

рода составила 6,94%, второго рода – 0%. Эксперименты показали высокую работоспособность разработанной нейронной сети.

Литература

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М., Техносфера, 2006. 1072 с.
2. Грузман И.С. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Учеб. пособ. Новосибирск, 2000. 166 с.
3. Жилияков Е.Г. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений. Белгород, БелГУ, 2007. 160 с.
4. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Лысенко И.В. Метод определения точных значений долей энергии изображений в заданных частотных интервалах. – "Вопросы радиоэлектроники", сер. РЛТ, 2007, вып. 4, с. 115-123
5. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А. Оптимальная фильтрация изображений на основе частотных представлений. – "Вопросы радиоэлектроники", сер. ЭВТ, 2008, вып.1, с.118-132.
6. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. М., Сов. радио, 1979. 312 с.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры для инновационной России» на 2009-2013 годы, гос контракт № 14 740 11 0390

Статья поступила 09.12.2011

**Д.т.н., проф. Е.Г. Жилияков, к.т.н., доц. А.А. Черноморец,
д.ф.-м.н., проф. А.В. Глушак (НИУ «БелГУ»)**

E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets, A.V. Glushak

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ С
РАЗЛОЖЕНИЕМ НА ПРОСТЕЙШИЕ**

**COMPUTER IMAGE PROCESSING BASED ON DECOMPOSITION
INTO SIMPLE COMPONENTS**

*Рассматривается подход к обработке изображений на
основе их разложения на простейшие взаимортогональные*

компоненты. Анализируются свойства такого разложения с точки зрения сжатия и фильтрации изображения

We propose an image processing approach based on image decomposition into simple orthogonal components. Compression and filtering properties of the decomposition are analyzed

Ключевые слова: изображение, разложение, простейшие взаимноортогональные компоненты, вариационный принцип

Key words: image, decomposition into simple orthogonal components, estimation approach

Будем простейшими называть изображения вида

$$W = uv^T, \tag{1}$$

которое образовано векторами с вещественными компонентами

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_M)^T, \bar{v}^T = (v_1, \dots, v_N), \tag{2}$$

где символ T означает транспонирование. Отметим, что строки (столбцы) введенного таким образом изображения повторяются с различными коэффициентами. Именно это позволяет использовать термин «простейшее».

Пусть теперь

$$F = \{f_{mn}\}, m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N,$$

некоторое изображение, пиксели которого также являются вещественными числами.

Положим

$$D_1 = F - \bar{u}\bar{v}^T, \forall \bar{u} \in R^M \cap \bar{v} \in R^N, \tag{3}$$

Найдем такие векторы

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_M)^T, \bar{y} = (y_1, \dots, y_N)^T,$$

которые удовлетворяют вариационному принципу

$$\|F_1\|^2 = \|F - \bar{x}\bar{y}^T\|^2 = \min \|F - \bar{u}\bar{v}^T\|^2, \forall \bar{u} \in R^M \cap \bar{v} \in R^N, \tag{4}$$

т.е. дают минимальную евклидову норму аппроксимации исходного изображения

Имея в виду определение

$$\|D_1\|^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (f_{mn} - u_m v_n)^2,$$

раскрывая скобки и суммируя почленно, нетрудно получить соотношение

$$\|D_1\|^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_{mn}^2 - 2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_{mn} u_m v_n + \|u\|^2 \|v\|^2, \quad (5)$$

Отсюда имеем

$$\partial \|D_1\|^2 / \partial u_r = -2 \sum_{n=1}^N f_{rn} v_n + 2u_r \|v\|^2, \quad r = 1, \dots, M, \quad (6)$$

$$\partial \|D_1\|^2 / \partial v_k = -2 \sum_{m=1}^M f_{mk} u_m + 2v_k \|u\|^2, \quad k = 1, \dots, N, \quad (7)$$

$$g_{u_r} = \partial^2 \|D_1\|^2 / \partial u_r \partial u_r = \delta_{rr} \|v\|^2, \quad r, i = 1, \dots, M, \quad (8)$$

$$g_{v_{lk}} = \partial^2 \|D_1\|^2 / \partial v_l \partial v_k = \delta_{lk} \|u\|^2, \quad l, k = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Здесь δ_{pj} – символ Кронекера

$$\delta_{pj} = \begin{cases} 1, & p = j, \\ 0, & p \neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что матрицы с элементами вида (8) и (9) являются положительно определенными. Поэтому при любом фиксированном (ненулевом) векторе из пары (2) функционал (5) будет иметь единственный глобальный минимум по компонентам другого. Значения этих минимумов определяются соотношениями, получаемыми из систем нормальных уравнений

$$\partial \|D_1\|^2 / \partial u_r = 0, \quad r = 1, \dots, M,$$

$$\partial \|D_1\|^2 / \partial v_k = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

на основе которых из равенств (6) и (7) нетрудно получить представления варьируемых векторов через фиксированные

$$\|v\|^2 u = Fv \quad (10)$$

$$\|u\|^2 v = F^T u, \quad (11)$$

Легко понять, что соотношение (5) можно представить в матричном виде

$$\|D_1\|^2 = \|F\|^2 - 2u^T Fv + \|u\|^2 \|v\|^2. \quad (12)$$

Замена здесь произведения матрицы на вектор в соответствии с (10) и (11) дает идентичные выражения следующего вида

$$\|D_1\|^2 = \|F\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2. \quad (13)$$

Таким образом, если выбираемые векторы связаны соотно-

шением (10) либо соотношением (11), то функционал близости исходного изображения и простейшего вида (1) определяется одним и тем же соотношением (13).

Очевидно, что соотношения (10) и (11) позволяют соответственно получить равенства для произведений квадратов евклидовых норм

$$\|v\|^2 \|u\|^2 = v^T F^T F v / \|v\|^2, \quad (14)$$

$$\|v\|^2 \|u\|^2 = u^T F F^T u / \|u\|^2. \quad (15)$$

Подстановка (14) и (15) в представление (13) дает соотношения, пригодные для минимизации по значениям фиксированных векторов функционалы близостей

$$\|D_1\|^2 = \|F\|^2 - v^T F^T F v / \|v\|^2, \quad (16)$$

$$\|D_1\|^2 = \|F\|^2 - u^T F F^T u / \|u\|^2. \quad (17)$$

Ясно, что минимизация правых частей (16) или (17) сведена к выбору таких векторов, которые дают максимальные значения вторых слагаемых в правых частях. Иными словами для искомым, удовлетворяющих требованию (4) векторов должны выполняться либо условия

$$y^T F^T F y / \|y\|^2 = \max v^T F^T F v / \|v\|^2, \quad \forall v \in R^N, \quad (18)$$

$$\|y\|^2 x = F y, \quad (19)$$

либо

$$x^T F F^T x / \|x\|^2 = \max u^T F F^T u / \|u\|^2, \quad \forall u \in R^M, \quad (20)$$

$$y \|x\|^2 = F^T x. \quad (21)$$

Легко понять, что матрица в соотношении (18) (произведение транспонированной и прямой) является симметричной и неотрицательно определенной. Поэтому [1] она имеет полную в евклидовом пространстве систему ортогональных собственных векторов, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_i q_i = F^T F q_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (22)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \lambda_N \geq 0, \quad (23)$$

$$(q_i, q_k) = \|q_i\|^2 \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad (24)$$

где круглые скобки означают скалярное произведение в виде суммы попарных произведений компонент векторов с одинаковыми индек-

сами. Следовательно, справедливы представления

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{q}_i, \quad (25)$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2, \quad (26)$$

$$\mathbf{v}^T F^T F \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N a_i^2 \lambda_i. \quad (27)$$

При этом в силу (23) имеет место очевидное неравенство

$$\mathbf{v}^T F^T F \mathbf{v} \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^N a_i^2 = \lambda_1 \|\mathbf{v}\|^2, \quad (28)$$

на основе которого легко получить неравенство

$$\mathbf{v}^T F^T F \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|^2 \leq \lambda_1. \quad (29)$$

Отсюда следует, что условию (18) удовлетворяет собственный вектор матрицы

$$G_1 = F^T F, \quad (30)$$

который соответствует максимальному собственному числу. Таким образом, для выполнения условия (18) должно иметь место равенство

$$\mathbf{y} = \mathbf{q}_1, \quad (31)$$

а соотношение (19) принимает вид

$$\|\mathbf{q}_1\|^2 \mathbf{x} = F \mathbf{q}_1. \quad (32)$$

При этом соотношения (19) и (29) дают равенство

$$\|\mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1, \quad (33)$$

подстановка которого в (13) приводит к соотношению, определяющему минимальное значение функционала близости

$$\|D_1\|^2 = \|F\|^2 - |\lambda_1|. \quad (34)$$

Умножив соотношение (32) слева и справа на матрицу

$$V_1 = F F^T, \quad (35)$$

с учетом определения (22) нетрудно получить равенство

$$\|\mathbf{q}_1\|^2 F F^T \mathbf{x} = \lambda_1 F \mathbf{q}_1 = \lambda_1 \|\mathbf{q}_1\|^2 \mathbf{x}. \quad (36)$$

Таким образом, получаемый на основе соотношения вектор является собственным вектором матрицы (35) с тем же собственным

числом, т.е. имеет место равенство

$$\lambda_1 \bar{x} = FF^T \bar{x}. \quad (37)$$

Поэтому аналогично можно показать, что пара векторов, удовлетворяющая условиям (20) и (21) также определяется равенствами (31) и (32). Следовательно, определяемые соотношениями (31) и (32) векторы удовлетворяют условию (4) достижения глобального минимума евклидовой нормы отклонения аппроксимирующего изображения (1) от исходного.

При этом имеет место равенство

$$\|W_1\|^2 = \|\bar{x}\bar{y}^T\|^2 = \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 = \lambda_1. \quad (38)$$

Следующий шаг заключается в наилучшей в смысле минимума евклидовой нормы отклонения аппроксимации с помощью элементарного изображения (1) разностного изображения

$$F_1 = F - \bar{x}\bar{y}^T \quad (39)$$

где выполняются равенства (31), (32) и (33) так, что справедливо соотношение

$$F_1^T F_1 = F^T F - \lambda_1 \bar{q}_1 \bar{q}_1^T / \|\bar{q}_1\|^2. \quad (40)$$

Используя те же, что и выше рассуждения, нетрудно показать, что искомая аппроксимация определяется соответствующим максимальному собственному числу матрицы (40) собственным вектором. Так как для матрицы (30) справедливо представление

$$F^T F = \sum_{k=1}^N \lambda_k \bar{q}_k \bar{q}_k^T / \|\bar{q}_k\|^2, \quad (41)$$

то матрицу в левой части соотношения (40) можно, очевидно, представить в виде

$$F_1^T F_1 = \sum_{k=2}^N \lambda_k \bar{q}_k \bar{q}_k^T / \|\bar{q}_k\|^2, \quad (42)$$

откуда в соответствии с условием (23) следует, что максимальное собственное число матрицы (40) является вторым по величине собственным числом матрицы (30). Поэтому следующее приближение исходного изображения определяется соотношением

$$W_2 = F \bar{q}_2 \bar{q}_2^T / \|\bar{q}_2\|^2,$$

причем имеет место равенство

$$\|W_2\|^2 = \lambda_2.$$

Продолжая процесс построения следующих по порядку приближений, нетрудно получить соответствующие общие соотношения

$$W_k = F \bar{q}_k \bar{q}_k^T / \|\bar{q}_k\|^2, \quad (43)$$

$$\|W_k\|^2 = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (44)$$

Легко понять, что в силу равенства

$$\sum_{k=1}^N \bar{q}_k \bar{q}_k^T / \|\bar{q}_k\|^2 = I = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad (45)$$

выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^N W_k = F, \quad (46)$$

т.е. сумма приближений дает точное равенство.

Введем обозначения

$$y_k = \bar{q}_k / \|\bar{q}_k\|, \quad (47)$$

$$x_k = F y_k, \quad (48)$$

так, что в виду (44) имеет место

$$\|x_k\| = (\lambda_k)^{1/2}, \quad k = 1, \dots, N \quad (49)$$

Тогда исходное изображение можно представить в виде суммы

$$F = \sum_{k=1}^N x_k y_k^T, \quad (50)$$

вес слагаемых в которой определяется правой частью соотношения (49).

Отметим также одно свойство входящих в представление (50) слагаемых (приближений вида (43), которое следует из (24)

$$W_i^T W_k = \lambda_k y_k y_k^T \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad (51)$$

$$W_i W_k^T = x_k x_k^T \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (52)$$

Это свойство представляется естественным называть взаимортогональностью, а представление (50) – ортогональным разложением.

Заметим также, что количество ненулевых собственных чисел матрицы (30) равно её рангу R, который совпадает с рангом исходного изображения, которое тоже можно интерпретировать в ка-

честве матрицы. Поэтому представление (50) можно записать в уточненном виде

$$F = \sum_{k=1}^R \bar{x}_k \bar{y}_k^T. \quad (53)$$

С другой стороны собственные числа матрицы (30) могут достаточно быстро убывать так, что усеченная сумма

$$PF_K = \sum_{k=1}^K \bar{x}_k \bar{y}_k^T, \quad K < R, \quad (54)$$

будет давать приближение относительной погрешностью

$$\sigma = \|PF_K\| / \|F\| = \|F - \sum_{k=1}^K \bar{x}_k \bar{y}_k^T\| / \|F\| = \left(\sum_{k=K+1}^R \lambda_k / \sum_{k=1}^R \lambda_k \right)^{1/2}, \quad (55)$$

которую легко вычислить на основе собственных чисел. При этом можно определить такое значение количества слагаемых в (54), чтобы погрешность удовлетворяла заданному ограничению сверху.

Представляет интерес также следующее представление для двумерных трансформант Фурье слагаемых в правой части соотношения (53)

$$\bar{W}_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=1}^M x_{mk} \exp(-j\omega_1(m-1)) \sum_{n=1}^N y_{nk} \exp(-j\omega_2(n-1)) = \bar{X}_k(\omega_1) \bar{Y}_k(\omega_2), \quad (56)$$

так, что трансформанту Фурье исходного изображения можно представить через сумму соответствующих произведений трансформант векторов

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k=1}^R \bar{X}_k(\omega_1) \bar{Y}_k(\omega_2). \quad (57)$$

Отметим, что использование в качестве приближений сумм вида (51) соответствует принципу сжатия изображений. При этом степень сжатия определяется из соотношения

$$c_K = N * M / (K * (N + M)). \quad (58)$$

Например, при равенстве количества строк и столбцов имеет место

$$c_K = N / (2 * K). \quad (59)$$

Таким образом, эффект от применения (51) будет достигаться только при выполнении неравенства

$$N > 2 * K.$$

Очевидно также, что удаление любого слагаемого из суммы (54) приводит к частотной фильтрации, эффект от которой можно оценить на основе соотношения вида (56).

Для проверки работоспособности предлагаемого метода были проведены вычислительные эксперименты. Была получена погрешность представления исходного изображения $F=\{f_{ij}\}$, $i,j=1,2,\dots,N$, (рис. 1) в виде разложения PF_{K_m} на простейшие при различном количестве K_m слагаемых в выражении (54), т.е.

$$PF_{K_m} = \sum_{k=1}^{K_m} \sqrt{\lambda_k} \bar{u}_k \bar{v}_k^T, \quad (60)$$

$$\lambda_i \bar{u}_i = FF^T \bar{u}_i, \quad \lambda_i \bar{v}_i = F^T F \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, K_m.$$

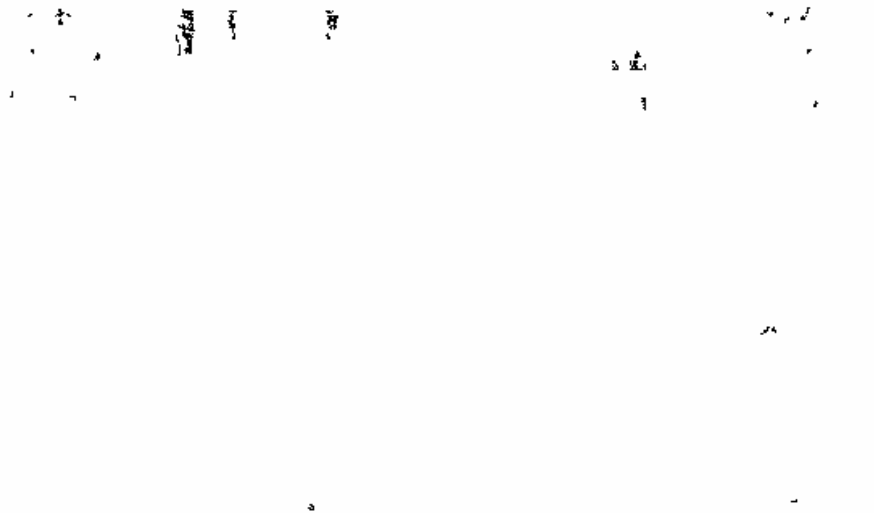


Рис. 1

Пример исходного изображения

Собственные числа $\{\lambda_i\}$, $i=1,2,\dots,N$, матрицы (30) были упорядочены по убыванию

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N,$$

соответственно определен порядок собственных векторов u_i , v_i , $i=1,2,\dots,N$.

Значение количества K_m слагаемых определялось для различных значений долей m суммы собственных чисел матрицы (30),

$$m = \{0,85; 0,87; 0,89; 0,91; 0,93; 0,95; 0,97; 0,99\},$$

исходя из следующих условий

$$\sum_{k=1}^{K_m} \lambda_k \leq M, \quad \sum_{k=1}^{K_m+1} \lambda_k > M,$$

где

$$M = m \sum_{k=1}^N \lambda_k$$

Погрешность σ_m представления исходного изображения в виде разложения на простейшие определялась на основе следующего выражения [2]

$$\sigma_m = \frac{\|F - PF_{K_m}\|}{\|F\|}$$

Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 1, где также указаны доли δ_m количества собственных чисел матрицы (30), соответствующих различным значениям величины m ,

$$\delta_m = \frac{K_m}{N}$$

Таблица 1

Погрешность σ_m представления исходного изображения
в виде разложения на простейшие при $N=100$

Доля суммы собственных чисел m	Погрешность разложения σ_m	Доля количества собственных чисел δ_m
0 85	0 0804	0 07
0 87	0 0737	0 08
0 89	0 0622	0 1
0 91	0 0499	0 13
0 93	0 0373	0 18
0 95	0 0271	0 24
0 97	0 0169	0 34
0 99	0 0064	0 54

На рис. 2 приведены некоторые изображения F_{K_m} (59), являющиеся результатом разложения исходного изображения на K_m простейших

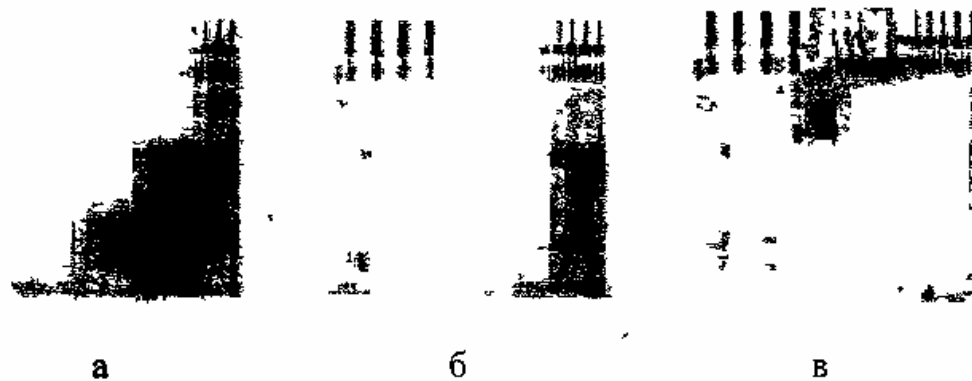


Рис 2

Примеры изображений F_{km} – результаты разложения исходного изображения на K_m простейших а – $m=0,85$, б – $m=0,91$, в – $m=0,95$

Результаты вычислительных экспериментов продемонстрировали перспективность предложенного метода при решении задач обработки изображений.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., Физматлит, 2004. 560 с.
2. Бронштейн И.Н., Семдяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., Лань, 2009. 608 с.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры для инновационной России» на 2009-2013 годы, гос контракт № 14 740 11 0390.

Статья поступила 09 12 2011

К.т.н., доц. А.А.Черноморец, И.В. Лысенко, Е.В. Болгова
(НИУ «БелГУ»)

A.A. Chernomorets, I.V. Lysenko, E.V. Bolgova

**КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ВЗВЕЩЕННОЙ
ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

**COMPUTER IMPLEMENTATION OF ALGORITHM
FOR WEIGHED OPTIMAL IMAGE FILTRATION**