

Рис 2

Примеры изображений F_{km} – результаты разложения исходного изображения на K_m простейших а – $m=0,85$, б – $m=0,91$, в – $m=0,95$

Результаты вычислительных экспериментов продемонстрировали перспективность предложенного метода при решении задач обработки изображений.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., Физматлит, 2004. 560 с.
2. Бронштейн И.Н., Семидяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., Лань, 2009. 608 с.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры для инновационной России» на 2009-2013 годы, гос контракт № 14 740 11 0390.

Статья поступила 09 12 2011

К.т.н., доц. А.А.Черноморец, И.В. Лысенко, Е.В. Болгова
(НИУ «БелГУ»)

A.A. Chernomorets, I.V. Lysenko, E.V. Volgova

**КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ВЗВЕЩЕННОЙ
ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

**COMPUTER IMPLEMENTATION OF ALGORITHM
FOR WEIGHED OPTIMAL IMAGE FILTRATION**

В статье приведен алгоритм решения задачи линейной частотной фильтрации как задачи разделения изображения на аддитивные составляющие (квазициклические компоненты) на основе вариационного метода взвешенной оптимальной фильтрации

The result of computer implementation of linear frequency filtration in the task of image division on additive parts (quasicyclic components) based on variation method of weighed optimal filtration is given in the article

Ключевые слова изображение, функционал, субполосные матрицы, квазициклические компоненты, доли энергии

Key words image, functional subband matrices quasicyclic components, energy parts

Введение

При цифровой обработке изображений одной из существенных проблем является выделение значимых частотных компонент (аддитивных составляющих изображений), что важно при решении задач повышения визуального качества изображений, удаления различного рода помех, выделения объектов на изображениях в задачах их классификации, распознавания и др.

Теоретические основы алгоритма взвешенной оптимальной фильтрации

Для решения задачи разделения изображения на аддитивные составляющие (квазициклические компоненты) представим изображение в цифровой форме: пусть $\Phi=(f_{ik})$, $i=1,2,\dots,M$, $k=1,2,\dots,N$, – изображение, заданное в виде матрицы, элементы f_{ik} которой представляют собой значения яркости в точках (i,k) дискретизованного изображения.

Обозначим Φ_1 , Φ_2 , Y – исходное изображение и результаты выделения (фильтрации последовательно по столбцам и строкам) его аддитивных составляющих, в заданной частотной области (частотном субинтервале) $\Omega_{i_1 i_2}$ [1] (при условии, что частотная область разбита на $R_1 \times R_2$ равновеликих частотных субинтервалов). Обозначим также $A_{i_1}=(a_{i_1 i_2}^1)$, $i_1, i_2=1,2,\dots,M$, и $A_{i_2}=(a_{k_1 k_2}^2)$, $k_1, k_2=1,2,\dots,N$, – субполосные матрицы, соответствующие данному субинтервалу. элементы которых определяются на основании следующих выражений:

$$a_{i_1 i_2}^1 = \begin{cases} \frac{2 \cos \frac{\sigma_1 (2r_1 - 1)(i_1 - i_2)}{2} \sin \frac{\sigma_1 (i_1 - i_2)}{2}}{\pi (i_1 - i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \frac{\sigma_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases}$$

$$a_{k_1 k_2}^2 = \begin{cases} \frac{2 \cos \frac{\sigma_2 (2r_2 - 1)(k_1 - k_2)}{2} \sin \frac{\sigma_2 (k_1 - k_2)}{2}}{\pi (k_1 - k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \frac{\sigma_2}{\pi}, & k_1 = k_2 \end{cases} \quad (1)$$

Введем веса γ_1, γ_2 , определяющие относительную важность составляющих следующих функционалов

$$S_{\gamma_1}(\Phi_{1k}, \Phi_{2k}) = (1 - \gamma_1) \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} |F_{1k}(\omega) - F_{2k}(\omega)|^2 d\omega + \gamma_1 \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} |F_{2k}(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \min_{\Phi_i}, \quad (2)$$

$$S_{\gamma_2}(\Phi'_2, Y') = (1 - \gamma_2) \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega_v} |F'_2(\omega) - F'_Y(\omega)|^2 d\omega + \gamma_2 \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega_v} |F'_Y(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \min_{Y'} \quad (3)$$

$$0 < \gamma_1 < 1, \quad 0 < \gamma_2 < 1,$$

где $\Phi_{1k}, \Phi_{2k}, \Phi'_2, Y'$ – k-тые столбцы матриц Φ_1, Φ_2 и – i-тые строки матриц $\Phi_2, Y, F_{1k}(\omega), F_{2k}(\omega), F'_2(\omega), F'_Y(\omega)$ – соответствующие трансформанты Фурье, Ω_u, Ω_v – проекции частотного субинтервала $\Omega_{r_1 r_2}$ на координатные оси

Можно показать, что при решении вариационной задачи (2,3) метод взвешенной оптимальной фильтрации задает квазициклическую компоненту Y изображения Φ :

$$Y = C_{\eta_1} \Phi C_{\eta_2}, \quad (4)$$

где

$$C_{\eta_1} = (1 - \gamma_1)(\gamma_1 I + (1 - 2\gamma_1)Q_{1\eta_1} L_{1\eta_1} Q_{1\eta_1}^T)^{-1} Q_{1\eta_1} L_{1\eta_1} Q_{1\eta_1}^T, \quad (5)$$

$$C_{\eta_2} = Q_{1\eta_2} L_{1\eta_2} Q_{1\eta_2}^T (\gamma_2 I + (1 - 2\gamma_2)Q_{1\eta_2} L_{1\eta_2} Q_{1\eta_2}^T)^{-1} (1 - \gamma_2), \quad (6)$$

$L_{1r_1}, L_{1r_2}, Q_{1r_1}, Q_{1r_2}$ – матрицы, составленные из ненулевых собственных чисел и соответствующих собственных векторов субполосных матриц A_{r_1}, A_{r_2} [3].

Алгоритм выделения квазициклических компонент изображений на основе метода взвешенной оптимальной фильтрации

Для вычисления квазициклических компонент изображений для полного набора частотных субинтервалов с учетом свойств субполосных матриц (приближенные вычисления) разработан следующий алгоритм:

а) Предварительные вычисления:

- 1) Ввести R_1 и R_2 – количество частотных субинтервалов вдоль осей абсцисс и ординат частотного пространства;
- 2) Ввести значения размерности обрабатываемого изображения M, N ;
- 3) Вычислить значения σ_1 и σ_2

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{R_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{R_2};$$

- 4) Вычислить оценки J_1 и J_2 количества ненулевых собственных чисел используемых субполосных матриц

$$J_1 = 2 \left\lceil \frac{M}{2R_1} \right\rceil + 2, \quad J_2 = 2 \left\lceil \frac{N}{2R_2} \right\rceil + 2;$$

- 5) Для $r_1=1, 2, \dots, R_1, r_2=1, 2, \dots, R_2$:

5.1) Осуществить вычисления значения элементов соответствующих частотному субинтервалу Ω_{r_1, r_2} субполосных матриц A_{r_1} и A_{r_2} (1);

5.2) Для субполосных матриц A_{r_1} и A_{r_2} вычислить соответственно матрицы собственных чисел L_{1r_1} и L_{1r_2} , а также их собственные векторы, представленные в виде столбцов матриц Q_{1r_1} и Q_{1r_2} ;

- 6) Ввести параметры γ_1 и γ_2 , определяющую относительную важность составляющих применяемых функционалов (2,3),

- 7) Вычислить матрицы C_{r_1} и C_{r_2} (5, 6);

б) Вычисление квазициклических компонент:

- 1) Ввести матрицу Φ яркости обрабатываемого изображения;
- 2) Ввести r_1, r_2 – номера частотного субинтервала фильтрации;
- 3) Вычислить Y (4);
- 4) Конец.

Функциональная схема алгоритма выделения квазициклических компонент изображений с учетом свойств субполосных матриц для полного набора частотных субинтервалов приведена на рис. 1.

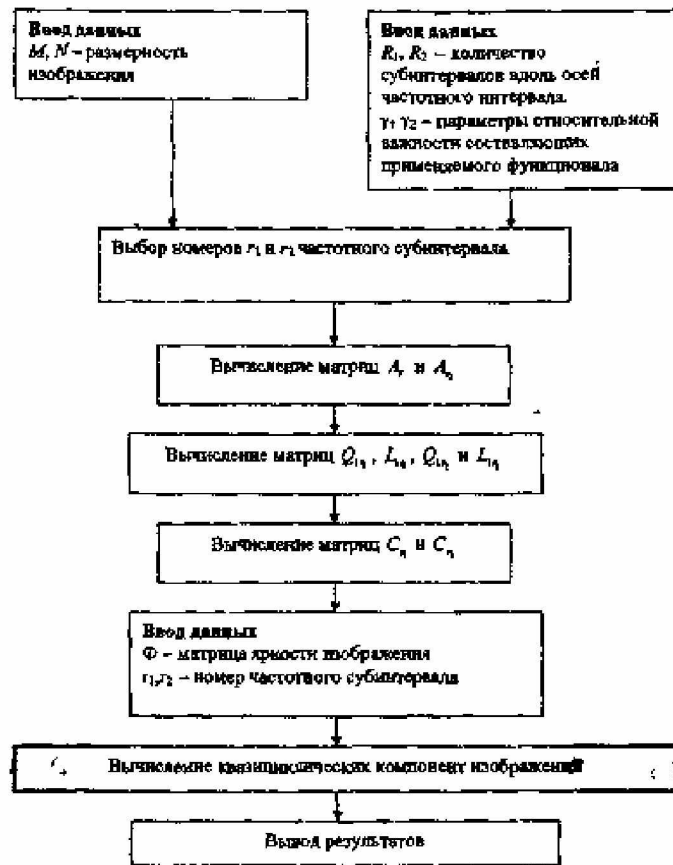


Рис 1

Функциональная схема алгоритма выделения квазициклических компонент изображений с учетом свойств субполосных матриц для полного набора частотных субинтервалов

На основании разработанного алгоритма была создана его компьютерная реализация и проведены вычислительные эксперименты с реальными снимками земной поверхности.

Вычислительные эксперименты

Цель экспериментальных исследований заключается в оценке доли энергии квазициклической компоненты $Y_{\Omega \text{ Фр}}(4)$, которая сосредоточена вне выбранного частотного субинтервала Ω , а также в оценке аппроксимации трансформанты Фурье исходного изображения Φ трансформантой Фурье квазициклической компоненты $Y_{\Omega \text{ Фр}}$.

Для вычисления указанных оценок используются соотношения

$$\delta^{\Phi}_{\Omega, Opt} = 1 - P_{\Omega}(Y_{\Omega, Opt}), \quad (7)$$

$$\sigma^{\Phi}_{\Omega, Opt} = \sqrt{\frac{P_{\Omega}(\Phi - Y_{\Omega, Opt})}{P_{\Omega}(\Phi)}}, \quad (8)$$

где $P_{\Omega}(Y_{\Omega, Opt})$ – доля энергии изображения $Y_{\Omega, Opt}$ в частотном субинтервале Ω , определяемая на основании следующего соотношения [2]

$$P_{\Omega}(Y_{\Omega, Opt}) = \frac{tr(A_{\alpha}^T Y_{\Omega, Opt} A_{\beta} Y_{\Omega, Opt}^T)}{tr(Y_{\Omega, Opt} Y_{\Omega, Opt}^T)}. \quad (9)$$

В ходе вычислительных экспериментов также проводился сравнительный анализ оценки (9) доли энергии изображения $Y_{\Omega, Opt}$ и значения погрешности (8) с соответствующими характеристиками изображения $Y_{\Omega, FIR}$, полученного при реализации КИХ-фильтра.

Оценка доли энергии результата фильтрации (изображения) $Y_{\Omega, FIR}$, которая сосредоточена вне выбранного частотного субинтервала Ω , и относительной погрешности аппроксимации значений долей энергий исходного изображения в заданном частотном субинтервале при фильтрации с помощью КИХ-фильтра имеют следующий вид

$$\delta^{\Phi}_{\Omega, FIR} = 1 - P_{\Omega}(Y_{\Omega, FIR}). \quad (10)$$

$$\sigma^{\Phi}_{\Omega, FIR} = \sqrt{\frac{P_{\Omega}(\Phi - Y_{\Omega, FIR})}{P_{\Omega}(\Phi)}}. \quad (11)$$

При проведении вычислительных экспериментов представляет интерес оценка влияния значений весов γ_1 и γ_2 , определяющих относительную важность составляющих функционалов (2) и (3), на доли энергии (9).

Отдельные значения оценок погрешностей, полученных в ходе вычислительных экспериментов, приведены в табл. 1 и 2.

На основании параметров, использованных при вычислениях данных для таблицы 1, осуществлена фильтрация исходного изображения на основе КИХ-фильтра с длиной импульсной характеристики 512 и 1024 отсчетов (табл. 2).

Таблица 1

Погрешности выделения квазициклических компонент изображения Φ при различных значениях параметра γ в частотном субинтервале Ω_{66} ($R_1=R_2=16$)

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$	$\delta^{\Phi}_{\Omega, Opt}$	$\sigma^{\Phi}_{\Omega, Opt}$
0.05	0.14999	0.057763
0.1	0.11324	0.082319
0.2	0.076899	0.11681
0.3	0.056883	0.14388
0.4	0.043483	0.1681
0.5	0.033497	0.1916
0.6	0.02546	0.21615
0.7	0.018587	0.24385
0.8	0.012394	0.27856
0.9	0.0064371	0.33159
0.95	0.0033419	0.37989

Таблица 2

Погрешности КИХ-фильтрации в частотном субинтервале Ω_{66} ($R_1=R_2=16$)

Длина отсчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра	$\delta^{\Phi}_{\Omega, FIR}$	$\sigma^{\Phi}_{\Omega, FIR}$
512	0.13529	0.13423
1024	0.12128	0.13291

Результаты вычислений показывают, что при $R_1=R_2=16$ разработанный оптимальный метод имеет преимущества в точности аппроксимации значений долей энергии исходного изображения вне и внутри частотного субинтервала фильтрации Ω_{66} перед КИХ-фильтрацией при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$.

С целью интерпретации полученных результатов были построены графики квадратов модулей трансформант Фурье, с различными значениями параметра γ .

В качестве примера на рис. 2 приведены графики квадратов модулей трансформант Фурье исходного изображения, результатов применения взвешенной оптимальной фильтрации в частотном су-

бинтервале $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1=3$, $r_2=2$ при $R_1=R_2=16$ и результата КИХ-фильтрации. Графики построены для частот $u=3/16\pi$, $v \in [0.05\pi; 0.15\pi]$, что позволяет отобразить требуемые значения в выбранном субинтервале фильтрации

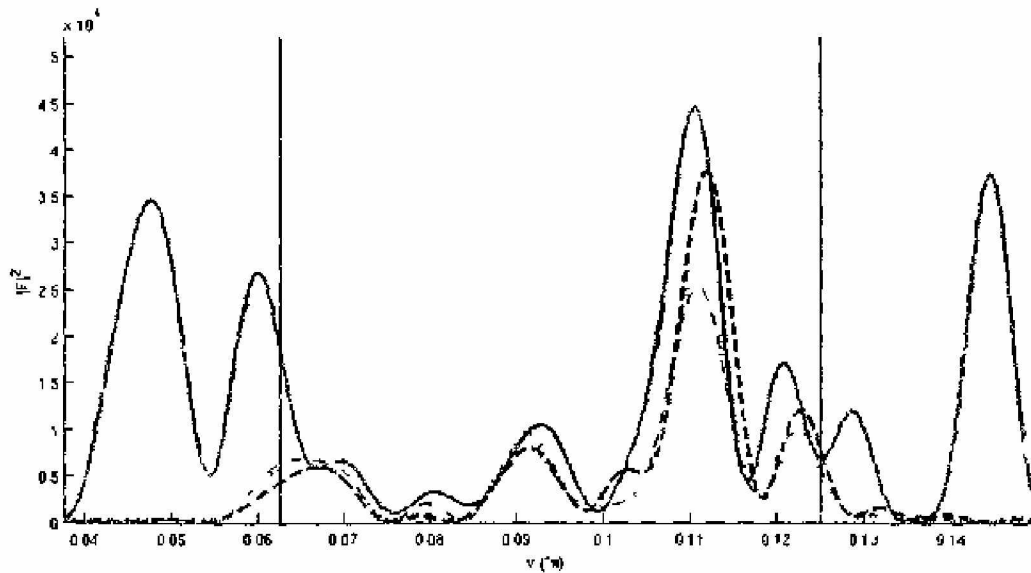


Рис. 2

Квадраты модулей трансформант Фурье изображений, $\gamma=0.2$, фильтрация в частотном субинтервале $\Omega_{1,12}$, $r_1=3$, $r_2=2$ ($R_1=R_2=16$), $u=3/16\pi$ (— — исходное изображение, - - - - - результат взвешенной оптимальной фильтрации, - · - · - результат КИХ-фильтрации с длиной импульсной характеристики 1024 отсчетов)

На рис. 2 видно, что на трансформанты Фурье результатов КИХ-фильтрации оказывает значительное влияние энергия исходного изображения вне субинтервала фильтрации, сосредоточенная вблизи левой границы данного субинтервала, в отличие от результата фильтрации на основе разработанного метода.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что при взвешенной оптимальной фильтрации различные значения весов γ_1 и γ_2 целесообразно использовать для усиления одного из условий в функционалах (2), (3): для повышения точности аппроксимации трансформант Фурье исходного изображения в субинтервале фильтрации или для увеличения близости к нулю трансформант Фурье результата фильтрации вне данного субинтервала.

Выводы

Таким образом, использование вариационного принципа позволило создать метод взвешенной оптимальной фильтрации, обладающий рядом преимуществ перед используемыми в настоящее время подходами. Одной из самых важных особенностей является гарантия того, что результат фильтрации определяют только теми значениями трансформант Фурье исходного изображения, которые соответствуют выбранным частотным субинтервалам.

Литература

1. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А. Оптимальная фильтрация изображений на основе частотных представлений. "Вопросы радиоэлектроники", сер. ЭВТ, 2008, вып. 1, с. 118-131.

2. Черноморец А.А., Иванов О.Н. Метод выделения квазициклических компонент изображения, определяемых его энергией в заданных частотных субинтервалах. – "Научные ведомости БелГУ.", сер. История Политология. Экономика. Информатика, 2011, № 7(102), вып. 18/1, с. 83-89

3. Черноморец А.А., Прохоренко Е.И., Голощапова В.А. О свойствах собственных векторов субполосных матриц. – "Научные ведомости БелГУ", сер. История. Политология. Экономика Информатика, 2009, № 7(62), вып. 10/1, с. 122-128.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры для инновационной России» на 2009-2013 годы, гос контракт № 14 740 11 0390

Статья поступила 09 12 2011