ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика
заочной формы обучения,
группы 02041351
Ветренко Инны Владимировны

Научный руководитель
к.ф.м.н., доцент
Зинченко Н.А.

БЕЛГОРОД 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Актуальность исследования множества действительных чисел в средней школе вызвана потребностями курса. Изучением множества действительных чисел завершается рассмотрение числовых систем в школьном курсе. Понятие действительного числа формируется в процессе изучения метрической геометрии и связана с измерением геометрических величин. Также без понятия действительного числа сложно определить понятие предела числовой последовательности и функции. Иначе говоря, без определения действительного числа нельзя ввести многие понятия математического анализа.

В рабочей программе по алгебре к учебнику для 8 класса с углубленным изучением математики автора Н.Я. Виленкина [11] важной целью изучения темы «Действительные числа» является: обобщение и систематизация полученных учащимися ранее знаний о рациональных и иррациональных числах.

В федеральном государственном образовательном стандарте общего образования [39] в требованиях к математической подготовке учащихся нет упоминания о том, что выпускник должен знать, что такое рациональное число, иррациональное или действительное число, чем они отличаются между собой, какими свойствами обладают и какие операции выполняются на множестве действительных чисел. Предусматриваются лишь знания о свойствах квадратных корней и умение преобразовывать выражения их содержащие. Но несомненно, что эти знания без владения основными свойствами действительных чисел, не будут достаточно глубокими. В работах многих учителей-практиков и ученых методистов отмечено, что трудности в усвоении обучающимися данной темы обусловлены тем, что полного обобщения понятия множества действительных чисел как числовой системы нет, что негативно влияет на дальнейшее построение курса. Поэтому возникает необходимость в дополнительных исследованиях по проблемам методики обучения теме «Действительные числа», что и является целью нашей работы.

Объектом исследования является процесс обучения числовым системам в школьном курсе математики.

Предметом исследования являются действительные числа в школьном курсе математики.

Цель исследования - составить систему упражнений на овладение понятием действительного числа и систему упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа».

Задачи исследования:

- Выделить главные исторические этапы развития теории действительных чисел.
- Рассмотреть разные способы определения понятия действительного числа.
- Изучить аксиоматическое построение теории действительного числа.
- Представить методическую схему изучения множества действительных чисел в школьном курсе математики.
- Выявить методические особенности формирования понятия действительного числа на уроках математики.
- Рассмотреть основные операции и свойства на множестве действительных чисел.
- Составить систему упражнений, направленную на усвоение понятия действительного числа.
- Составить систему упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа».

Методы исследования: анализ педагогической литературы; изучение опыта работы учителей математики по теме исследования; изучение школьных программ, учебников и учебных пособий.

Практическая значимость результатов бакалаврской работы состоит в выявлении методических особенностей введения понятия действительного числа на уроках математики и разработка систем упражнений, которые могут быть использованы учителями математики и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения темы «Действительные числа» на уроках математики. Здесь раскрыты исторические аспекты развития понятия действительного числа, определены разные способы определения действительного числа и представлено аксиоматическое построение теории действительных чисел.

Во II главе показана методическая схема изучения множества действительных чисел, рассмотрены методические особенности введения понятия действительного числа в школьном курсе математики, обозначены основные операции и свойства на множестве действительных чисел. Составлена система упражнений на усвоение понятия действительного числа и система упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа».

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

1.1 История развития действительного числа

Важнейшим математическим понятием является число. На первых этапах существования человеческого общества числа служили для примитивного счета предметов, дней, шагов. В первобытном обществе человек нуждался лишь в нескольких первых числах. С развитием цивилизации ему потребовалось изобретать все больше числа, этот процесс продолжался много столетий и требовал усиленного интеллектуального труда [13].

Сначала понятие отвлеченного числа отсутствовало - число было «привязано» к тем предметам, которые пересчитывали, и в языке первобытных народов существовали различные словесные обороты для обозначения одного и того же числа разных предметов. Отвлеченное понятие **натурального числа** (т. е. числа, не связанного с пересчетом конкретных предметов) появилось и закрепилось вместе с развитием письменности и введением для обозначения чисел определенных символов [7].

Возникновение дробных количеств (положительных рациональных) было связано с потребностью изготовлять измерения, т. е. функцию, в которой какой-либо размер сравнивается с иной величиной такого же семейства, избираемой в качестве образца (единицы измерения). Но так как единица измерения не всегда укладывалась целое число раз в измеряемой величине, и пренебречь этим обстоятельством в ряде случаев было нельзя, то возникла практическая потребность ввести более «мелкие» числа, нежели натуральные. Это являлось источником возникновения наиболее «простых» дробей, таких, как половина, треть, четверть и т. д. [11].

Изучая «Начала» Евклида, можно отметить, что была изложена теория отношений отрезков, включающая возможность их несоизмеримости. В Древней Греции могли сравнивать разные отношения по величине, производить над ними арифметические действия в геометрической форме. Хотя греки обращались с такими отношениями как с числами, они не осознали, что отношение длин несоизмеримых отрезков может рассматриваться как число [13].

Введение отрицательных чисел было вызвано развитием алгебры как науки, выделяющей общие способы решения арифметических задач независимо от их конкретного содержания и исходных числовых данных. Отрицательные числа систематически употреблялись индийскими математиками еще в VI— XI веках. В европейской науке отрицательные числа окончательно вошли в употребление лишь после работ Р. Декарта в XVII веке, давшего их геометрическое истолкование [14].

Последующее расширение понятия числа произошло в XVII веке в период зарождения современной математики, когда появилась надобность ввести четкое определение понятия числа. Такое определение было дано одним из основоположников математического анализа И. Ньютоном во «Всеобщей арифметике»: Под числом мы определяем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу [14].

Заметим, что эта формулировка дает единое определение действительного числа, как рационального, так и иррационального.

После стало известно, что любое число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. В XVIII в. Л.Эйлер и И.Ламберт показали, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом [14].

Множество рациональных чисел оказывается достаточным для удовлетворения большинства практических потребностей, с помощью рациональных чисел измерения можно выполнять с любой наперед заданной степенью точности [13].

Термин «рациональное» (число) происходит от латинского слова ratio - отношение, которое в свою очередь, является переводом греческого слова «логос». **«Иррациональное» (число)** понимают как нерациональное (по-гречески «алогос» - нелогичное).

Важно заметить, что позже, в 70 годах 19 века, понятие действительного числа было уточнено на базе анализа понятия непрерывности Р. Дедекиндом, Г. Кантором и К. Вейерштрассом. Независимо друг от друга они создают оригинальные теории действительного числа, которые используются в настоящее время (основа этих теорий приводится во 2 параграфе данной работы). Сейчас наибольшее распространение получили аксиоматические теории действительного числа, так как этот подход наиболее ярко демонстрирует множественное соотношение[14].

1.2 Аксиоматическое построение множества действительных чисел

Рассмотрим определение системы действительных чисел как некоторого непустого множества, в котором выделены некоторые элементы; задаются некоторые операции; определяются некоторые отношения.

Данный подход к определению системы действительных чисел в современной математике называется **аксиоматическим** [12].

Системой R действительных чисел называется множество чисел, в котором заданы две операции: сложение и умножение, а также задано отношение линейного порядка, называемое сравнением действительных чисел по величине, причем множество R с точки зрении операций сложения и умножения подчиняются следующим аксиомам действительных чисел:

1. **Аксиомы сложения:**

$\forall x, y \in R \exists! u = x + y \in R$,причем выполняются следующие условия:

a) $\forall x, y \in R: x + y = y + x$ - коммутативность сложения;

b) $\forall x, y, z \in R: x + (y + z) = (x + y) + z$ - ассоциативность сложения;

c) $\exists! 0 \in R: x + 0 = 0 + x = x$–нейтральность нуля;

d) $\forall x \in R \exists! (-x) \in R: x + (-x) = 0$- симметризуемость относительно 0 [27].

2. **Аксиомы умножения:**

$\forall x, y \in R \exists! u = x \cdot y \in R$,причем выполняются следующие условия:

a) $\forall x, y \in R: x \cdot y = y \cdot x$ - коммутативность умножения;

b) $\forall x, y, z \in R: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ - ассоциативность умножения;

c) $\exists! 1 \in R: x \cdot 0 = 0 \cdot x = x$–нейтральность единицы;

d) $\forall x \in R \exists! (1/x) \in R: x \cdot (1/x) = 1$- симметризуемость относительно 1;

e) $\forall x, y, z \in R: x \cdot (y + z) = xz + yz$ - дистрибутивность умножения относительно операции сложения [27].

3. **Аксиомы порядка:**

Для некоторых действительных чисел x, y ∈R имеет место сравнение по величине x≤y, причем выполняются условия:

a) $\forall\ x \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}$;

b) $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x} \end{matrix}\right\} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

c) $\left.\begin{matrix} x, y, z \epsilon R: x \leq y \\ y \leq z \end{matrix}\right\} \rightarrow x \leq y; \forall x, y \in R: x = y$ и $x \leq y$ и $y \leq x$ отношение сравнения по величине обычным порядком;

d) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$ – закон монотонности для сложения;

e) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}: \boldsymbol{x} * \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y} * \boldsymbol{z} \forall \boldsymbol{z} \left(\geq \boldsymbol{0}\right) \in \boldsymbol{R}$ –закон монотонности для умножения.

Замечание: прежде чем формулировать последнюю группу аксиом приведем необходимые для ее понимания некоторые понятия, связанные с действительными числами и опирающиеся лишь на приведенные аксиомы сложения, умножения, порядка:

$M(\neq \varnothing) \subseteq R; a, b \in R$, тогда

1) $a \leq x \forall x \in M \Leftrightarrow a \leq M$и говорят «число aявляется нижней гранью множества M»;

2) $x \leq b \forall x \in M \Leftrightarrow M \leq b$и говорят «число b является верхней гранью множества M».

Множество М называется ограниченным сверху, если оно имеет хотя бы одну верхнюю грань.

Если у ограниченного снизу множества М существует наименьшая верхняя грань, равная $\beta \in R$, то ее называют точной верхней гранью $M: \beta = inf M$.

Если α и β существуют, то $M \subseteq [\alpha, \beta]$, причем $[\alpha, \beta]$ является наименьшим отрезком, обладающим этим свойством.

4. Аксиома о точной нижней или верхней грани:

Всякое числовое множество, ограниченное снизу (сверху) обязательно имеет точную нижнюю (верхнюю) грань [25].

5. Теорема (аксиома) Дедекинда:

Пусть заданы два множества A и B - не пустые, не пересекающиеся и в объединении дающие множество действительных чисел:

$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = RA \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = R.$

И пусть $\forall a \in A \forall b \in B a < b \forall a \in A \forall b \in B a < b$, тогда существует такое действительное число c, для которого выполняется следующее условие:

$a \leq c \leq b a \leq c \leq b.$

О множествах $\boldsymbol{A}$ ***и*** $\boldsymbol{B}$ говорят, что они образуют Дедекиндово сечение, а число $\boldsymbol{c}$ это сечение производит. Это число $\boldsymbol{c}$ принадлежит либо множеству $\boldsymbol{A}$**,** тогда в множестве $\boldsymbol{A}$ есть наибольшее число, а в множестве $\boldsymbol{B}$ нет наименьшего числа, либо $\boldsymbol{c}$ принадлежит множеству $\boldsymbol{B}$, тогда в множестве $\boldsymbol{B}$ оно наименьшее, а в множестве $\boldsymbol{A}$ нет наибольшего. Понятно, что число $\boldsymbol{c}$**,** осуществляющее Дедекиндово сечение, является единственным.

Следовательно, теорема Дедекинда формулирует свойство полноты (или непрерывности) множества действительных чисел [27].

Отметим, под множеством $\boldsymbol{R}$действительных чисел мы понимаем числовую алгебраическую систему, заданную на множестве R путем введения двух чисел —$\boldsymbol{0, 1}$**,** определения двух алгебраических операций - сложения и умножения и задания одного отношения - «≤», причем эти выделенные числа и заданные операции и отношения удовлетворяют вышеуказанным аксиомам действительных чисел. В связи с тем, что множество $\boldsymbol{R}$ рассматривается как некоторая алгебраическая система, обычно применяют обозначения: $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R};$ $0,\ 1;\ +,\cdot;\ \leq\boldsymbol{)},$ которое подчеркивает системный взгляд на множество действительных чисел [27].

Главным образом, группой называется алгебраическая система, в которой выделен один элемент и задана одна алгебраическая операция, так что эта операция ассоциативна, выделенный элемент нейтрален относительно нее и вся система симметризуема относительно нейтрального элемента с помощью заданной алгебраической операции, причем группа называется коммутативной, если групповая операция коммутативна [12].

Таким образом, множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел является коммутативной группой относительно: 0 и операции сложения (аксиомы 1); 1 и операции умножения (аксиомы 2).

Укажем, что кольцом называется алгебраическая система, в которой выделен один элемент и заданы 2 алгебраические операции, так что относительно выделенного элемента и одной кольцевой операции данная система является коммутативной группой, в которой вторая операция ассоциативна и дистрибутивна относительно первой [12].

Таким образом, множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел является коммутативным кольцом с единицей: кольцо (аксиомы 1 a) - 1d), 2b), 2e)); коммутативное кольцо (аксиомы 1 a) - 1d), 2a), 2b), 2e)); коммутативное кольцо с единицей (аксиомы 1 a) - 1d), 2a), 2b), 2c), 2e)).

Важно знать, что кольцо (группа) называется упорядоченным, если в нём (ней) кроме кольцевых (групповых) операций задан линейный обычный порядок, связанный с операциями законами монотонности.

Известно, что полем называется алгебраическая система, в которой выделены два элемента - 0 и 1 и заданы две алгебраические операции - сложения и умножения, так что: относительно 0 и операции сложения множество является коммутативной группой, в которой выделена одна и задана еще одна алгебраическая операция умножения, связанные с 0 и операцией сложения аксиомами коммутативного кольца с 1, которое симметризуемо относительно 1 с помощью операции умножения.

Следовательно, поле называется упорядоченным, если в нем задан линейный обычный порядок, связанный с полевыми операциями законами монотонности. Поле называется полным, если в нем выполняется аксиома о точной нижней или верхней грани [12].

Таким образом, обобщая сказанное, система действительных чисел - это полное упорядоченное поле.

1.3 Анализ школьных учебников по проблеме исследования

Важно рассмотреть введение темы «Действительные числа» в различных школьных учебниках.

Таблица 1. Содержание школьных учебников по теме «Действительные числа»

Учебные пособия для учащихся общеобразовательных классов		
Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [28]	**Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [2]**	**Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [31]**
Количество часов, класс тема		
23 часа, 8 класс, Рациональные дроби и их свойства	20 часов, 8 класс, Квадратные корни	17 часов, 8 класс, Функция $y=\sqrt{x}$. Свойства квадратного корня
Последовательность вводимых понятий		
-понятие рационального числа (периодическая дробь период); понятие иррационального числа (начиная при этом с измерения отрезков на примерах и интуитивном уровне); понятие множества действительных чисел (правила сравнения действительных чисел); - арифметический квадратный корень и его свойства.	-понятие рационального числа; -понятие иррационального числа (как бесконечная десятичная непериодическая дробь); -понятие множества действительных чисел (арифметические действия и правила сравнения определяются так же как действия и правила у рациональных чисел);	-квадратный корень. -дается геометрическая интерпретация нового числа $y=x^2$; -систематизация знаний по теме «Множество рациональных чисел»; -понятие иррационального числа (как

		бесконечная десятичная непериодическая дробь); понятие множества действительных чисел (взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и координатной плоскостью, законы, правила); - понятие модуля действительного числа и основные его свойства; - понятие приближенного значения действительных чисел (по недостатку и избытку); -понятие степени с отрицательным целым показателем и стандартный вид положительного числа;
Определение понятия действительного числа (множества действительных чисел)		
Множество действительных чисел состоит из множества рациональных и множества иррациональных чисел.	Бесконечные десятичные непериодические дроби называют иррациональными числами. Рациональные и иррациональны числа образуют множество действительных чисел.	Если множество рациональных чисел дополнить множеством иррациональных чисел, то вместе они составят множество действительных чисел.
Цель		
Расширить понятие числа; систематизировать сведения о рациональных числах, дать представление об иррациональном числе, сформировать представление о действительных числах.	Познакомить учащихся с понятиями иррациональных чисел и бесконечных десятичных непериодических дробей, показать, что рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.	Расширение и систематизация знаний учащихся о числах; изучение множества действительных чисел; совершенствование устной речи и вычислительных навыков.
Вывод		
Дается представление о множестве действительных чисел. Ограниченность во времени и математический аппарат восьмиклассников не позволяет дать полное представление о рассматриваемом множестве.	Сведения о действительных числах содержится меньше чем в учебнике под редакцией Теляковского. Они носят промежуточный характер в теме «Квадратные корни».	Изложение ведется на доступном уровне, однако систематичность знаний и их научность нарушена. Не введены понятия арифметических операций, которыми автор активно пользуется. Не совсем ясно, каково же точное значение данного действительного числа и как его определить.

Учебные пособия для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики		
Учебное пособие «Алгебра для 8 класса: для школ и классов с углубленным изучением математики» авторы Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло[9]	**Учебник Н.Я.Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шеарцбурда Алгебра и математический анализ» [10]**	**Учебное пособие "Алгебра 7" (С.М. Никольский, М.К. Потапов и др.) [33]**
Количество часов, класс тема		
- рациональные и иррациональные числа как длины отрезков, соизмеримых и несоизмеримых с единицей; - строгое определение десятичного приближения с недостатком (избытком); - дробь с периодом 9 равна дроби с периодом 0; - определение действительного числа (как бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся последовательностью девяток); - правила сравнения действительных чисел; - определение бесконечной периодической десятичной дроби; - арифметические операции над действительными числами; - формулируются свойства введенных операций; - понятие модуля действительного числа и его свойства; - координаты точки на прямой и плоскости.	- доказательство факта, что диагональ десятичного квадрата не выражается никаким рациональным числом; - приближение измерений по избытку (недостатку); - определение действительного числа; - понятие рационального и иррационального числа; - числовые множества и операции над ними; - определение суммы действительных чисел; - определение положительных действительных чисел; - определение чисел, обратных положительному числу; - определение частного от деления одного действительного числа на другое; - определение разности действительных чисел.	- понятие обыкновенной дроби; - понятие конечной десятичной дроби; - понятие периодической дроби; - понятие бесконечной десятичной непериодической дроби; - понятие действительного числа (подробно выделены правила сравнения и основные свойства); - понятие модуля действительного числа. - вводятся приближения чисел (с недостатком), арифметические операции как приближенное значение.
Определение понятия действительного числа (множества действительных чисел)		
Положительным действительным числом $\boldsymbol{a}$ называют бесконечную десятичную дробь $\boldsymbol{n_0, n_1, n_2 \dots n_k \dots}$, не оканчивающуюся последовательностью девяток.	Положительным действительным числом $\boldsymbol{a}$ называют бесконечную десятичную дробь $\boldsymbol{N, n_1 \dots n_k}$ не оканчивающуюся последовательностью девяток.	Рациональные и иррациональные числа называют действительными числами.
Цель		
Познакомить учащихся с понятием действительного числа, научить выполнять арифметические операции во множестве действительных чисел	Добиться понимания учащимися необходимости введения новой числовой системы – системы действительных чисел и научить их выполнять арифметические операции в новой системе	Систематизировать и обобщить уже известные сведения о рациональных числах, двух формах их записи – в виде обыкновенной и десятичной дроби, сформировать представление о действительном числе, как о длине отрезка и умение изображать числа

		на координатной оси.
Вывод		
Достаточно подробно и строго рассматривается множество действительных чисел, но, на наш взгляд, в отличие от учебного пособия [33] не столь логичен.	Изложение ведется на строгом уровне. Задания и упражнения продуманы, предусматривают глубокое и четкое усвоение материала	На соответствующем для 7 класса уровне и достаточно полно дается теория действительного числа.

Анализ, проведенный в таблице 1, позволяет сделать вывод, что каждый из анализируемых учебников, может быть использован для успешного обучения действительным числам.

Можно также провести анализ и других учебных пособий и учебников по математике, использовавшихся в различные периоды в российских школах, на предмет изложения в них темы «Действительные числа».

1. Учебное пособие авторов Е.С. Кочеткова, Е.С. Кочетковой «Алгебра и элементарные функции. Часть I »[24].

Повествование темы «Действительные числа» происходит с рассмотрения понятия рационального числа (рассматривается историческое расширение множества натуральных чисел, далее рассматривается определение рационального числа как обыкновенной дроби). Появляются действия над рациональными числами (определяются основные арифметические операции и их свойства), геометрическое изображение рационального числа (на интуитивном уровне объясняется, что любому рациональному числу соответствует точка на прямой). Затем вводится метод обращения обыкновенной дроби в десятичную и, наоборот, а также объясняется, почему договорились, что период любой десятичной дроби не может быть равным 9. Доказывается теорема о не существовании рационального числа, квадрат которого равен 2. Затем вводится понятие соизмеримости отрезков - доказывается теорема о том, что диагональ любого квадрата несоизмерима с его стороной и приводятся следствия из этой теоремы. На основе соизмеримости и несоизмеримости отрезков вводятся понятия иррационального числа и действительного числа (как группа множеств рациональных и иррациональных чисел). Затем детально исследуются действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Для начала показывается сравнение чисел: дается определение равных положительных действительных чисел, определяется большее положительное число, определяется равенство отрицательных действительных чисел через абсолютные величины. Определяется геометрическое изображение действительных чисел на интуитивной основе и появляется вывод о том, что множество действительных чисел и множество точек числовой прямой находится во взаимно однозначном соответствии. Далее, подробно на примерах и, используя теоретические положения, рассматриваются приближения действительных чисел (по избытку и недостатку) и главные арифметические операции: четкие определения сложения, умножения, вычитания (как обратной сложению), деления (как обратной умножению).

Важно заметить, что все упражнения, приведенные в данном учебном пособии, хорошо продуманы. Задания разделяются на те, в которых необходимо лишь воспроизвести полученные знания и непосредственно применить их, и те, в которых недостаточно применить знания, нужно иметь их на довольно высоком уровне (доказательство утверждения, вывод следствий). Примечательно, что задания рассчитаны на хорошее развитие абстрактного мышления (так называемые задания "с буквами").

Таким образом, в данном учебном пособии повествование темы ведется на строгой классической математической основе с сохранением логики изложения. Задания и упражнения удовлетворяют принципам научности, доступности, постепенно возрастающей сложности. В текст включены исторические сведения по теме.

2. Учебное пособие авторов А.К. Колмогорова, А.М. Абрамова и др. «Алгебра и начала анализа» [20].

Тема «Действительные числа» излагается с представления рациональных чисел в виде бесконечной десятичной дроби, определяется правило сравнения десятичных дробей. Далее определяются периодические десятичные дроби, доказывается теорема о том, что каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью (а также приводится обратная теорема). Отметим, что доказательство первой теоремы опирается на примеры, а строгое доказательство «потерялось» среди них. Демонстрируется иллюстрация того, что дробь, имеющая 9 периодом не получается в результате деления натурального числа m на натуральное число n(отметим, что в ранее рассмотренном учебнике [24] приводится другое объяснение этого факта). Объясняется в общих чертах, как была построена теория действительного числа. Затем определяются арифметические операции над действительными числами через приближения по избытку и недостатку. Показывается изображение чисел точками координатной прямой, а также доказывается формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной прямой. Определяется взаимно однозначное соответствие между действительными числами x и изображающими их точками M(x). Указывается множество R как «числовую прямую», а числа - «точки числовой прямой». Определяется также взаимно однозначное соответствие между числовой плоскостью и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Формулируют некоторые свойства множества действительных чисел (например, свойство плотности подмножества рациональных чисел в множестве действительных чисел).

Заметим, что совокупность упражнений в этом учебнике будет слабее, в отличие от предыдущего учебного пособия. Здесь упражнения носят чисто вычислительный характер, причем, вычисления предполагаются элементарные.

Таким образом, в целом, учебник показывает также практически полное представление о действительных числах и их свойствах, что позволяет строить теорию пределов в школьном курсе.

В ранее действующих учебниках тема «Действительные числа» по программе рассматривалась дважды: в 7-ом классе (начальные сведения) и в

9-ом классе (более подробное изложение). По действующей же программе в 10-11-х классах сведения о действительных числах отсутствуют, поэтому авторы действующих на данный момент учебников постарались изложить все сведения в 8-ом классе (конечно же, о строгости и полноте речь уже идти не может).

3. Учебник Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк и др. «Алгебра» 8 класса [28].Является одним из наиболее используемых учебников для 8 класса в современной средней школе. Изложение темы начинается с введения понятия рационального числа (периодическая дробь, период). Утверждается (без какого-либо доказательства), что каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби (и наоборот). Отмечается также, что бесконечные десятичные дроби с периодом 9 считают другой записью дробей с периодом 0, и что при обращении обыкновенной дроби в десятичную не может получиться дробь с периодом 9 (без доказательства как дополнительный материал).

Далее рассматривается понятие иррационального числа (начиная при этом с измерения отрезков на примерах и интуитивном уровне). Доказывается, что среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2 (также как дополнительные сведения). Здесь же определяют множество действительных чисел как объединения множеств рациональных и иррациональных чисел. Устанавливается также правило сравнения действительных чисел. Правила арифметических действий на множестве действительных чисел не определяются. Дается лишь понятие о том, как найти приближенное значение суммы, разности, частного (существование точных значений не оговаривается). Затем определяется арифметический квадратный корень и его свойства.

Упражнения к теме в данном учебном пособии носят вычислительный характер. Присутствуют также задания на закрепление умения определять принадлежность числа некоторому числовому множеству (натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел).

Делая вывод, данное учебное пособие дает учащимся представление о множестве действительных чисел. Конечно, ни математический аппарат восьмиклассников, ни ограниченное учебное время не позволяют дать полное представление о рассматриваемом множестве чисел (но теория дифференциального исчисления в школьном курсе математики присутствуют, а основы для нее нет).

4. **Учебное пособие для 8 класса авторов Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина и др. «Алгебра» [2].**Рассмотрение действительных чисел начинается опять же с введения понятия рационального числа. Дается понятие того, что любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической дроби, и наоборот. Далее рассматриваются иррациональные числа как бесконечные десятичные непериодические дроби. Множество действительных чисел образуется объединением множеств рациональных и иррациональных чисел. Дается обобщение понятия числа и приводится структура множества действительных чисел (но в данной интерпретации дробные числа не разделяются на подмножества (конечная десятичная и бесконечная периодическая).

Нельзя не отметить, что арифметические действия и правила сравнения определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств оказываются такими же, как и для рациональных чисел. Однако, арифметические действия не показываются даже на примерах (только вычисления с помощью микрокалькулятора). Примечательно, что очень мало внимания уделяется взаимно однозначному соответствию между множеством действительных чисел и координатной прямой. Упражнения нацелены на привитие умения записывать обыкновенную дробь в виде десятичной, и наоборот. Остальные задания связаны с вычислением на микрокалькуляторе.

Учитывая анализ пособия, делаем вывод, что здесь сведений о действительных числах содержится еще меньше. Они носят промежуточный характер в теме «Квадратные корни».

5. **Учебное пособие автора А.Г. Мордковича «Алгебра 8»**. Тема «Действительные числа» в данном учебнике раскрывается после изучения темы «Свойства квадратного корня». Автор вводит понятие «квадратный корень из данного числа» как некоторое обозначение неизвестного числа, квадрат которого равен данному числу (причём доказывается, что нет такой дроби, квадрат которой равен числу 5), даётся геометрическая интерпретация этого нового числа (парабола $y=x^2$). Про определение таких чисел, об их свойствах речи пока не идёт. Рассмотрение данной темы начинается с систематизации знаний по теме «Множество рациональных чисел», где вводятся:

- множественные понятия и обозначения: $N, Z, Q, \in, \notin, \not\subset, \subset$.
- запись рациональных чисел в виде десятичных дробей.

Далее рассматриваются иррациональные числа, которые определяются как бесконечные десятичные непериодические дроби, показывается также(на примерах), что операции над иррациональными числами не всегда приводят к иррациональным числам.

Автор вводит множество действительных чисел как объединение множеств рациональных и иррациональных чисел, а также обозначения этого множества. Показывают взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и координатной прямой, законы и правила, действующие в новом множестве. Здесь же определяются правила сравнения действительных чисел (и геометрическая интерпретация этих правил).

Далее очень подробно и обстоятельно изучают понятие модуля действительного числа и основные его свойства. После этого на примерах определяют приближённые значения действительных чисел (по недостатку и избытку), округление чисел, абсолютную погрешность.

Обязательно определяется степень с отрицательным целым показателем и стандартный вид положительного числа (не совсем понятно, какое отношение имеют эти понятия к понятию действительного числа). Заметим, что в данном учебном пособии изложение ведётся на доступном уровне. Однако систематичность знаний и их научность нарушена. Не введены понятия арифметических операций, которыми автор активно пользуется. Остается непонятно, каково же точное значение данного действительного числа, как его определить (может сложиться ложное впечатление, что точного значения действительного числа не существует). Далее рассмотрим учебные пособия для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики (для 8 и 10 классов).

6. Учебное пособие авторов Н.Я Виленкина, Г.С. Сурвилло и др. «Алгебра для 8 класса: для школ и классов с углубленным изучением математики» [9]. Раскрытие темы «Действительные числа» начинается с обоснования того, что не каждый отрезок имеет длину, являющуюся рациональным числом. При этом делается вывод, что длина отрезка либо выражается конечной десятичной дробью, либо не может быть выражена конечной десятичной дробью. Рациональные и иррациональные числа как длины отрезков, соизмеримых и несоизмеримых с единичным. Дается строгое определение десятичного приближения с недостатком (избытком). Доказывается, что дробь с периодом 9 равна дроби с периодом 0. После этого определяется действительное число как бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся последовательностью (бесконечной) девяток. Важно, что в данном учебном пособии есть оговорка, что бесконечная десятичная дробь не само число, запись действительного числа. Утверждается, что для любого положительного действительного числа найдется отрезок, длина которого выражается этим числом. Определяется также отрицательное действительное число. Формулируется правило сравнения действительных чисел. Далее дается определение бесконечной периодической десятичной дроби, доказывается, что рациональные числа выражаются периодическими десятичными дробями.

Автор вводит арифметические операции над действительными числами (заметим, что приводятся некоторые геометрические утверждения, опирающиеся на определения арифметических операций).

Формулируются свойства введенных операций. Вводится понятие модуля действительного числа (и его свойства). Далее выводят правило обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные. Затем вводятся координаты точки на прямой и на плоскости (взаимно однозначное соответствие множества действительных точек и точек прямой).

Упражнения данного пособия разнообразны (хотя их и не много). Присутствуют задачи на доказательство, и вычислительные задания, и упражнения начеткое понимание определений и свойств.

Итак, данный учебник достаточно подробно и строго рассматривает множество действительных чисел, но, на наш взгляд, в отличие от учебного пособия не столь логичен [26].

7. Учебник Н.Я. Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шеарцбурда «Алгебра и математический анализ» [10].Изложение темы начинается с доказательства того факта, что длина диагонали десятичного квадрата не выражается никаким рациональным числом. Далее говорится, что при измерении отрезков возможно 2 случая: длина измеряемого отрезка выражается конечной десятичной дробью; длина измеряемого отрезка не может быть выражена конечной десятичной дробью.

Затем рассматривается приближение измерений по избытку (недостатку). Объясняется, почему в определении десятичных чисел оговаривается, что число не должно оканчиваться последовательностью девяток. После этого дается определение действительного числа. Затем вводят понятия рационального и иррационального чисел, доказывают, что рациональные числа выражаются периодическими дробями. Затем изучаются вопросы, касающиеся числовых множеств, операций над ними, вводится понятие разделяющего числа числовых множеств. После изучения этих понятий даются определения:

- суммы действительных чисел;
- положительных действительных чисел;
- чисел, обратных положительному числу $\boldsymbol{X}$ (через разделяющее число);
- частного от деления одного действительного числа на другое (через произведение на обратное);
- разности действительных чисел.

Показываются свойства отношения порядка, определяется модуль действительного числа и его свойства, способ перевода периодических десятичных дробей в обыкновенные.

Упражнения, подобранные в пособии направлены, в большинстве своем, на доказательство некоторых утверждений. Естественно, есть вычислительные и логические задачи, решаются прикладные задачи. Итак, в данном учебном пособии изложение ведется на строгом уровне. Задания и упражнения продуманы, предусматривают глубокое и четкое усвоение материала.

8. Учебное пособие авторов С.М. Никольского, М.К. Потапова и др. «Алгебра 7» .

В этом учебнике рациональные числа даются отдельным блоком, где рассматриваются такие вопросы, как:

- обыкновенные дроби;
- конечные десятичные дроби;
- разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь;
- периодическая дробь;
- периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби;
- десятичное разложение обыкновенной дроби;
- десятичное разложение рациональных чисел.

В каждом из пунктов подробно, на примерах разбирается тема, всё необходимое выделено. Далее рассматриваются действительные числа.

Начинается изложение темы иррациональных чисел (интуитивно понимаем, что существуют бесконечные десятичные непериодические дроби). Затем даётся понятие действительного числа (в абстрактной форме - «буквами»), противоположного ему числа, а также модуля действительного числа. Правила сравнения действительных чисел выделены особо. Также особо выделены основные свойства рассматриваемого множества (естественно, без доказательства, но подробно объясняется, что каждое свойство обозначает и как его применять).

Затем вводятся приближения чисел (с недостатком), а также арифметические операции как приближённое значение. После этого рассматривается длина отрезка и координатная ось (устанавливается соответствие между координатной прямой и действительными числами).

Итак, в данном учебном пособии на соответствующем для 7 класса уровне и достаточно полно дается теория действительного числа.

В заключение настоящего параграфа заметим, что пропедевтика понятия бесконечной десятичной дроби в школьном курсе математики практически отсутствует: например, в учебниках Виленкина Н.Я. и Нурк Э.Р. задания подобраны так, что результат от деления чисел всегда конечен (а если бесконечен, значит «не делится»). Учитель должен проводить работу по пропедевтике, чтобы учащиеся в дальнейшем лучше понимали рассматриваемое понятие действительного числа.

1.4 Изучение опыта обучения понятию действительного числа

Важно указать, что в статье «Методические акценты в преподавании темы «Действительные числа» на профильном уровне» Т.В. Ульянова рассматривает особенности введения понятия действительного числа, приводит классификацию задач на свойства делимости, выделяет условные типы задач на сравнение действительных чисел, а так же рассматривает основные методические проблемы преподавания темы и предлагает пути их решения [18].

В исследованиях Е.М. Вечтомова, В.В. Чермных и Д.В. Широкова «Методика изучения систем действительных чисел» авторы рассматривают методику введения и изучения теории действительного числа с помощью порядкового подхода, приводят определения, основные свойства и аксиомы связанные с действительными числами. Кроме того предлагают методы построения системы R, а именно:

а) метод сечений;

б) метод фундаментальных последовательностей;

в) метод бесконечных десятичных дробей.

Авторы определяют метод сечений достаточно наглядный, но при доказательствах, в частности свойств операция сложения и умножения, более трудоемкий в сравнении с методом фундаментальных последовательностей. Второй подход предполагает повторение начал математического анализа, но в тоже время он развивает алгебраический метод конструирования числовых систем. Метод бесконечных десятичных дробей доступен для учащихся, но при строгом обосновании свойств арифметических операций весьма громоздок.

Такие построения действительных чисел возможно лишь в классах с углубленным изучением математики или на факультативном занятии, так как они предполагают высокую степень развития абстрактного мышления.

Отметим, что авторами представлен список вопрос и заданий, способствующий закреплению основных определений и понятий, состоящий из 79 упражнений, которые включают в себя различные формы подачи учащимся условия задачи [8].

В работе В.А. Гусева «Действительные числа», посвященной задачам и упражнениям, автор рассматривает задания, способствующие обобщить и систематизировать методы сравнения действительных чисел, записанных в виде дробей, корней, логарифмов и тригонометрических функций. Сначала представлены методы сравнения вещественных чисел, такие как:

- сравнение действительных чисел по определению;
- сравнение двух десятичных дробей путем сравнения разрядных единиц, входящих в запись числа;
- сравнение двух положительных чисел путем сравнения из отношения с единицей;
- сравнение чисел посредством сравнения их степеней;
- сравнение данных чисел с промежуточным числом;
- метод введения функций;
- использование неравенств Коши.

После описания методов и разбора примеров, авторами представлены задания, с различными формулировками условия, для самостоятельного решения [17].

В статье «Изучение действительных чисел» Г. Глейзер приводит обзорную лекцию по теме «Действительные числа». В своей работе автор описывает введение понятия действительного числа и причины расширения множества рациональных чисел. Так же в лекции указаны некоторые теоремы (без доказательств), помогающие решению задач по исследуемой теме. В конце статьи представлена таблица со всеми видами числовых промежутков, которые часто используются в математическом анализе, а также перечень упражнений на закрепление изучаемых определений и понятий [15].

В работе «Новые доказательства иррациональности чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ или о том, как последние цифры числа помогают решать задачи», Штейнгарц Л.А. рассматривает новые доказательства иррациональности чисел. Новый подход начинается как и традиционное доказательство (с помощью метода от противного, доказываем, что $\sqrt{2}$ = m/n), но с момента, когда мы приходим к равенству $m^2 = 2n^2$, мы начинаем рассматривать последнюю цифру числа m^2, а не говорим о четности обеих частей равенства. В итоге выясняем, что последняя цифра числа m^2 и $2n^2$ может быть равна только 0. Но в этом случае каждое из чисел делиться на 5, что противоречит несократимости дроби. Проделав несколько раз доказательство подобным образом, автор предлагает задачи для самостоятельного решения [14].

Учитель математики И.С. Бабикова, в своей статье «Изучение темы «Числовые множества и понятие действительного числа», предлагает планирование одного из вариантов изучения данной темы. В данном планировании представлены цели, основное содержание учебного материала, оборудование и основные источники информации, а также представлен выбор метода обучения и структура изучения темы. Автор считает, что традиционный подход «имеет ряд недостатков»:

- преобладание словесных методов изложения, способствующие рассеиванию внимания и невозможности его акцентирования на сущности учебного материала;
- большой объем материала, требующий запоминания;
- недостаток дифференцированных заданий и др.

Именно для преодоления этих недостатков в качестве ведущих методов обучения автором были выбраны: информационно-развивающий и проблемно-поисковый. Эти методы ориентированы на обучение не готовым заданиям или алгоритмам действия, а деятельности по самостоятельному приобретению знаний, анализу информации и применению умений в практической деятельности.

Указанная И.С. Бабиковой технология наиболее подходит для профильного уровня обучения. Основным ее достоинством является высокий уровень мотивационной компоненты, реализуемый через самостоятельный поиск решений, через межпредметную интеграцию и практическую направленность задач[5].

В разработанном учителями математики Н.Н. Григорьевой и В.А. Трифановой конспекте по алгебре для учащихся 8-ых классов на тему «Действительные числа» представлена презентация, которую можно использовать на уроке с помощью интерактивной доски. Информация представлена в сжатом объеме, но довольно интересно и красочно. Например, на одном из слайдов с названием «Пифагор и его страшная тайна», рассказывается о том, что открытие иррациональных чисел приписывают пифагорцам. Они считали, что иррациональные числа нарушают гармонию мира, поэтому поклялись, держать свое открытие в тайне. Тот, кто нарушит клятву, должен был умереть. Ученик Пифагора Гиппас не сдержал клятву, и боги его покарали, корабль, на котором плыл Гиппас, потерпел кораблекрушение во время бури, ниспосланной богами.

В конспекте представлено 9 этапов урока, подробно описан ход занятия и прикреплена презентация, состоящая из 12 слайдов. Урок заканчивается стихотворением В.Я. Брюсова «Числа», посвященное вдохновенным мечтателям, которые с помощью царственных чисел совершают великие открытия [16].

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

На основании рассмотренных теоретических основ по теме исследования можно сделать следующие выводы:

1. Исторически сложились три способа определения понятия действительного числа, предложенные одновременно Кантором, Вейерштрассом и Дедекиндом. Тем не менее, в учебниках для средней школы «в чистом виде» ни одна из теорий действительного числа, предложенных данными авторами, не реализовались. Это связано с такими методическими трудностями как: трудность актуализации рассматриваемых понятий; необходимость привлечения понятий, выходящих за рамки школьной программы; статичность исследуемой ситуации. Стоит отметить, что данные подходы могут быть реализованы на факультативных занятиях.

2. Рассмотрено определение системы действительных чисел как некоторого непустого множества, в котором выделены некоторые элементы, задаются некоторые операции и определяются некоторые отношения, можно сказать что:

- множество действительных чисел является коммутативной группой относительно: 0 и операции сложения; 1 и операции умножения.
- множество действительных чисел является коммутативным кольцом с единицей.
- система действительных чисел является полным упорядоченным полем.

3. Представлен анализ школьных учебников, на основе которого можно сделать вывод, что в учебных пособиях для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики понятие действительного числа рассматривается более подробно. Изложение ведется на строгом уровне, задания и упражнения продуманы и предусматривают глубокое и четкое усвоение материала. Более емким определением является определение, представленное в учебнике Н.Я. Виленкина, Г.С. Сурвилло, Алгебра для 8

класса: для школ и классов с углубленным изучением математики: Положительным действительным числом $\boldsymbol{a}$ называют бесконечную десятичную дробь $\boldsymbol{n_0, n_1 n_2\ \dots n_к}$ не оканчивающуюся последовательностью девяток. Число $\boldsymbol{n_0}$называют целой частью числа а = $\mathrm{n}_0,\ \mathrm{n}_{1,}\ \mathrm{n}_2\ \dots \mathrm{n}_{к\ ,}$ а $\mathrm{n}_0, \mathrm{n}_{1,} \mathrm{n}_2$ $\dots \mathrm{n}_к\ \dots$ - его дробной частью.

4. Важно отметить, что введение понятия бесконечной десятичной дроби в школьном курсе математики практически отсутствует, поэтому учитель должен проводить работу по обобщению данного понятия, чтобы учащиеся в дальнейшем лучше понимали рассматриваемое понятие действительного числа.

ГЛАВА II. Методические основы обучения «действительным числам» на уроках математики

2.1 Методическая схема изучения множества действительных чисел

Программа изучения действительных чисел в курсе алгебры 8 класса (ЧОУ «Православная гимназия во имя Кирилла и Мефодия») рассчитана на 20 часов и предполагает изучение понятий квадратное уравнение; приведенное (неприведенное) квадратное уравнение, полное (неполное) квадратное уравнение, корень квадратного уравнения. Также изучаются: решение квадратного уравнения методом разложения на множители, методом выделения полного квадрата; дискриминант; формулы корней квадратного уравнения; параметр; уравнение с параметром (начальные представления); алгоритм решения рационального уравнения; биквадратное уравнение; метод введения новой переменной; рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций; частные случаи формулы корней квадратного уравнения; теорема Виета; разложение квадратного трехчлена на линейные множители; иррациональное уравнение; метод возведения в квадрат [18].

Форма занятий: комбинированные уроки, на которых предполагается изучение теоретического материала и решение задач. Виды уроков: урок – лекция, урок – практикум, урок самостоятельного решения задач (по выбору преподавателя с учетом подготовленности класса). В результате изучения программы данной темы обучающиеся должны: овладеть понятием «квадратные корни» и « «действительные числа», «рациональные числа», « иррациональные числа»; получить общие сведения о действительных числах, а также об арифметическом квадратном корне; научиться находить приближенное значение квадратного корня; изучить функцию $y=\sqrt{x}$, её свойства и график; а также свойства арифметического квадратного корня и свойства квадратных корней.

Теоретический материал по данному курсу разнообразен, является новым для обучающихся, освоение его предполагается при решении системы задач (табл. 2).

Таблица 2. Тематическое планирование

№		АЛГЕБРА	К-во часов	
	Глава II	Квадратные корни	19	
	§ 4	Действительные числа	2	
38	п. 10	Понятие о рациональных числах.	1	
39	п. 11	Понятие об иррациональных числах. Общие сведения о действительных числах	1	Экз ГИА-2014 № 6
	§ 5	Арифметический квадратный корень	5	
40	п. 12	Квадратный корень	1	
41	п. 13	Уравнение $x^2 = a$ Самостоятельная работа	1	
42	п. 14	Понятие о нахождении приближенного значения квадратного корня	1	ГИА Сб/экз Р-1 № 1, Р-3 № 3, Р-4 № 8, Р-7 № 4, Р-8 № 1 МШ № 5 – 03,

				с. 63
43-44	п. 15	Функция $y=\sqrt{x}$, её свойства и график. Тест	2	
	§ 6	Свойства арифметического квадратного корня	4	
45-46	п. 16, 17	Свойства квадратных корней	2	ГИА Сб/экз Р-1 № 7, Р-2 № 1, 4, Р-3 № 8, Р-4 № 4, Р-5 № 8
47	п. 10-17	Контрольная работа № 3 «Квадратные корни»	1	Программа, с. 41
48	п. 10-17	Анализ контрольной работы. Повторение по теме «Квадратные корни»	1	
	§ 7	Применение свойств арифметического квадратного корня	8	
49-54	п. 18, 19	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни Самостоятельная работа	6	ГИА Сб/экз Р-6 № 1, Р-8 № 8, Р-9 № 4, Р-10 № 3
55	п. 18-19	Контрольная работа № 4 «Применение свойств	1	Программа, с. 42

		квадратного корня»		
56	п. 18-20	Анализ контрольной работы. Повторение по теме «Применение свойств квадратного корня»	1	

Не предусматривается, что все упражнения, представленные по каждой теме, должны быть решены на занятии. В зависимости от уровня подготовки обучающихся, можно выбрать из них те, которые будут разобраны на уроке, а остальные - предложить для домашней работы. Эти домашние задания, вопросы и гипотезы могут стать темами мини-исследований старшеклассников.

Анализируя контрольную работу №4, мы выяснили, что в целом, все обучающиеся усвоили материал по этой теме на уровне не ниже удовлетворительного (табл. 3 и 4). Но процент обучающихся, получивших «три», еще достаточно высок, поэтому есть опасения, что они не смогут успешно справиться с заданиями на ОГЭ по этому разделу.

Таблица 3. Результаты контрольной работы по алгебре по теме «Действительные числа»

№ п/п	ФИО	Оценка
1	А София. - 3	4
2	Б Вероника	3
3.	Б Константин	3
4	Б Василий	3
5	В София	5
6	К Анастасия -	4
7	К Надежда	4
8	К Артем	3
9	М Мария - 3	3
10	М Илья	3
11	М Анна	4
12	П Елизавета	4
13	Р Ольга	4
14	С Георгий	4

15	С Ольга	4
16	Ш Михаил	3

Таблица 4. Сводная таблица результатов контрольной работы по алгебре по теме «Действительные числа»

Результаты	«5»	«4»	«3»	«2»
Количество	1	8	7	0
Проценты	6,25%	50%	43,75%	0

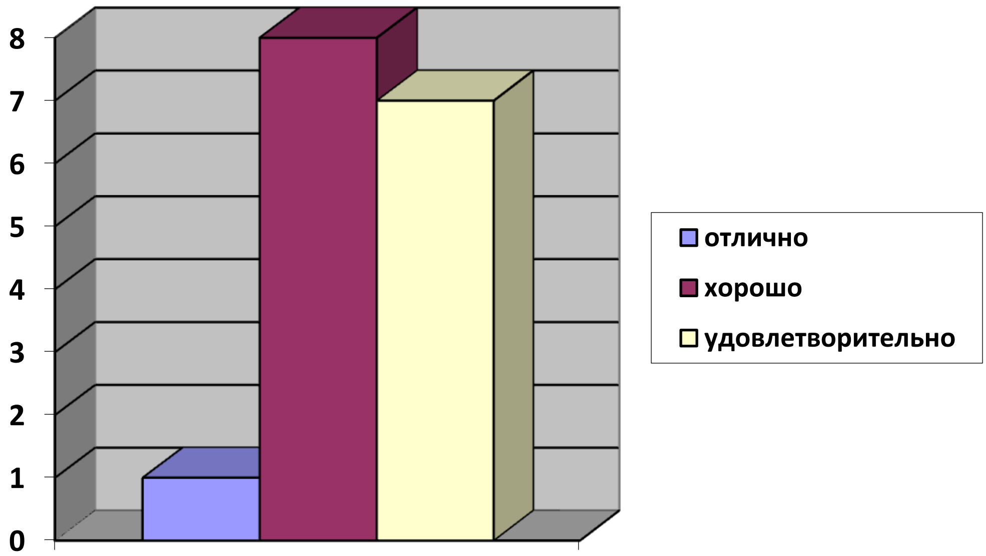


Рис. 1 Результаты контрольной работы по алгебре по теме «Действительные числа»

По результатам учебной деятельности обучающихся было решено разработать систему упражнений для подготовки к ОГЭ.

2.2 Система упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа»

В данной системе упражнений использованы требования, предложенные В.А. Байдаком[6], описанные в девятом параграфе его работы. В ходе анализа кодификатора требований к уровню подготовки обучающихся к

ОГЭ и кодификатору элементов содержания для проведения ОГЭ по математике были выделены два задания, связанные с понятием действительного числа. Задания находятся в первой части экзаменационной работы в модуле «Алгебра» [15] (табл. 5).

Таблица 5. Задания

<table>
<tr><td colspan="2">Задание 1: Числа и вычисления</td></tr>
<tr><td colspan="2">Требования, проверяемые заданиями:
- выполнять, сочетая устные и письменные приёмы, арифметические действия с рациональными числами, сравнивать действительные числа; находить в несложных случаях значения степеней с целыми показателями и корней; вычислять значения числовых выражений; переходить от одной формы записи чисел к другой;
- округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел с недостатком и с избытком, выполнять прикидку результата вычислений, оценку числовых выражений;
- изображать числа точками на координатной прямой.</td></tr>
<tr><td>Элементы содержания, проверяемые заданиями</td><td>Квадратный корень из числа. Нахождение приближенного значения корня</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби</td></tr>
<tr><td>Сравнение действительных чисел</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание 2: Алгебраические выражения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Требования, проверяемые заданиями: - составлять буквенные выражения и формулы по условиям задач, находить значения буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования; - выполнять основные действия со степенями с целыми показателями, с многочленами и алгебраическими дробями; - выполнять тождественные преобразования рациональных выражений; - применять свойства арифметических квадратных корней для преобразования числовых выражений, содержащих квадратные</td></tr>
</table>

корни.	
Элементы содержания, проверяемые заданиями	Алгебраическая дробь. Сокращение дробей
	Рациональные выражения и их преобразования
	Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях

Рассмотрим эти задания:

1. Числа и вычисления

Пример 1: Сколько целых чисел расположено между числами $-\sqrt{80}$ и $-\sqrt{8}$ [19]?

Решение:

1) $-\sqrt{80}$ > -9

2) $-\sqrt{8}$ > - 3

3) тогда получаем: -8, -7, -6, -5, -4, -3

Ответ: 6.

Пример 2: Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой А?

1)$\sqrt{2}$;   2) $\sqrt{3}$;   2) $\sqrt{7}$;   2) $\sqrt{11}$.

Решение:

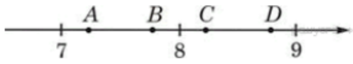
Возведем в квадрат числа $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$.

$(\sqrt{2})^2 = 2$; $(\sqrt{2})^2 = 3$; $(\sqrt{2})^2 = 7$; $(\sqrt{2})^2 = 11$.

Число A^2 лежит между числами $1^2 = \boldsymbol{1}$ и $2^2 = 4$ и ближе к числу 2^2. Поэтому точкой ***A*** отмечено число $\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

Пример 3: Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$. Какая это точка [19]?



1) точка A; 2) точка B; 3) точка C; 4) точка D.

Решение:

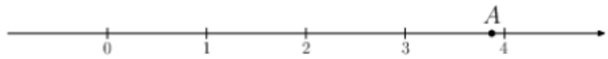
Возведем в квадрат числа $(\sqrt{77})^2 = 77$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$

Число 77 лежит между числами 64 и 81 и находится ближе к числу 81, поэтому $\sqrt{77}$соответствует точке D.

Ответ: 4.

Задания:

1) Сколько целых чисел расположено между числами $\sqrt{33}$ и $\sqrt{3}$?
2) Сколько целых чисел расположено между числами $\sqrt{60}$ и $\sqrt{20}$?
3) Сколько целых чисел расположено между числами $\sqrt{92}$ и $\sqrt{29}$?
4) Сколько целых чисел расположено между числами $\sqrt{24}$ и $\sqrt{32}$?:
5) Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A?



1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{15}$.

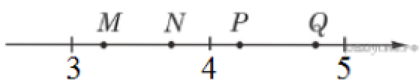
6) Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A?

1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{13}$.

7) Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A?

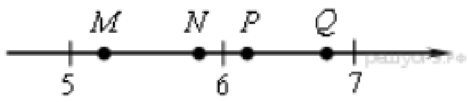
1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{8}$; 3) $\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{13}$.

8) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{14}$. Какая это точка?



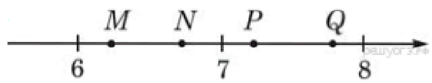
1) точка M; 2) точка N; 3) точка P; 4) точка Q.

9) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{37}$. Какая это точка?



1) точка M; 2) точка N; 3) точка P; 4) точка Q.

10) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{45}$. Какая это точка?



1) точка M; 2) точка N; 3) точка P; 4) точка Q.

2. Алгебраические выражения

Пример 1: Укажите наибольшее из следующих чисел:

1)$\sqrt{18}$; 2) $2\sqrt{6}$;; 3) 5; 4) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$;.

Решение: Возведем в квадрат числа $\sqrt{18}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{5}+\sqrt{6}$;

$(\sqrt{18})^2 = 18$; $(2\sqrt{6})^2 = 24$; $5^2 = 25$; $(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2 = 11 + 2\sqrt{30}$.

Поскольку $\sqrt{30}< 6$, $2\sqrt{30} < 12$, имеем: $11 + 2\sqrt{30}< 23$. Таким образом, наибольшее число 5. Ответ: 3.

Пример 2: Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; 5,5.

1) $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; 5,5; 2)5,5; $3\sqrt{3}$; $\sqrt{30}$

3) $3\sqrt{3}$; 5,5; $\sqrt{30}$; 4) $3\sqrt{3}$; $\sqrt{30}$; 5,5.

Решение: Возведем каждое из чисел в квадрат

$$(\sqrt{30})^2 = 30; (3\sqrt{3})^2 = 27; (5{,}5)^2 = 30{,}25.$$

Сравним квадраты заданных чисел: $(3\sqrt{3})^2 < (\sqrt{30})^2 < (5{,}5)^2$**.**

Следовательно, $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; 5,5.

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{(2\sqrt{6})^2}{36}$.

1) $\frac{2}{3}$ **;** 2) $\frac{1}{3}$; 3)2 ; 4)4.

Решение: Последовательно получаем:

$$\frac{(2\sqrt{6})^2}{36} = \frac{2^2(2\sqrt{6})^2}{36} = \frac{4*6}{6*6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ответ: 1.

Задания:

1) Укажите наибольшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{35}$; 2) $2\sqrt{7}$; 3) 6; 4) $\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

2) Укажите наименьшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{19}$; 2) $3\sqrt{7}$; 3) 6; 4)$2\sqrt{7}+\sqrt{8}$.

3) Укажите наибольшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{15}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) 3; 4)$\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

4) Укажите наименьшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{22}$; 2) $2\sqrt{6}$; 3)$\sqrt{6}^2$; 4)$\frac{\sqrt{111}}{\sqrt{3}}$.

5) Расположите в порядке возрастания числа $2\sqrt{5}; 5\sqrt{2}; 6$.

1) $2\sqrt{5}; 5\sqrt{2}; 6$; 2) 6; $2\sqrt{5}$; $5\sqrt{2}$;

3) $5\sqrt{2}$; 6; $2\sqrt{5}$;4) $2\sqrt{5}$; 5; $5\sqrt{2}$.

6) Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{91}$; 9,5 $2\sqrt{23}$

1) 9,5; $\sqrt{91}$; $2\sqrt{23}$; 2) $2\sqrt{23}$; $\sqrt{91}$;9,5;

3) 9,5; $2\sqrt{23}$; $\sqrt{91}$; 4) $\sqrt{91}$;9,5; $2\sqrt{23}$.

7) Расположите в порядке возрастания числа: $2\sqrt{5}$; $\sqrt{19}$; 4,5

1) $2\sqrt{5}$; $\sqrt{19}$; 4,5; 2) $\sqrt{19}$;4,5; $2\sqrt{5}$;;

3) $\sqrt{19}$; $2\sqrt{5}$; 4,5; 4) 4,5; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{19}$.

8) Расположите в порядке возрастания $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$; 3,5

1) $2\sqrt{2}$;3,5; $\sqrt{10}$; 2) 3,5; $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$;

3) $2\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; 3,5; 4) $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$; 3,5.

9) Найдите значение выражения $\frac{36}{(2\sqrt{6})^2}$

1) $\frac{3}{2}$ 2) 3 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

10) Найдите значение выражения $\frac{(4\sqrt{3})^2}{48}$

$$1)\ \frac{1}{4} \quad 2)\ 27 \quad 3)\ \frac{27}{4} \quad 4)\ 1$$

11) Найдите значение выражения $\frac{(6\sqrt{3})^2}{30}$

$$1)\ \frac{3}{5} \quad 2)\ \frac{81}{5} \qquad 3)\ \frac{18}{5} \quad 4)\ \frac{4862}{5}$$

12) Найдите значение выражения $\frac{(4\sqrt{6})^2}{84}$

$$1)\ \frac{432}{7}; \quad 2)\ \frac{8}{7} \quad ; \quad 3)\ \frac{1728}{7} \quad ; \quad 4)\ \frac{2}{7} \quad .$$

2.3 Реализация методических рекомендаций по теме «Действительные числа» на уроках математики

В рамках исследования была проведена диагностика результатов на базе ЧОУ «Православная гимназия во имя Кирилла и Мефодия» в 8 классе. *Целью диагностики* явилось выявление уровня подготовки учеников по теме «Действительные числа».

Заметим, что большинство справились с заданиями лучше остальных испытуемых. В соответствии с предложенной программой формирования понятия «действительное число» были проведены уроки. На каждом этапе усвоения понятия учащимся предлагались задачи соответствующего уровня. Для проверки результатов освоения темы обучающимся была проведена итоговая контрольная работа, по данному разделу. Диаграмма показывает, что с помощью дидактических материалов мы активизировали школьников, у них повысился интерес к математике, желание решать всё новые и новые задания. Таким образом, при систематическом использовании специальных методических средств по изучению темы «Действительные числа» на уроках математики повышается успеваемость учеников (табл. 6, рис. 2).

Анализ результаты итоговой контрольной работы по математике 8

класса

Класс: 8

Учитель: Инна Владимировна Ветренко

Форма проведения: Комбинированная контрольная работа

По списку учащихся: 16

Выполняли работу: 16

Отсутствовало:0

Цель работы: 1) проверить ЗУН учащихся по ключевым темам программы;

2) выявить уровень усвоения знаний по математике, предусмотренных программой;

3) определить уровень готовности учащихся к последующему обучению.

В личностном направлении: способность к решению задач, рассуждений; понимать смысл поставленной задачи, осуществлять перевод с естественного языка на математический, и, наоборот.

В метапредметном направлении: умение планировать свою деятельность при решении учебных математических задач, видеть различные стратегии решения задач, осознанно выбирать способ решения; применение приемов самоконтроля; умение видеть математическую задачу в несложных практических ситуациях.

В предметном направлении: владение навыками вычислений с арифметическим квадратным корнем, вычисления площадей.

Таблица 6. Результаты итоговой диагностики.

Результаты	«5»	«4»	«3»	«2»
Количество	3	9	4	0
Проценты	18,75%	56,25%	25%	

Списочный состав учащихся справившихся на отлично: К Анастасия, В София, Р Ольга.

Процент успеваемости: 100%

Качество знаний: 75%

Средний балл: 3,8.

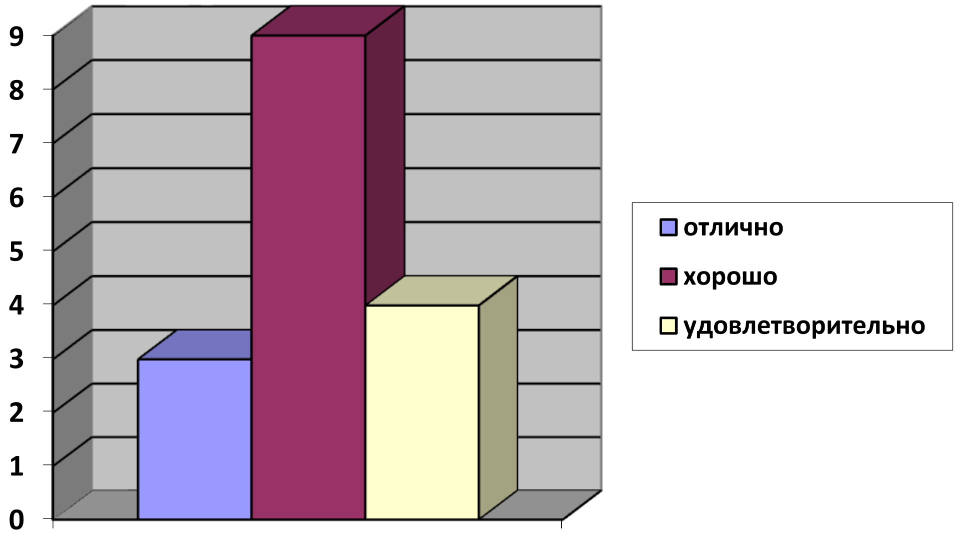


Рис. 2 Результаты итоговой диагностики.

Типичные ошибки, допущенные учащимися:

- в применении формул сокращённого умножения и простейших преобразований буквенных выражений;
- были допущены вычислительные ошибки;
- при выполнении арифметических действий с алгебраическими дробями;
- вычислительные ошибки при выполнении действий с рациональными числами.

Система мер по выравниванию ситуации:

- Отработка вычислительных навыков с натуральными числами и дробями с помощью тренажеров и дополнительных карточек. Индивидуальные занятия с отстающими учениками.
- Отработка навыков составления уравнений по задачам и решения линейных уравнений на дополнительных занятиях, уроках, используя карточки, тренажеры и тестовые задания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исторически сложились три способа определения понятия действительного числа, предложенные одновременно Кантором, Вейерштрассом и Дедекиндом, но в учебниках для средней школы ни один из этих способов не реализовался из-за трудности актуализации рассматриваемых понятий и необходимости привлечения понятий, выходящих за рамки школьной программы.

Рассмотрено определение системы действительных чисел как некоторого непустого множества, в котором выделены некоторые элементы, задаются некоторые операции и определяются некоторые отношения, можно сказать что: множество действительных чисел является коммутативной группой относительно: 0 и операции сложения; 1 и операции умножения; множество действительных чисел является коммутативным кольцом с единицей; система действительных чисел является полным упорядоченным полем.

Представлен анализ школьных учебников, на основе которого можно сделать вывод, что в учебных пособиях для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики понятие действительного числа рассматривается более подробно. Изложение ведется на строгом уровне, задания и упражнения продуманы и предусматривают глубокое и четкое усвоение материала. Более емким определением является определение, представленное в учебнике Н.Я. Виленкина, Г.С. Сурвилло, Алгебра для 8 класса: для школ и классов с углубленным изучением математики: Положительным действительным числом $\boldsymbol{a}$ называют бесконечную десятичную дробь $n_0,n_1n_2 \ldots n_к$ не оканчивающуюся последовательностью девяток. Число n_0 называют целой частью числа a = $n_0,\ n_{1,}\ n_2 \ldots n_к$ а $n_0,n_{1,}n_2 \ldots n_к \ldots$ - его дробной частью.

Также в работе представлен анализ школьных учебников, основываясь на который можно сделать вывод, что в учебных пособиях для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, понятие действительного числа рассматривается более подробно.

Рассмотрены основные методические особенности введения понятия действительного числа в виде планов уроков, а также представлена система упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа»

Таким образом, все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены. Данная работа может быть использована как педагогами, так и учащимися при подготовке к написанию ЕГЭ по математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы [Текст]/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; Под ред. А.Н. Тихонова. - М.: Просвещение, 2012. - 255 с.

2. Алфутова, А.Б. Алгебра и теория чисел для математических школ [Текст]/ А.Б. Алфутова, А.В. Устинов. - М.: МЦНМО, 2003. - 70 с.

6. Байдак В.А. Теория и методика обучения математики: Учебное пособие [Текст] / В.А. Байдак. - М.: Флинта, 2011. - 264 с.

7. Бурмистрова Т.А., М.:Рабочая программа по математике 8 класс Просвещение, 2009 г.

8. Виленкин, Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 класс. Углубленное изучение [Текст]/ Н.Я.Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шеарцбурда. - М.: Просвещение, 2014. - 335 с.

12. Виноградова Л.А. Методика преподавания математики в средней школе: Учебное пособие [Текст] / Л.А. Виноградова. - М.: Феникс, 2005. -252 с.

13. Глейзер Г. Изучение действительных чисел. Лекция 3 [Текст] / Г.Глейзер // Еженедельное приложение к газете «Первое сентября». - 1995. - №3 (96). - С. 15-16.

14. Задачи по математике: алгебра и начала анализа [Текст]/ М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой. - М.: Высшая школа, 2004. - 296 с.

15. Колмогоров А. Н., Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10-11 классов средней школы [Текст]/ А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. - М: Просвещение, 2011.- 384 с.

16. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]/ Ю.М. Колягин. - М.: Просвещение, 1999. - 462 с.

17. Крупич В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач [Текст] / В.И. Крупич. - М: Прометей, 1995. - 165 с.

18. Ларин, С.В. Числовые системы [Текст]/ С.В. Ларин. - М.: Академия, 2001. - 160 с.

19. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; Под ред. С.А. Теляковского. - М.: Просвещение, 2016. - 287 с.

20. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов[Текст]/ Под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. - М.: Дрофа, 2005. - 415 с.

21. Мордкович А.Г. Алгебра-8. Учебник [Текст]/ А.Г. Мордкович. Т.Н. Мишустина, А.Л. Александрова - М.: Мнемозина, 2015. - 214 с.

22. Никольский С.М. Алгебра. 7 [Текст]/ С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. - М.: Просвещение, 2013. - 287 с.

23. Рыженко Н. Г., Болотюк Л. А. Сборник уровневых дифференцированных задач по алгебре. 8-9 классы [Текст] / Н.Г. Рыженко, Л.А. Болотюк. - Санкт-Петербург: ЛИСС, 2004. - 84 с.

24. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие [Текст] / Г.И Саранцев. - М.: Просвещение, 2002. - 223 с.

25. Ульянова, Т.В. Методические акценты в преподавании темы «Действительные числа» на профильном уровне [Текст] / Т.В. Ульянова // Омский научный вестник. - 2011. - №4 (99). С. 202-204.

26. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: Учебное пособие [Текст] / Л.М. Фридман. - М.:Едиториал УРСС, 2005. - 248 с.

27. Штейнгарц Л.А. Новые доказательства иррациональности чисел //2и//5 или о том, как последние цифры числа помогают решать задачи [Текст] / Л.А. Штейнгарц // Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе». - 2012. - №9. С. 62-66.

Приложение 1

Конспект урока «Рациональные числа»

Цели урока:

Создать условия, при которых ученик:

- расширит представления о числе, сформирует понятие «рациональное число»;

- систематизирует знания о числовых множествах;

- приобретет навыки перевода рациональных чисел в десятичную (конечную или бесконечную) дробь; бесконечных десятичных периодических дробей в рациональные числа; различные способы перевода бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь;

- приобретет умения работать в парах,

- разовьет навыки самостоятельной работы, умения анализировать, сравнивать, внимательно выполнять необходимые действия.

В результате ученик:

- знает, как определить вид числа, его принадлежность к числовым множествам;

- умеет правильно пользоваться математической символикой в процессе выполнения заданий;

- умеет представлять рациональное число в виде конечной или бесконечной периодической дроби;

- сможет научиться представлять бесконечную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби;

Организационный этап, повторение ранее изученного.

Приветствие, проверка готовности к уроку, работа в тетради – число, тема урока (слайд).

Учащиеся работают на трех уровнях сложности. Чтобы было проще организовать работу, каждый знает свой «вариант» - уровень.

Ученики получают задание на 3 варианта (от самого простого –

базового, потом средний уровень и самый сложный).

как вариант: Тест проходит в режиме on-line по ссылке: http://onlinetestpad.com/ru-ru/Go/Racionalnye-chisla-8-klass-18935/Default.aspx

Учащиеся сидят по рядам в соответствии с вариантом, но у них всегда есть право выбора при проверочных работах. Такая форма рассадки хороша тем, что легко организовать работу в парах «равноценных» учеников. Ученики 1 варианта (самый легкий – базовый) работают с учителем - игра «Верю – не верю». У учащихся на бланках распечатаны вопросы. Они точно такие же, как у учителя, но напечатаны вразброс и на отдельных полосках. Задача учеников – найти тот вопрос, который сейчас задал учитель и ответить на него прямо на этом листе. Такая форма объясняется тем, что слабые ученики, как правило – это кинестетики, поэтому для них и добавляется движение во время работы. Учитель зачитывает вопросы в следующем порядке:

Верите ли вы:

1) что число -5 - натуральное?
2) что натуральные числа использовали для счета предметов?
3) что самое маленькое натуральное число – это 0?
4) что любое натуральное число (например, 4) можно записать в виде обыкновенной дроби?
5) что дроби появились, когда люди стали делить между собой имущество, измерять земельные участки, исчислять время?
6) что $\frac{13}{2}$ - это натуральное число?
7) что любое целое число (например, -67) можно записать в виде десятичной дроби?
8) что знак $\in$ означает «принадлежит»?
9) что запись «$(3;5) \subset (2;9)$» означает «промежуток от 3 до пяти является частью промежутка от 2 до 9»?
10) что утверждение «$2 \notin Z$» - верное?

11) что -7 > 0?

12) что знак $\not\subset$ означает «является частью»?

13) что $\frac{2}{7}$ - это дробь?

14) что дробь и рациональное число – это одно и то же?

15) что множество целых чисел – самое маленькое?

Выполнение тестов заканчивается в одно время для всех учащихся (не более 10 минут с учетом орг. момента). 2 и 3 варианты не запускают проверку результатов.

2. Основной этап урока с сообщение нового блока теории и проверки имеющихся знаний.

Далее учитель рассказывает блок теории, в это время ученики должны в это время откорректировать свои ответы или убедиться в их правильности.

Блок теории – на слайдах и к ним комментарии учителя:

После этого дается время ученикам последний раз просмотреть свои ответы и проверить результаты. Для 1 варианта на слайде появляются правильные ответы. После этого еще раз вопрос: остались ли неправильные ответы и они обсуждаются вслух вместе со всеми учениками.

Следующий блок теории учащиеся фиксируют в тетрадях одновременно с объяснением учителя. Демонстрация идет на слайдах с краткими пояснениями.

3. Рефлексивно-оценочный этап

Теперь необходимо самостоятельно или с помощью соседа по парте или учителя попробовать воспроизвести алгоритмы на конкретных примерах. Работа в парах, по необходимости, с привлечением учителя. Задания для каждого варианта составлены по суммирующему принципу – чем больше решишь, тем выше отметка.

«НА 3»:

1. Определите какое множество является подмножеством множества [8;21]

а) (6;21] б) (9;20) в) [6;21] г) (6;8)

2. Для записи используется математический символ

а) $\subset$ б) $\in$ в) $\cap$ г) $\emptyset$

3. Отметьте числа -72; 6; -35,13; 106,4 на координатной оси

4. Соотнесите обыкновенные дроби с равными им десятичными.

А. $\frac{5}{8}$ Б. $\frac{3}{25}$ В. $\frac{1}{2}$ Г. $\frac{1}{50}$

1) 0,5 2) 0,02 3) 0,12 4) 0,625

5. Сравните числа:

а) -5,7 и 0,334 б) 5,(7) и 5, 773

«НА 4»:

6. Переведите в бесконечную периодическую десятичную дробь число $\frac{7}{11}$

8. Представьте в виде обыкновенной дроби число 1,(72)

«НА 5»:

9. Представьте в виде обыкновенной дроби число 2,9(12)

Работы сдаются учителю. Самопроверка будет осуществлена на следующем уроке после выполнения домашнего задания и повторения теории. Работа обучающего характера, поэтому важна не отметка, а понимание материала.

Подведем итог урока. Какие цели ставились в начале урока? (слайд). В тетради запишите то, в чем вы уверены, что научились делать

Давайте проговорим то, что вы написали:

- знаем, что все числа объединены во множество рациональных чисел;

- умеем пользоваться символикой и определять принадлежность чисел и промежутков;

- умеем любое число представлять в виде дроби $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$, где $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ или в виде бесконечной периодической дроби;

- получили возможность научиться переводить бесконечные периодические дроби в обыкновенные двумя способами, заметили, что второй способ трудно формулировать, но его применение ускорит получение результата).

4. Домашнее задание (презентация и слайды домашнего задания вывешиваются в специально для этого созданной группе в Контакте или фотографируются учащимися).

1. Дана фраза: «28 - рациональное число». Как можно записать иначе?

а) $28 \in N$ б) $28 \in Q$ в) $28 \in Z$

2. Вычисли значение дроби $\frac{a}{bc} - d$, если a = 13; b = 36; c = 0,9; d=1,76;

3. Утверждение «$-17 \in (-17;5]$» является: а) ложным; б) истинным

4. Выясни при каком наименьшем целом значение p число 3p+15p+2 является целым

5. Вычислить значение выражения: $\left(1,08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}-0,25:\frac{1}{3}+0,(3);$

Приложение 2

Алгебра

8 класс

Тема**: «Общие представления о действительных числах»**

Цели урока: познакомить учащихся с видами чисел; расширить понятие числа; систематизировать сведения о рациональных числах, дать представление об иррациональном числе, сформировать представление о действительных числах.

Тип урока: урок-лекция.

Методы урока: словесные, наглядные.

Структура урока:

1. Организационный момент.
2. Актуализация знаний учащихся о числах.
3. Изучение и закрепление нового материала.
4. Рефлексия. Домашнее задание.

Ход урока

1. Организационный момент.

2. Актуализация знаний учащихся о числах.

Учитель: Изучая математику, мы осваиваем одно из ее основных понятий – число. Это понятие связывает науку математика с жизнью.

– Как вы думаете, когда и почему зародилось понятие числа? (Ответы учащихся)

Учитель: Действительно, понятие числа зародилось в глубокой древности. Число стало необходимым для выполнения счета.

– Какие числа вы знаете? (Учащиеся отвечают: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.)

– Как они называются? (Натуральные.)

– Для чего применяют эти числа? (Для выполнения счета.)

– Какое число не является натуральным? (Нуль.)

3.Изучение нового материала.

Учитель: Все числа, которые вы изучаете в школе, называются действительными числами. Они образуют множество действительных чисел, которые принято обозначать латинской буквой **R.**

В свою очередь все действительные числа можно разделить на 2 группы: рациональные числа и иррациональные числа.

Рациональные числа – это такие числа, которые можно записать в виде обыкновенной дроби

Иррациональные числа выглядят так: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, $\frac{22}{7}$.

Разница между ними состоит в том, что рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби, например**,** $\mathbf{\frac{3}{2} = 1{,}5}$ **,** или бесконечной, но периодической десятичной дробью, например**,** $\mathbf{\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots.6 = 0{,}(6)}$, или целым числом, например**,** $\mathbf{\sqrt{64} = 8}$ **.**

Иррациональное число так записать нельзя, например, $\frac{22}{7} = 3{,}142857143\ldots$. Как вы видите, цифры после запятой не повторяются.

Рациональные числа, в свою очередь, можно разделить на 2 вида – это целые числа и дробные числа. Дробные числа – это числа, которые можно

записать в виде обыкновенной дроби, например, Целые же числа можно разделить еще на несколько групп: отрицательные целые числа, нуль и положительные (натуральные) целые числа. На числовой оси (Ох) между целыми числами будут находиться дробные иррациональные числа. Соответствие между действительными числами и точками числовой оси является взаимооднозначным. А все вместе они будут представлять собой **множество действительных чисел.**

3. Закрепление:

1. Сегодня мы познакомились с различными видами чисел. Теперь ответьте мне на вопросы. Рассмотрим несколько примеров:

1) Дан ряд чисел $\sqrt{9}, \sqrt{11}, \sqrt{8}, -\sqrt{6}, -\sqrt{81}, \sqrt{0}, \sqrt{\frac{121}{169}}$. Какие из данных чисел являются рациональными, а какие иррациональными?

2) Нужно представить дробь в виде десятичной дроби.
3) Сравнить: 1, (43) 1,43.
4) Представим периодическую дробь в виде обыкновенной. 0, (8), 0, 48(3).

Для такого случая существует так называемое мнемоническое правило, и заключается оно в следующем: бесконечная периодическая дробь равна обыкновенной дроби, в числители которой стоит разность двух чисел: первое число состоит из всех цифр, не включая запятые и скобки, вычитаемым является число, стоящее до периода. В знаменателе мы ставим столько девяток, сколько цифр в периоде и к девятке приписываем справа столько нолей, сколько цифр между запятой и периодом.

2. Какие числа являются целыми? (Натуральные, нуль, отрицательные.)
3. Для чего служат натуральные числа? (Для счета.)
4. Какие числа называют иррациональными? (Десятичная бесконечная непериодическая дробь, которую нельзя представить в виде рационального числа.)
5. Какие числа называют рациональными? (Числа, которые можно представить в виде дроби, где числитель – целое число, знаменатель – натуральное число.)
6. Привести пример целого числа; рационального числа; иррационального числа.

4. Итог урока.

Рефлексия:

1. Какой момент на уроке был самым трудным?

2. Что вы сегодня нового узнали для себя?

Домашнее задание: № 3, № 4