. Соответственно предельные значения (1.10) на этих дугах можно обозначить $\phi(\tau \pm 0)$. В этом случае (1.11) принимает вид

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(\tau - 0)}{G(\tau + 0)}, \quad 0 \leq \alpha_\tau < 1.$$

Пусть $G(\tau - 0) = G(\tau + 0)$ и выполнено условие (1.28). Тогда для аналитической функции φ в двух секторах $S_{\tau,1}$ и $S_{\tau,2}$ будем иметь разложение (1.29). Пусть каноническая функция $X(z)$ в теореме 1.2 построена для случая, когда все $s_\tau = 0$. Тогда ее сужение X_j на сектор $S_{\tau,j}$ вместе со своим обратным принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{S}_{\tau,j}, \tau)$. Считая для определенности сектор $S_{\tau,1}$ расположенным слева от Γ, приходим к заключению, что значения $X^{+}(\tau \pm 0)$ совпадают с $X_1(\tau)$ и, следовательно, соотношение (1.30) сводится к равенству $f(\tau + 0) = f(\tau - 0)$. Выполнение этого условия необходимо и достаточно для обращения в нуль логарифмического слагаемого
в (1.29).

В заключение остановимся на случае, когда Γ является кусочно – гладким контуром, т.е. каждая связная компонента этой кривой гомеоморфна окружности, и функция $G \in C^{\mu}(\Gamma)$. Пусть эти компоненты, которые обозначим $\Gamma_{(1)},\ldots,\Gamma_{(n)}$, ориентированы определенным образом (по или против часовой стрелки). Поскольку в рассматриваемом случае $\alpha_\tau + i\beta_\tau = 0$ для всех $\tau \in F$, каноническая функция $X(z)$, построенная по теореме 1.2 для

$s = 0$, вместе со своей обратной $1/X(z)$ принадлежит $\overline{C^{\mu}(D^{\pm})}$. Соответственно для $f \in C^{\mu}(\Gamma)$ теорема 1.3 описывает разрешимость задачи (1.1) а

классе функций $\phi \in C^{\mu}(\widehat{D})$ с порядком не выше $k - 1$ на ∞.

Целое число æ в рассматриваемом случае совпадает с индексом Коши æ = $\mathrm{Ind}G$, которое определяется суммой приращений ветви $\ln G$ на простых контурах $\Gamma_{(j)}$ в соответствии с их ориентацией, т.е.

$$æ = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n} \ln G\big|_{\Gamma_{(j)}}. \quad (1.31)$$

Здесь ветвь логарифма предполагается непрерывной на $\Gamma_{(j)}$ вне фиксированной точки $\tau_{(j)}$.

Следуя [16, 14], каноническую функцию можно строить по той же схеме, что и в теореме 1.3, но только исходя из компонент $\Gamma_{(j)}$. Если все слагаемые в правой части (1.31) равны нулю, то $\ln G \in C^{\mu}(\Gamma)$ и можно положить

$$X(z) = \exp[I(\ln G)](z), z \in D.$$

В общем случае пусть $æ_j$ означает j−ое слагаемое в правой части (1.31). Каждый простой контур $\Gamma_{(j)}$ разбивает плоскость на конечную D_j^0 и бесконечную D_j^1 области. Выберем точку $a_j \in D_j^0$ и положим

$$G_1(t) = \prod_{j=1}^{s}(t - a_j)^{\sigma_j æ_j}, \quad t \in \Gamma,$$

где $\sigma_j = 1$, если контур $\Gamma_{(j)}$ ориентирован против часовой стрелки, и $\sigma_j = -1$ в противном случае. Очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i} \ln G_1\big|_{\Gamma_{(j)}} = æ_j, \quad 1 \le j \le n,$$

и, следовательно, функция $G_0 = G_1^{-1}G$ обладает свойством $\ln G_0 \in C^\mu(\Gamma)$. Легко видеть, что аналитическая вне Γ функция

$$X_1(z) = \prod_{j=1}^{n} Y_j(z), \quad Y_j(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_j^0, \\ (z - a_j)^{-æ_j}, & z \in D_j^1, \end{cases}$$

будет канонической для коэффициента $G_1(t)$. Соответственно каноническую функцию для коэффициента G можем определить равенством

$$X(z) = X_0(z)X_1(z), \qquad X_0(z) = \exp[I(\ln G_0)](z), z \in D.$$

Глава 2. Задача линейного сопряжения с треугольным матричным коэффициентом

2.1 Задача линейного сопряжения в l-мерном пространстве

Рассмотрим классическую задачу линейного сопряжения

$$\varphi^+ - G\varphi^- = g \tag{2.1}$$

для аналитических $l-$ вектор-функций $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$ с треугольным матричным коэффициентом G, заданным на кусочно-гладкой кривой Γ. Последняя составлена из конечного числа ориентированных гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам.

Граничные значения $\varphi^{\pm}$ понимаются по отношению к этой ориентации. Концы указанных дуг составляют множество F угловых точек кривой.

При достаточно малом $\rho > 0$ кривая $\Gamma_\tau = \Gamma \cap \{|z - \tau| \le \rho\}$ состоит из некоторого числа n_τ дуг $\Gamma_{\tau,j}$, $1 \le j \le n_\tau$, с общим концом τ. Для определенности их нумерация выбрана в порядке обхода точки τ против часовой стрелки. По отношению к ориентации Γ дуга $\Gamma_{\tau,j}$ может "входить" либо "выходить" из τ, соответственно этому полагаем $\sigma_{\tau,j} = 1$ и $\sigma_{\tau,j} = -1$. Открытый круг $|z - \tau| < \rho$ разбивается Γ на криволинейные сектора $S_{\tau,j}$, $1 \le j \le n_\tau$, боковыми сторонами которого служат дуги $\Gamma_{\tau,j}$ и $\Gamma_{\tau,j+1}$. При $n_\tau = 1$ эти стороны совпадают, т.е $S_\tau = S_{\tau,1}$ представляет собой круг с разрезом вдоль $\Gamma_\tau = \Gamma_{\tau,1}$.

Все принятые в первой главе обозначения относительно весовых классов Гельдера сохраняются без изменений. Как и в первой главе предполагается, что матрица -функция G кусочно - непрерывна и принадлежит классу

$C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma, F)$, причем ее определитель $\det G$ всюду отличен от нуля, включая предельные значения

$$(\det G)(\tau, j) = \lim_{t \in \Gamma_{\tau,j},\, t \to \tau} (\det G)(t),\ 1 \le j \le n_\tau,$$

в угловых точках $\tau \in F$ кривой.

Задачу (2.1) рассматриваем в весовом классе $C^{\mu}_{\lambda}(\hat{D}, F)$ аналитических в открытом множестве $D = \mathbb{C} \setminus F$ функций, компоненты φ_k которых имеют конечные порядки на бесконечности, подчиненные условию

$$\deg\varphi_k \le n_k - 1, \qquad 1 \le k \le l, \tag{2.2}$$

с заданными целыми числами n_k. Другими словами, в окрестности ∞ они имеют поведение $O(|z|^{n_k-1})$ или, что равносильно, допускают разложение

$$\varphi_k(z) = \sum_{s\le n_k-1} c_{j,s} z^s.$$

Задача Римана – Гильберта исчерпывающим образом изучена в известных монографиях [16, 11] в классе H^* интегрируемых функций φ, принад-

лежащих $C^{\mu}_{\lambda}(\hat{D}, F)$ с некоторыми $\lambda > -1$ и $0 < \mu < 1$, а также в классах H_ε почти ограниченных функций $H(D,\hat{F})$ ограниченных функций, принадлежащих, соответственно, $C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$ для всех $\lambda < 1$, и $C^{\mu}_{(+0)}(\hat{D}, F)$ с некоторым $0 < \mu < 1$. Однако различные приложения этой задачи требуют исследования этой задачи в пространстве C_λ^μ для всех весовых порядков. Например, подобная ситуация возникает при рассмотрении задачи Римана– Гильберта в односвязных областях с кусочно - гладкой границей с помощью конформных отображений [25], а также при изучении задачи линейного сопряжения для полианалитических функций.

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем $l = 2$, когда

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

В силу треугольности этой матрицы задача (2.1) сводится к последовательному решению двух скалярных задач сопряжения

$$\psi^{+} - G_k \psi^{-} = g, \qquad k = 1,2, \tag{2.4}$$

в классе функций $\psi \in C^{\mu}_{\lambda}(\hat{D}, F)$, подчиненных условию (2.2) на бесконеч-

ности.

Запишем для краткости интеграл типа Коши в форме

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma,$$

который при $-1 < \lambda < 0$ определяет ограниченный оператор $I : C_{\lambda}^{\mu}(\Gamma, F) \to C_{\lambda}^{\mu}(D, \hat{F})$. Исходя из непрерывной на $\Gamma \setminus F$ ветви логарифма $\ln G_k$, которая вместе с G_k принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma, F)$, введем функцию h_k =

$I(\ln G_k)$, которая исчезает на бесконечности, м связанную с ней функцию

$$X_k(z) = e^{h_k(z)} \prod_{\tau} (z - \tau)^{-s_\tau}, \tag{2.5}$$

с некоторыми целыми s_τ, которая является канонической для задачи (2.4).

В секторах $S_{\tau,j}$ функция h_k представима в виде

$$h_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum\nolimits_{s=1}^{n_\tau}\sigma_{\tau,s}(\ln G_k)(\tau,s)\right]\ln(z-\tau) + h_{k,\tau,j}(z)$$

$$h_{k,\tau,j} \in C^{\mu}_{(+0)}(S_{\tau,j}, \tau),$$

Положим

$$\frac{1}{2\pi}\arg\prod\nolimits_{j=1}^{n_\tau}[G_k(\tau,j)]^{\sigma_{\tau,j}} = \alpha_{k,\tau} + i\beta_{k,\tau}, \quad 0 \le \alpha_{k,\tau} < 1, \tag{2.6}$$

так что

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\sum\nolimits_{s=1}^{n_\tau}\sigma_{\tau,s}(\ln G_k)(\tau,s)\right]=\alpha_{k,\tau}+i\beta_{k,\tau}+s_{k,\tau}$$

с некоторым целым $s_{k,\tau}$. Заметим, что сумма слагаемых в левой части по τ совпадает с индексом Коши $\operatorname{Ind} G_k$ функции G_k, т.е деленную на $2\pi i$ сумму приращений $\ln G_k$ на дугах, составляющих кривую $\Gamma\backslash F$, которые взяты в соответствии с их ориентацией. Таким образом,

$$\operatorname{Ind} G_k = \sum_\tau (\alpha_{k,\tau} + i\beta_{k,\tau} + s_{k,\tau}). \qquad (2.7)$$

Очевидно, в секторах $S_{\tau,j}$ функция X_k представима в виде

$$X_k(z) = A_{k,\tau,j}(z)(z-\tau)^{\delta_{k,\tau}+i\beta_{k,\tau}}, \qquad \delta_{k,\tau} = -s_\tau + s_{k,\tau} + \alpha_{k,\tau}, \qquad (2.8)$$

где A, $1/A \in C^{\mu}_{(+0)}(\hat S_{\tau,j},\tau)$.

Произвол в выборе целых чисел s_τ в определении (2.5) подчиним условию

$$\lambda \le \delta_k < \lambda + 1 \qquad (2.9)$$

по отношению к весовому порядку $\delta_k = (\delta_{k,\tau}, \tau \in F)$. Тогда $[\alpha_{k,\tau} - \lambda_\tau] + s_{k,\tau} = s_\tau$, где $[x]$ означает целую часть числа x. С учетом (2.7) отсюда

$$\lim_{z\to\infty} z^{æ_k} X_k(z) = 1, \qquad æ_k = \sum_\tau [\alpha_{k,\tau} - \lambda_\tau] + \operatorname{Ind} G_k - \sum_\tau (\alpha_{k,\tau} + i\beta_{k,\tau}), \qquad (2.10)$$

Как было показано в первой главе с помощью канонической функции легко описать разрешимость задачи (2.4). С этой целью обозначим P_k класс многочленов степени не выше $æ_k + n_k - 1$ (считая $P_k = 0$ при $æ_k + n_k \le 0$) и пусть Q_k имеет аналогичный смысл по отношению к многочленам степени не выше $-(æ_k + n_k) - 1$. Таким образом, $\dim P_k =$

$æ_k + n_k$, $\dim Q_k = 0$ при $æ_k + n_k \geq 0$ и $\dim P_k = 0$, $\dim Q_k = -(æ_k + n_k)$ при $æ_k + n_k \leq 0$. Во всех случаях $\dim P_k - \dim Q_k = æ_k + n_k$.

Теорема 2.1. *При выполнении условий*

$$\lambda_\tau - \alpha_{k,\tau} \notin \mathbb{Z},\ \tau \in F, \tag{2.11}$$

задача (2.4) разрешима в классе функций $\psi \in C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$, *подчиненных условию* $\deg\psi \leq n_k - 1$ *на бесконечности, тогда и только тогда, когда*

$$\langle (X^+)^{-1}g, q\rangle = 0,\ q \in Q_k,$$

где для краткости положено

$$\langle \phi, q\rangle = \int_\Gamma \phi(t)q(t)dt.$$

При выполнении этого условия ее общее решение дается формулой

$$\psi = X_k I[(X_k^+)^{-1}g] + X_k p,\ p \in P_k.$$

Отметим, что согласно (2.8) оператор умножения $g \to (X_k^+)^{-1}g$ осуществляет изоморфизм $C_\lambda^\mu \to C_{\lambda-\delta_k}^\mu$. В силу (2.10) весовой порядок $\lambda_k = \lambda - \delta_k$ удовлетворяет условию $-1 < \lambda_k < 0$, так что оператор $g \to X_k I[(X_k^+)^{-1}g]$ ограничен $C_\lambda^\mu(\Gamma,F) \to C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$. Если условие (2.10) нарушено для некоторых τ, то можно лишь утверждать, что функция $\psi = X_k I[(X_k^+)^{-1}g]$ принадлежит классу $C_{\lambda-0}^\mu$ (т.е. классу $C_{\lambda-\varepsilon}^\mu$ для любого $\varepsilon > 0$).

Из теоремы также следует, что индекс задачи равен $\dim P_k - \dim Q_k = æ_k + n_k$.

Обратимся к задаче (2.1) – (2.3), для которой положим

$$a = G_0 X_2^-(X_1^+)^{-1}. \tag{2.12}$$

В силу (2.8) эта функция принадлежит классу $C^\mu_{\delta_2-\delta_1}(\Gamma, F)$. Согласно (2.9) весовой порядок $\delta_2-\delta_1$ заключен строго между -1 и 1, так что функция a интегрируема на Γ. В соответствии с этим в принятых выше обозначениях можем ввести классы многочленов

$$P_2^0 = \{p \in P_2 \,|\langle ap, q\rangle = 0,\ q \in Q_1\},$$

$$Q_1^0 = \{q \in Q_1 \,|\langle ap, q\rangle = 0,\ p \in P_2\}, \tag{2.13}$$

Лемма 2.1. *В разложениях*

$$P_2 = P_2^0 \oplus P_2^1, \quad Q_1 = Q_1^0 \oplus Q_1^1 \tag{2.14}$$

подпространства P_2^1 *и* Q_1^1 *имеют общую размерность* $r = \dim P_2^1 = \dim Q_1^1$.

При этом существует единственный линейный оператор R, *который интегрируемой на* Γ *функции* $g \in L(\Gamma)$ *ставит в соответствие много-*
член $p = Rg \in P_2^1$ *со свойством*

$$\langle ap,q_i\rangle = \langle g,q_i\rangle, \qquad 1 \le i \le r, \tag{2.15}$$

где $q_1,\dots,q_r$ *– некоторый базис в* Q_1^1.

Доказательство. По определению (2.13) билинейная форма $\langle ap,q\rangle$ невырождена на произведении $P_2^1 \times Q_1^1$ в том смысле, что равенства $\langle ap,q\rangle = 0,\ q \in Q_1^1$ влекут $p = 0$ и, наоборот, равенства $\langle ap, q\rangle = 0,\ p \in P_2^1$ влекут

$q = 0$. Отсюда равенство $\dim P_2^1 = \dim Q_1^1$ получается непосредственно.

В самом деле, пусть элементы $p_1,\dots,p_s$ и $q_1,\dots,q_r$ образуют базисы, соответственно, P_2^1 и Q_1^1. Тогда в силу указанного свойства невырожденности строки и столбцы $s \times r-$ матрицы A с элементами $\langle ap_i,q_j\rangle$ линейно независимы, так что эта матрица квадратна.

Полагая $p = \xi_1 p_1 + \dots \xi_r p_r \in P_2^1$, систему (2.15) можем записать в форме

$$\sum\nolimits_{i=1}^{r} \xi_i \langle ap_i, q_j\rangle = \langle g, q_j\rangle, \quad j = 1,\dots,r.$$

Поскольку матрица A этой системы обратима, то по отношению к обратной

матрице $B = (B_{ij})_1^r$ приходим к выражению

$$\xi_i = \sum\nolimits_{j=1}^{r} B_{ij}\langle g, q_j\rangle,$$

так что можем положить

$$Rg = \sum_{1\le i,j\le r} B_{ij} p_i \langle g,q_j\rangle.$$

То, что оператор R со свойством (2.15) единственен, почти очевидно. В самом деле, пусть $p \in P_2^1$ и $\langle ap, q_i\rangle = 0, \quad 1 \le i \le r$. Тогда $\langle ap,q\rangle = 0$ для

всех $q \in Q_1$ и, следовательно, $p \in P_1^0$, что в соответствии с разложением (2.14) возможно только для $p = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть условия (2.10) выполнены для обоих значений k = 1,2 и функции g_1, $g_2 \in L(\Gamma)$ определяются равенствами*

$$2X_1^+ g_1 = 2f_1 + G_0 G_2^{-1}[-f_2 + X_2^+ S (X_2^+)^{-1} f_2], \quad X_2^+ g_2 = f_2 \qquad (2.16)$$

с сингулярным оператором Коши S.

Тогда задача (2.1) – (2.3) разрешима в классе $C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$ аналитических в $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ вектор- функций $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle g_1, q\rangle = 0,\ q \in Q_1^0; \quad \langle g_2, q\rangle = 0,\ q \in Q_2, \tag{2.17}$$

и при выполнении этих условий в обозначениях леммы 2.1 общее решение задачи дается формулой

$$\phi_1 = X_1[I(g_1 - Rg_1 + p_2^0) + p_1], \quad p_1 \in P_1,\ p_2^0 \in P_2^0,$$

$$\phi_2 = X_2(Ig_2 - Rg_1 + p_2^0), \tag{2.18}$$

с оператором R из леммы 2.1.

Доказательство. Запишем краевое условие (2.3) в покомпонентном виде

$$\phi_1^+ - G_1\phi_1^- = f_1 + G_0\phi_2^-, \quad \phi_2^+ - G_2\phi_2^- = f_2,$$

и последовательно ко второму и первому уравнениям применим теорему 2.1. Тогда необходимые и достаточные условия разрешимости задачи примут вид

$$\langle X_1^+)^{-1}(f_1 - G_0\phi_2^-), q\rangle = 0,\ q \in Q_1;$$

$$\langle X_2^+)^{-1}f_2, q\rangle = 0,\ q \in Q_2, \tag{2.19}$$

при выполнении которых ее решение дается формулами

$$\phi_1 = X_1 I[(X_1^+)^{-1}(f_1 - G_0\phi_2^-)] + X_1p_1,\ p_1 \in P_1, \tag{2.20}$$

$$\phi_2 = X_2 I[(X_2^+)^{-1} f_2] + X_2 p_2,\ p_2 \in P_2.$$

Из последнего равенства по формуле Сохоцкого- Племеля имеем:

$$2\phi_2^- = X_2^-[-(X_2^+)^{-1} f_2 + S(X_2^+)^{-1} f_2] + 2X_2^- p_2 =$$

$$= G_2^{-1}[-f_2 + X_2^- S(X_2^+)^{-1} f_2] + 2X_2^- p_2,$$

так что в обозначениях (2.12), (2.16) получим

$$(X_1^+)^{-1}(f_1 - G_0\phi_2^-) = g_1 + ap_2. \qquad (2.21)$$

В результате первое соотношение в (2.19) примет вид

$$\langle g_1 + ap_2, q\rangle = 0,\ q \in Q_1.$$

Очевидно, оно равносильно паре соотношений $\langle g_1, q\rangle = 0,\ q \in Q_1^0$, и $\langle g_1 + ap_2, q\rangle = 0,\ q \in Q_1^1$. Полагая $p_2 = p_2^0 + p_2^1,\ p_2^j \in P_2^j$, в последнем соотношении можем p_2 заменить на p_2^1. На основании леммы 1 из него следует, что $p_2^1 = -Rg_1$. Совместно с первым соотношением отсюда приходим к условию разрешимости (2.17) для g_1. При этом (2.21) переходит в

$$(X_1^+)^{-1}(f_1 - G_0\phi_2^-) = g_1 - Rg_1 + ap_2^0,\ p_2^0 \in P_2^0.$$

Подставляя это выражение в (2.20), приходим к справедливости (2.18), что завершает доказательство теоремы.

Отметим, что число линейно независимых условий ортогональности в (2.17) равно $\dim Q_1^0 + \dim Q_2$. С другой стороны, формула (2.18) показывает, что пространство решений однородной задачи имеет размерность $\dim P_1 + \dim P_2^0$. Поэтому индекс задачи

$$æ(G) = \dim P_1 + \dim P_2^0 - \dim Q_1^0 - \dim Q_2.$$

Согласно (2.14) $\dim P_2^0 = \dim P_2 - \dim P_2^1$ и $\dim Q_2^0 = \dim Q_2 - \dim Q_2^1$. Подставляя эти выражения в предыдущее равенство и учитывая, что в силу леммы 2.1 $\dim P_2^1 = \dim Q_1^1$, приходим к выражению

$$æ(G) = \sum_{k=1,2} (\dim P_k - \dim Q_k) = æ_1 + æ_2 - n_1 - n_2$$

для индекса задачи, аналогичному для скалярного случая.

2.2 Каноническая матрица-функция

Задачу линейного сопряжения (2.1) в пространстве C_λ^μ с любым весовым порядком λ можно решать с помощью канонической матрицы- функции $X(z)$. Вопрос ее существования и асимптотики в точках $\tau \in F$ были изучены в [23]. Однако в рассматриваемом случае треугольной матрицы этот вопрос решается элементарно.

Пусть, как обычно заданы кусочно- гладкая кривая Γ с множеством узлов F и ее дополнение $D = \mathbb{C}\setminus\Gamma$. Исходя из весового порядка $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$, рассмотрим семейства весовых пространств $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ и $C_\lambda^\mu(D, \hat{F})$, $0 < \mu < 1$, где элементами последнего пространства служат аналитические в D функции, имеющие конечный порядок $k = \deg\varphi$ на бесконечности.

Другими словами, в разложении функции φ в ряд Лорана в окрестности бесконечности по целым степеням z^i все коэффициенты с номерами $i >$

k обращаются в нуль. Открытые дуги, составляющие Γ, предполагаются ориентированными, так что для функций φ этого класса определены граничные значения $\varphi^{\pm} \in C_{\lambda}^{\mu}(\Gamma, F)$.

Пусть $l \times l-$ матрица - функция G кусочно - непрерывна на Γ и принадлежит классу $C^{\nu}_{(+0)}(\Gamma, F)$, т.е. ее сужение на каждую разомкнутую дугу $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, для которой $F \cap \Gamma_0$ состоит из единственной точки $\tau_0 \in F$, являющейся одним из ее концов, принадлежит классу $C^{\nu}_{(+0)}(\Gamma_0, \tau_0)$, т.е. это
сужение непрерывно на Γ_0 и $G(t) - G(\tau_0) \in C^{\mu}_{\varepsilon}(\Gamma_0, \tau_0)$ с некоторым малым
$\varepsilon > 0$. В дальнейшем предполагается, что определитель $\det G$ всюду отличен от нуля всюду на Γ, включая его предельные значения в точках $\tau \in F$ по дугам, сходящимся к τ.

По определению аналитическая в D матрица- функция каноническая (по отношению к коэффициенту G или, кратко $G-$ каноническая), если ее определитель всюду отличен от нуля в D, вместе со своим определителем она принадлежит классу $C_{\lambda}^{\mu}(D, \hat{F})$ для некоторого весового порядка λ и выполнено краевое условие

$$X^{+} = GX^{-}. \tag{2.22}$$

Заметим, что если матрица - функция $R(z)$ рациональна, причем ее нули и полюса могут лежать только в F, то вместе с X канонической функцией будет и XR. Класс такие рациональных матриц - функций обозначим $\mathscr{R}$. Верно и обратное: любые две канонические функции связаны соотношением

$$X_1 = X_2 R, \qquad R \in \mathscr{R}. \qquad (2.24)$$

В самом деле, в силу (2.22) имеем равенство $X_1^+(X_1^-)^{-1} = X_2^+(X_2^-)^{-1}$, что для матрицы- функции $Y = X_1 X_2^{-1}$ дает соотношение $Y^+ = Y^-$. Поэтому эта функция аналитична в $\mathbb{C} \setminus F$ и в точках $\tau \in F$ может допускать только полюса, что возможно только когда она рациональна. Поскольку $\det Y(z) \neq 0$, $z \in D$, нули и полюса этой функции могут лежать только в D.

Возникает вопрос существования канонических матриц– функций.

Теорема 2.3. *Для любого весового порядка λ существует каноническая функция $X \in C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$.*

Доказательство. Рассмотрим в классе $C_\lambda^\mu(\hat{D}, F)$ вектор – функций $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ однородную задачу линейного сопряжения

$$\varphi^+ - G\varphi^- = 0, \qquad (2.24)$$

которой согласно (2.22) удовлетворяют столбцы канонических матриц. Для этой задачи справедливы следующие утверждения.

(i) *Пространство решений задачи (2.24) в классе $C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$ конечномерно, причем его размерность $k(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda_\tau \to -\infty$ хотя бы для одного τ и существует такое натуральное n, что $k(\lambda) = 0$ при $\lambda_\tau \geq n$ для всех τ.*

(ii) *Пусть точка $\tau' \in \Gamma \setminus F$, весовой порядок $\tilde{\lambda}$ задан на множестве*

$\tilde{F} = F \cup \{\tau'\}$ *и совпадает с* λ *на* F, *причем* $\tilde{\lambda}_{\tau'} > -1$. *Тогда любое решение* $\phi \in C^{\mu}_{\tilde{\lambda}}(\hat{D}, \tilde{F})$ *задачи (2.24) принадлежит* $C^{\mu}_{\lambda}(D, \hat{F})$.

Первое утверждение позволяет составить матрицу- функцию $Y \in C^{\mu}_{\lambda}(\hat{D}, F)$, удовлетворяющую условию (2.22). Очевидно, ее определитель $\det Y$ принадлежит пространству $C^{\mu}_{n\lambda}(D, \hat{F})$ и удовлетворяет краевому условию

$$(\det Y)^{+} = (\det G)\det Y^{-}. \qquad (2.25)$$

Предположим, что $\det Y(z_0) = 0$в некоторой точке $z_0 \in D$ и ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ выбран по условию $Y(z_0)xi = 0$. Пусть матрица $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ осуществляет проектирование $\mathbb{C}^n$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор ξ, так что $Y(z_0)P = 0$. Рассмотрим рациональную - матрицуфункцию $R(z) = (z - z_0)^{-1}P + 1 - P$, где 1 означает единичную матрицу.

Поскольку

$$Y(z)R(z) = [Y(z) - Y(z_0)]R(z) + Y(z_0)(1 - P), \qquad (2.26)$$

матрица - функция $Y_1 = Y R$ также аналитична в D и ее определитель

$$\det Y_1(z) = (z - z_0)^{-1}\det Y(z)$$

удовлетворяет (2.25). Очевидно, порядок этой функции на бесконечности по сравнению с порядком $\det Y$ уменьшился на единицу.

Аналогичным образом поступаем и в случае, когда $\det Y^{+}(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in \Gamma \setminus F$. В этом случае в силу соотношения (2.22), которому удовлетворяет Y, найдется такой ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$, что $Y^{\pm}(t_0)\xi = 0$. Полагая $Y_1 = YR$ с $R(z) = (z - t_0)^{-1}P + 1 - P$, аналогично (2.26) можем записать

$$Y^{\pm}(t)R(t) = [Y^{\pm}(t) - Y^{\pm}(t_0)]R(t) + Y^{\pm}(t_0)(1 - P).$$

Это равенство показывает, что матрица функция Y_1 удовлетворяет условиям предложения (ii) с $\tilde{\tau} = t_0$ и $\tilde{\lambda}_{\tilde{\tau}} = \mu - 1$. Поэтому на основании этого предложения она по- прежнему принадлежит классу $C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$.

Итак, в случае существования нуля функции $\det Y$ в D или $\Gamma \setminus F$ можем переходить от Y к $Y_1 \in C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$ с понижением порядка $\det Y$ на бесконечности на единицу. В силу предложения (i), примененного к задаче (2.25) в классе $C^\mu_{n\lambda}$, эта процедура имеет конечное число шагов, которые исчерпывают все нули $\det Y$ и приводят к канонической матрице X.

Удобно ввести следующее понятие. Каноническая функция $X(z)$ имеет нормальную форму на бесконечности, если в окрестности ∞ она представима в виде

$$X(z) = X_0(z)\operatorname{diag}(z^{-æ_1},\dots,z^{-æ_l}) \qquad (2.27)$$

с некоторыми целыми $æ_j$, где X_0 имеет предел конечный предел $X_0(\infty)$ при $z \to \infty$, причем $\det X_0(\infty) \neq 0$.

По определению две канонические функции X_1 и X_2 эквивалентны, если они связаны соотношением $X_1 = X_2P$, где P является матричным многочленом с постоянным ненулевым определителем.

Следующая лемма принадлежит Н.И. Мусхелишвили ([16], стр. 426).

Лемма 2.2. *Для любой канонической функции X существует эквивалентная ей матрица- функция, имеющая нормальную форму на бесконечности.*

Доказательство. Пусть матрица- функция X каноническая и $-æ_j$ есть порядок на бесконечности ее j–го столбца, который обозначим $X_{(j)}$. Поскольку умножение X справа на матрицу перестановки приводит к перестановки ее столцов, не ограничивая общности можно считать, что $æ_j \le æ_{j+1}$. Таким образом, в окрестности ∞ для элементов этой матрицы имеем представление

$$X_{ij}(z) = z^{-æ_j}[A_{ij} + O(|z|^{-1})]. \tag{2.28}$$

Предположим, что X не имеет нормальной формы на бесконечности, т.е. $\det a = 0$. Тогда столбцы матрицы A линейно зависимы, так что для некоторого $1 < m \le n$ выполнено соотношение

$$\alpha_1 A_{(1)} + \ldots + \alpha_m A_{(m)} = 0, \qquad \alpha_m \neq 0.$$

Рассмотрим эквивалентную каноническую матрицу $\tilde{X}$, столбцы которой

$\tilde{X}_{(j)} = X_{(j)}$ при $j \neq m$ и

$$\tilde{X}_{(m)} = \alpha_1 z^{-æ_m+æ_1} X_{(1)} + \ldots + \alpha_{m-1} z^{-æ_m+æ_{m-1}} X_{(m-1)} + \alpha_m X_{(m)}.$$

Тогда $\tilde{X}$ имеет аналогичное (2.28) поведение на бесконечности с целыми $æ_j$, которые совпадают с $æ_j$ при $j \neq m$, а $\tilde{æ}_m > æ_m$.

Таким образом, эта процедура на каждом шаге понижает порядок на бесконечности одного из столбцов по крайней мере на одну единицу. В соответствии с теоремой 2.3(i) эта процедура на каком-то шаге должна оборваться и привести к канонической функции с нормальной формой на
бесконечности.

Можно показать, что целые числа $æ_j$ в лемме 2.2 с точностью до перестановки определены однозначно, они называются частными индексами матрицы X. В качестве иллюстрации рассмотрим случай треугольной матрицы.

Очевидно, если матрица-функция

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1l} \\ 0 & X_{22} & \cdots & X_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{ll} \end{pmatrix},$$

аналитична в окрестности ∞ и для некоторых целых $æ_j$ ее элементы допускает конечные пределы

$$\lim_{z\to\infty} z^{æ_j} X_{ij}(z) = a_{ij}, \quad 1 \le i \le j,$$

причем $a_{ii} \neq 0$, то ее частными индексами служат $æ_j$, $1 \le j \le l$.

В общем случае, когда эти пределы существуют только для $i = j$, частные индексы могут быть отличны от $æ_j$. Примером служит матрица

$$X(z) = \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix},$$

частными индексами которой служат пара одинаковых чисел -1. Для доказательства достаточно заметить, что

$$\begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} \\ -z^{-1} & z^{-2} \end{pmatrix}.$$

Условимся говорить, что каноническая функция подчинена весовому порядку λ, если

$$X \in C^{\mu}_{\lambda-0}(\hat{D}, F), \quad X^{-1} \in C^{\mu}_{-\lambda-1+0}(\hat{D}, F). \tag{2.29}$$

Нетрудно видеть, что такая функция с точностью до эквивалентности определена однозначно. В самом деле, произведение $\varphi_1\varphi_2$ двух функций

$\phi_1 \in C^{\mu}_{\lambda_1+0}$ и $\phi_2 \in C^{\mu}_{\lambda_2-0}$ принадлежит $C^{\mu}_{\lambda_1+\lambda_2+0}$. Поэтому матрица - функция $R = X_1^{-1} X_2$ принадлежит классу $C^{\mu}_{-1+0}(\hat{D}, F)$, удовлетворяет однородному

краевому условию $R^+ = R^-$ и имеет конечный порядок на бесконечности. Поэтому она в действительности аналитична на всей плоскости, т.е.

является некоторым многочленом P. Таким образом, $X_2 = X_1P$. Меняя местами

X_1 и X_2, убеждаемся, что аналогично $X_1 = X_2Q$ с некоторым многочленом Q. Поскольку $\det P \det Q = 1$, определитель каждого из этих многочленов является ненулевой константой, так что $X_1 \sim X_2$.

Вопрос о существовании канонических функций, подчиненных заданному весовому порядку, оставляем пока открытым. В скалярном случае он решается явно. В этом случае все канонические функции описываются с помощью интеграла типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D,$$

который представляет собой аналитическую в $D = \mathbb{C}\setminus\Gamma$ функцию $\varphi = I\phi$, исчезающую на бесконечности (точнее, ее порядок $\deg\phi \le -1$). Для нее справедлив следующий результат.

Теорема 2.4. *Если $\phi \in C_\lambda^\mu(\Gamma,F)$ и $-1 < \lambda < 0$, то функция $\varphi = I\phi$ принадлежит классу $C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$ и ее граничныне значения связаны соотношением $\varphi^+ - \varphi^- = \phi$.*

В качестве следствия из этой теоремы выводится следующее предложение.

Лемма 2.3. *Если $\varphi \in C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ и $0 < \lambda < 1$, то $I\varphi \in C_{(\lambda)}^\mu(\hat{D}, F)$.*

Напомним определение последнего пространства. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ круг $z - \tau| \le \varepsilon$ с центром $\tau \in F$ пересекает кривую Γ по дугам $\Gamma_{\tau,j}$, $1 \le j \le n_\tau$, с общим концом τ. Эти дуги разбивают данный круг на криволинейные сектора $S_{\tau,j}$, $1 \le j \le n_\tau$, с общей вершиной τ. В этих обозначениях пространство $C^{\mu}_{(\lambda)}(\hat{D}, F),\ 0 < \lambda < 1$, можно определить как класс аналитических в D функций, которые принадлежат $C^{\mu}(\overline{D_0})$ в каждой простой подобласти $D_0 \subseteq D$, граница которой не содержит точек $\tau \in F$, а в секторах $S_{\tau,j}$ она принадлежит $C^{\mu}_{(\lambda_\tau)}(\hat{S}_{\tau,j}, \tau)$, т.е.

$$\phi(z) - C_{\tau,j} \in C^{\mu}_{\lambda_\tau}(\hat{S}_{\tau,j}, \tau)$$

с некоторой постоянной $C_{\tau,j}$. Конечно, при $n_\tau > 1$ сектора $S_{\tau,j}$ являются простыми областями и символ $\hat{S}_{\tau,j}$ можно заменить на $\overline{S_{\tau,j}}$.

При $0 < \lambda < 1$ для каждой точки $\tau \in F$ интеграл $I\phi$ имеет смысл и в точке $z = \tau$, при этом

$$\frac{(I\varphi)(z) - (I\varphi)(\tau)}{z - \tau} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_0(t)dt}{t - z}, \quad \varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{t - \tau}.$$

Поэтому на основании теоремы 2.4 функция в левой части принадлежит $C^{\mu}_{\lambda_\tau - 1}(\hat{S}_{\tau,j}, \tau)$ и, следовательно, $I\varphi \in C^{\mu}_{(\lambda_\tau)}(\hat{S}_{\tau,j}, \tau)$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим далее случай, когда функция ϕ кусочно непрерывна на Γ и принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma, F)$. Другими словами, на каждой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$ она принадлежит $C^{\mu}(\Gamma_0)$, а на дугах $\Gamma_{\tau,j}$ она принадлежит $C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma_{\tau,j}, \tau)$, т.е.

$$\varphi(t) - c_{\tau,j} \in C^{\mu}_{\delta}(\Gamma_{\tau,j}, \tau)$$

с некоторыми постоянными $c_{\tau,j}$ и малым $\delta > 0$. Эти постоянные условимся обозначать $c_{\tau,j} = \phi(\tau,j)$.

Лемма 2.4. *Пусть* $\varphi \in C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma, F)$. *Тогда*

$$(I\varphi)(z) - c_\tau \ln(z-\tau) \in C^{\mu}_{(+0)}(\hat{S}_{\tau,j}, \tau), \quad c_\tau = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n_\tau} \pm\varphi(\tau, j),$$

где выбирается знак +, если дуга $\Gamma_{\tau,j}$ *входит в точку* τ *и знак − в противном случае.*

Доказательство достаточно провести для случая одной дуги Γ с концом τ, считая для определенности ее выходящей из точки τ. В этом случае

$$c_\tau = -\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}.$$

С учетом леммы 2.3 можно также считать функцию ϕ постоянной.

Пусть $\rho > 0$ столь мало, что пересечение этой дуги с кругом $|z - \tau| \le \rho$ состоит из дуги Γ_0, так что роль S_τ играет круг $|z-\tau| < \rho$ с разрезом вдоль Γ_0. Применяя в этой области к аналитической функции $\ln z$ формулу Коши, получим

$$\ln z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{(-2\pi i)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{(\ln t)dt}{t-z}, \quad z \in S_\tau,$$

где L_0 означает окружность $|z - \tau| = \rho$, ориентированную против часовой стрелки и учтено соотношение $(\ln z)^+ - (\ln z)^- = -2\pi i$ на Γ_0. Отсюда

$$(I\varphi)(z) + \frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}\ln z = \frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{dt}{t-z} - \frac{\varphi(\tau)}{(2\pi i)^2}\int_{L_0} \frac{dt}{t-z}.$$

Остается заметить, что правая часть этого равенства аналитична в круге $|z - \tau| < \rho$.

Обратимся к рассматриваемой выше скалярной функции $G \in C^{\nu}_{(+0)}(\Gamma, F)$. Нетрудно проверить, что любая непрерывна на $\Gamma \setminus F$ ветвь $\ln G$ ее логарифма также принадлежит этому классу, так что можно ввести интеграл типа Коши

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\ln G)(t)dt}{t - z}, \quad z \in D. \tag{2.30}$$

Из последнего утверждения теоремы 2.3 следует, что для любого набора k_{τ}, $\tau \in F$ целых чисел функция

$$X(z) = e^{h(z)} \prod_{\tau \in F} (z - \tau)^{-k_{\tau}} \tag{2.31}$$

является канонической, причем $z^{æ} X(z) \to 1$ при $z \to \infty$ с показателем æ $= \sum_{\tau} k_{\tau}$. Верно и обратное - любая каноническая функция представима в таком виде. При подходящем выборе целых k_{τ} каноническую функцию можно подчинить заданному весовому порядку. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Применим лемму 2.4 к функции $\phi = \ln G$, которая, как отмечено выше, принадлежит классу $C^{\nu}_{(+0)}(\Gamma, F)$. Тогда в обозначениях этой леммы функ-
ция $X(z)$ вида (2.30), (2.31) в секторах $S_{\tau,j}$ представима в виде

$$X(z) = (z - \tau)^{c_{\tau} - k_{\tau}} X_{\tau,j}(z), \tag{2.32}$$

где функции $X_{\tau,j}(z)$ и $1/X_{\tau,j}(z)$ принадлежат классу $C^{\mu}_{(+0)}(\hat{S}_{\tau,j}, \tau)$. При этом, очевидно,

$$\lim_{z\to\infty} X(z) z^{æ} = 1, \qquad æ = \sum_{\tau\in F} k_\tau. \tag{2.33}$$

В частности, при

$$\lambda_\tau \le (\mathrm{Re}\, c_\tau) - k_\tau < \lambda_\tau + 1 \tag{2.34}$$

эта функция будет подчинена весовому порядку λ.

Целое число æ и семейство чисел c_τ удобнее представить в несколько иной форме, удобной для приложений. Пусть кривая Γ составлена из гладких ориентируемых дуг Γ_j, $1 \le j \le m$, с концами в точках $\tau \in F$, которые попарно могут пересекаться лишь по своим концам. Исходя из кусочно непрерывной функции $\ln G$, введем индекс Коши $\mathrm{Ind}\, G$ функции G на этой кривой. Он определяется как деленное на $2\pi i$ сумма приращений функции $\ln G$ на этих дугах:

$$\mathrm{Ind}\, G = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m} (\ln G)\Big|_{\Gamma_j}.$$

Ясно, что это определение дает комплексное число, которое не зависит от выбора ветви логарифма на дугах Γ_j, поскольку аддитивная постоянная, отвечающая другой ветви, не сказывается на приращении $\ln G$. Ясно также, что в принятых выше обозначениях

$$\mathrm{Ind}\, G = \sum_{\tau} c_\tau. \tag{2.35}$$

Отметим еще, что как функция от G индекс Коши обладает очевидным мультипликативным свойством $\mathrm{Ind}(G_1 G_2) = \mathrm{Ind}\, G_1 + \mathrm{Ind}\, G_2$.

Помимо $\mathrm{Ind}G$ с коэффициентом G свяжем еще семейство комплексных чисел

$$w_\tau = \prod_{j=1}^{n_\tau} [G(\tau, j)]^{\pm 1}, \tag{2.36}$$

где как и в (2.30) выбирается знак +, если дуга $\Gamma_{\tau,j}$ входит в точку τ и знак − в противном случае. Кроме того, логарифмы от этих числе выберем специальным образом, полагая

$$\frac{1}{2\pi i} \ln w_\tau = \alpha_\tau + i\beta_\tau, \quad 0 \le \alpha_\tau < 1, \tag{2.37}$$

так что $2\pi\alpha_\tau = \arg w_\tau$ и $2\pi\beta_\tau = -\ln|w_\tau|$.

Удобно еще ввести периодическое дискретное множество $\Delta_\tau = \{\alpha_\tau + s, s \in \mathrm{Z}\}$, пересечение которого с любым интервалом $[x, x + 1)$ содержит ровно одну точку. При необходимости зависимость w, α, β и Δ от G указываем в скобках.

Очевидно, с точностью до целочисленного слагаемого числа c_τ и

$$\frac{\ln w_\tau}{2\pi i} = \alpha_\tau + i\beta_\tau$$

совпадают. Таким образом, $c_\tau - k_\tau = \delta_\tau + i\beta_\tau$, где δ_τ однозначно определяется из условий

$$\delta_\tau \in \Delta_\tau, \qquad \lambda_\tau \le \delta_\tau < \lambda_\tau + 1. \tag{2.38}$$

В частности, (2.32) переходит в

$$X(z) = (z - \tau)^{\delta_\tau + i\beta_\tau} X_{\tau,j}(z). \tag{2.39}$$

Ясно также, что условие (2.34) можно переписать в форме $k_\tau \leq (\mathrm{Re}c_\tau) - \lambda_\tau < k_\tau + 1$ или, в терминах целой части числа, в форме $k_\tau = [(\mathrm{Re}c_\tau) - \lambda_\tau]$.

Напомним, что что с точностью до целочисленного слагаемого числа $\mathrm{Re}c_\tau$ и α_τ совпадают. Поэтому $\mathrm{Re}c_\tau = [\mathrm{Re}c_\tau] + \alpha_\tau$ и, следовательно,

$$k_\tau = [\mathrm{Re}c_\tau] + [\alpha_\tau - \lambda_\tau] = \mathrm{Re}c_\tau - \alpha_\tau + [\alpha_\tau - \lambda_\tau].$$

С учетом (2.35) отсюда для целого числа æ в (2.33) имеем выражение

$$æ = \mathrm{Re}(\mathrm{Ind}G) - \sum_{\tau\in F} \alpha_\tau + \sum_{\tau\in F} [\alpha_\tau - \lambda_\tau]. \tag{2.40}$$

Таким образом, имеем следующий результат. Если функция G скалярна, то при подходящем выборе целых чисел k_τ в (2.31) каноническую функцию $X(z)$ можно подчинить заданному весовому порядку λ. Более точно, в криволинейных секторах $S_{\tau,j}$ эта функция представима в виде (2.39), где функции $X_{\tau,j}(z)$ и $1/X_{\tau,j}(z)$ принадлежат классу $C^{\mu}_{(+0)}(\hat{S}_{\tau,j}, \tau)$, а весовой порядок δ определяется из условий (2.38). Кроме того, $z^{æ}X(z) \to 1$ при $z \to \infty$ с показателем æ, определяемым формулой (2.40).

Как и выше зависимость δ от G при необходимости указываем в скобках, т.е. $\delta = \delta(G)$. Заметим, что эти числа зависят и от λ. Более точно, как функция от λ_τ при фиксированном τ она монотонно возрастает, непрерывна слева и сохраняет постоянное значение на интервалах

$\mathrm{R}\backslash\Delta_\tau$, претерпевая скачек, равный 1 при переходе через точки из Δ_τ. Заметим, что целое число $æ(G)$ как функция от λ_τ обладает тем же свойством с той разницей, что монотонно убывает.

С помощью канонической матрицы функции $X(z)$, подчиненной весовому порядку λ и имеющей нормальную форму на ∞, можно явно решать задачу линейного сопряжения

$$\varphi^+ - G\varphi^- = f \tag{2.41}$$

для $l-$ вектор- функции φ, аналитической в D, порядок на бесконечности которой подчинен дополнительному условию

$$\deg\varphi \le k - 1, \tag{2.42}$$

где k – заданное целое число. Предполагая $f \in C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$, решение будем искать в классе $\phi \in C^\mu_{\lambda-1+0}(\hat{D}, F)$.

Рассмотрим $l-$ вектор- функцию $\psi = X^{-1}\varphi$, которая в силу (2.29) принадлежит классу $C^\mu_{-1+0}(\hat{D}, F)$. Согласно (2.27) в окрестности ∞ ее компо-
ненты ψ_j, $1 \le j \le l$, можно представить в виде $\psi_j(z) = z^{æ_j}[X_0^{-1}\phi]_j(z)$, так что в соответствии с (2.42) их порядок подчинен условию

$$\deg\psi_j \le æ_j + k - 1, \qquad 1 \le j \le l. \tag{2.43}$$

С учетом (2.22) краевое условие (2.41) по отношению к ψ переходит в задачу о скачке

$$\psi^+ - \psi^- = g$$

с правой частью $g = (X^+)^{-1}f$ и ее общее решение (с произвольным порядком на бесконечности) в классе $C^{\mu}_{-1+0}(\hat{D}, F)$ дается формулой

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(t)dt}{t-z} + p(z), \tag{2.44}$$

с произвольным l– вектор- многочленом $p = (p_1,\dots,p_l)$.

Нетрудно описать требования на правую часть g и многочлен p, обеспечивающие выполнение условия (2.43). Если $k + æ_j \geq 0$, то интеграл типа Коши в правой части (2.44) удовлетворяет этому условию и дело сводится к $\deg p_j \leq æ_j + k - 1$. С другой стороны, при $k + æ_j \leq 0$ многочлен p_j должен быть равен нулю и условие (2.43) должно быть выполнено для интеграла типа Коши в правой части (2.43). Для этого интеграла в окрестности ∞ имеем разложение

$$\int_{\Gamma}\frac{g(t)dt}{t-z} = \sum_{k\leq 0} c_k z^k, \quad c_k = -\int_{\Gamma} g(t)t^{-k-1}dt.$$

Условие (2.43) требует, чтобы в этом разложении коэффициенты c_k для $k = -1,\dots,æ_j + k$ обращались в нуль. Поскольку для этих k числа $-k-1$ пробегают значения $0,1,\dots,-(æ_j+k)-1$, отсюда приходим к заключению, что функция g_j должна удовлетворять условиям ортогональности

$$\int_{\Gamma} g_j(t)q_j(t)dt = 0 \tag{2.45}$$

всем многочленам q_j степени $\deg q_j \leq -(æ_j + k) - 1$.

Оба случая знака $æ_j + k$ можно объединить единым образом. С этой целью для единообразия условимся многочлены отрицательной степени считать нулем. Тогда выполнение условия (2.43) для функции ψ_j в (2.44) равносильно тому, что

$$\deg p_j \leq æ_j + k - 1, \qquad 1 \leq j \leq l, \tag{2.46}$$

и выполнено условие ортогональности (2.45) для всех многочленов q_j степени $\deg q_j \leq -(æ_j + k) - 1$.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 2.5 *Пусть каноническая функция $X(z)$ имеет нормальную форму на бесконечности и подчинена весовому порядку λ. Пусть функция $f \in C_\lambda^\mu(\Gamma,F)$. Тогда задачи (2.41) в классе $C^\mu_{\lambda-1+0}(\hat{D}, F)$ разрешима тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma [(X^+)^{-1}f](t)q_j(t)dt = 0, \qquad \deg q_j \leq -(æ_j + k) - 1. \tag{2.47}$$

При выполнении этих условий общее решение задачи в рассматриваемом классе дается формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{[(X^+)^{-1}f](t)dt}{t-z} + X(z)p(z), \tag{2.48}$$

где многочлен p удовлетворяет условию (2.46).

Если для целого s положить $s^+ = \max(0,s)$, то размерность пространства вектор- многочленов p, удовлетворяющих условию (2.46), равна $\sum_j (æ_j + k)^+$. Очевидно, это число определяет и размерность пространства решений однородной задачи (2.41), т.е. задачи (2.24). Аналогично число линейно независимых условий ортогональности (2.46) на правую часть f задачи (2.41), обеспечивающих ее разрешимость, равно $\sum_j(-æ_j - k)^+$. Таким образом, индекс задачи дается формулой

$$\sum_j [(æ_j + k)^+ - (-æ_j - k)^+] = lk + \sum_j æ_j. \quad (2.49)$$

Возникает вопрос, при каких условиях решение (2.48) будет принадлежать классу $C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$. Рассмотрим сначала этот вопрос для скалярного случая $l = 1$. В этом случае каноническая функция X принадлежит классу $C_\delta^\mu(D,\hat{F})$, где весовой порядок δ определяется условием (2.38), а X^{-1} –
классу $C^\mu_{-\delta}(\hat{D}, F)$. Поэтому $(X^+)^{-1}f \in C^\mu_{\lambda-\delta}(\Gamma, F)$, где $-1 < \lambda - \delta \le 0$. На основании теоремы 2.4 отсюда заключаем, что функция ψ в (2.44) принадлежит классу $C^\mu_{\lambda-\delta}(\hat{D}, F)$ в случае $\lambda_\tau \notin \Delta_\tau$ для всех τ и классу $C^\mu_{\lambda-\delta-0}(\hat{D}, F)$, если это условие нарушено для некоторого τ.

В результате приходим к следующему заключению. В предположении

$$\lambda_\tau \notin \Delta_\tau, \qquad \tau \in F, \qquad (2.50)$$

формула (2.48) определяет решение задачи в классе $C_\lambda^\mu(D,\hat{F})$. Если это условие нарушено, то эта формула дает решение в классе $C^\mu_{\lambda-0}(\hat{D}, F)$.

Рассмотрим далее случай, когда матрица функция G треугольна. Предполагая для простоты $l = 2$, можем ограничиться матрицей

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_3 \\ & \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} & \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

Каноническую матрицу для этого коэффициента ищем в аналогичном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение (2.22) для этих матриц сводится к трем поэлементным равенствам

$$X_s^+ = G_s X_s^-, \ s = 1,2, \quad X_3^+ = G_1 X_3^- + G_3 X_2^-. \tag{2.51}$$

Первые два соотношения показывают, что функции X_s, $s = 1,2$, являются каноническими по отношению к, соответственно, G_s. Пусть эти функции подчинены порядку λ, так что для них имеем представление (2.39) по отношению к $\delta_\tau(G_s)$ и $\beta_\tau(G_s)$ с поведением $z^{æ(G_s)}X_s(z) \to 1$ на бесконечности.

Третье равенство в (2.51) представляет собой неоднородную задачу сопряжения для X_3 и ее решение выписывается по формуле (2.47), т.е.

$$X_3(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{[(X_1^+)^{-1} X_2^- G_3](t)dt}{t-z}. \tag{2.52}$$

Поскольку $(X_1^+)^{-1} X_2^- G_3 \in C^\mu_{\delta(G_2)-\delta(G_1)}(\Gamma, F)$ и $-1 < \delta(G_2) - \delta(G_1) < 1$, на основании теоремы 2.3, примененной к интегралу (2.52), заключаем, что в секторах $S_{\tau,j}$ функция X_3 принадлежит классам

$$X_3(z) \in \begin{cases} C^{\mu}_{\delta(G_2)}(\hat{S}_{\tau,j},\tau), & \delta_\tau(G_2) < \delta_\tau(G_1), \\ C^{\mu}_{\delta(G_1)-0}(\hat{S}_{\tau,j},\tau), & \delta_\tau(G_2) \geq \delta_\tau(G_1), \end{cases} \subseteq C^{\mu}_{\lambda-0}(\hat{S}_{\tau,j},\tau). \qquad (2.53)$$

Заметим, что тогда

$$\frac{X_3(z)}{X_1(z)X_2(z)} \in \begin{cases} C^{\mu}_{-\delta(G_1)}(\hat{S}_{\tau,j},\tau), & \delta_\tau(G_2) < \delta_\tau(G_1), \\ C^{\mu}_{-\delta(G_2)-0}(\hat{S}_{\tau,j},\tau), & \delta_\tau(G_2) \geq \delta_\tau(G_1). \end{cases} \subseteq C^{\mu}_{-\delta(G_1)-0}(\hat{S}_{\tau,j},\tau), \qquad (2.54)$$

где учтено, что класс C_δ^μ расширяется с уменьшением δ_τ. Очевидно, обратная матрица X^{-1} имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} X_1^{-1} & X_1^{-1}X_2^{-1}X_3 \\ 0 & X_2^{-1} \end{pmatrix},$$

поэтому на основании (2.54) условие (2.29) для рассматриваемой треугольной матрицы X выполнено, т.е она подчинена весовому порядку λ.

Таким образом, можем воспользоваться теоремой 2.5 Напомним, что в этой теореме $æ_s = æ_s(G)$ есть частные индексы канонической функции X с нормальной формой на ∞. Согласно (2.52) порядок $\deg X_3 \le -æ(G_1)-1$. Поэтому если

$$æ(G_2) - æ(G_1) - 1 \le 0,$$

то частные индексы $æ(G_s)$, $s = 1,2$, совпадают с частными индексами $æ_s(G)$ матрицы G. При нарушении этого условия частные индексы $æ_s$ могут отличаться от $æ(G_s)$ (как показывает приведенный выше пример).

Как и в скалярном случае покажем, что формула (2.48) в действительности дает решение $\phi \in C^{\mu}_{\lambda-0}(\hat{D}, F)$. С этой целью рассмотрим компоненты
вектора $g = (X^{+})^{-1}f$:

$$g_1 = (X_1^{+})^{-1} f_1 + (X_1^{+})^{-1}(X_2^{+})^{-1} X_3 f_2, \quad g_2 = (X_2^{+})^{-1} f_2.$$

С учетом (2.54)

$$g_1 \in C^{\mu}_{\lambda-\delta(G_1)-0}, \quad g_2 \in C^{\mu}_{\lambda-\delta(G_2)}$$

и, следовательно, для компонент интеграла $\psi = Ig$ имеем аналогичные соотношения. Поэтому

$$\phi_1 = X_1\psi_1 + X_2\psi_2 \in C^{\mu}_{\lambda-0}, \quad \phi_2 = X_2\psi_2 \in C^{\mu}_{\lambda-0}.$$

Заключение

В работе получены следующие результаты:

В первой главе исследована задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гельдера в скалярном случае. Получено явное решение и приведена его асимптотика.

Во второй главе исследована задача линейного сопряжения с треугольным матричным коэффициентом, для двумерного случая приводится подробное явное решение.

Результаты, полученные в работе, были опубликованы в работах [30], [31], [32], [33].

Список использованной литературы

[1] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[2] Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.

[3] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

[4] Боярский Б.В. Об особом случае задачи Римана-Гильберта. Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. No.3. С.411-414.

[5] Боярский Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта. Сообщ. АН Граз. СССР. 1960. Т.25. No.4. С.385-390.

[6] Боярский Б.В. Анализ разрешимости граничных задач теории функций. В сб.: "Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного"под ред. А.И. Маркушевича. М.: Физматлит, 1961. С.57-79.

[7] Векуа И.Н. Об одной линейной граничной задаче Римана. Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР. 1942. Т. 11. С.109-139.

[8] Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. Прикл. матем. и мех. 1945. Т.9. No.2. С.143-150.

[9] Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ,

1948.
[10] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

[11] Векуа Н.П. Системы сингуляоных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. — М.: Наука, 1970.

[12] Гахов Ф.Д. Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения. Докторская дисс. Тбилиси, 1941; Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва. 1949. Т. 14, сер. 3. С.75-160.

[13] Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций, Успехи матем. наук. 1952. Т. 7. No.4. С.3-54.

[14] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

[15] Мусхелишвили Н.И. Приложение интеграло типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений. Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1941, Т.10, 43 С.

[16] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

[17] Пальцев Б.В. О канонической матрице решений задачи линейного сопряжения с кусочно-непрерывным матричным коэффициентом на элементарной кусочно-гладкой кривой. Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. No.5. С.1054-1058.

[18] Пальцев Б.В. Об условиях, обеспечивающих непрерывность вплоть до контура и степенное поведение в окрестностях узловых точек решений однородной задачи линейного сопряжения с

кусочнонепрерывным матричным коэффициентом. Докл. АН СССР. 1988. Т.
299. No.3. С.558-562.

[19] Б. Риман. Сочинения, пер. с нем., ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

[20] Симоненко И.Б. Краевая задача Римана для пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах с весами, Изв. АН СССР (сер.матем.). 1964. Т.32. С.277-306.

[21] Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II, Изв. АН СССР (сер.матем.). 1965. Т.32, No.2. С.757-782.

[22] Симоненко И.Б. Некоторые общие вопросы теории краевой задачи
Римана, Изв. АН СССР (сер.матем.). 1968. Т.32. С.1138-1146.

[23] Солдатов А.П., Краевая задача линейного сопряжения теории функций, Изв. АН СССР (сер.матем.). 1979. Т.43, No.1. С.184-202.

[24] Солдатов А.П., Краевые задачи теории функций в областях с кусочно гладкой границей. Тбилиси 1991.

[25] Солдатов А.П., Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций, М., Высшая школа. 1991. 266 С.

[26] Солдатов А.П., Обобщенный интеграл типа Коши, Дифференц. урния. 1991. Т.27, No.2. С.3-8.

[27] Сохоцкий Ю.В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды. С.-Петербург, 1873.

[28] Хведелидзе Б.В. О разрывной задача Римана-Привалова для нескольких функций, Сообщения АН Груз. ССР. 1956. Т.17, No.10. С.865-872.

[29] Хведелидзе Б.В. О разрывной задача Римана-Привалова с заданным смещением, Сообщения АН Груз. ССР. 1958. Т.21, No.4. С.385-389.

[30] Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П., Асимптотика решений задачи линейного сопряжения для аналитических функций в угловых точках кривой, Научные ведомости БелГУ, (матем., физика), 2015, 5(202), С.5-17

[31] Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П., Задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гельдера, Известия вузов. Математика 2015, №9, с. 56–61

[32] Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П., Асимптотика решений задачи линейного сопряжения в угловых точках кривой, Дифференциальные уравнения, 2016, Т. 52 №9, с. 1150–1159

[33] Аверьянов Г.Н., Полунин В.А., О модифицированных пространствах Гельдера, Научные ведомости БелГУ, (матем., физика), 2016, 27(248),
С.32-35