ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 462, № 1, с. 21–25

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ДВОЙНОГО СЛОЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2015 г. А. П. Солдатов

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 24.09.2014 г.

Поступило 13.11.2014 г.

DOI: 10.7868/S086956521513006X

1. Система Ламе. В плоской анизотропной теории упругости [1] вектор смещения $u = (u_1, u_2)$ удовлетворяет эллиптической системе Ламе

$$a_{11}u_{xx} + (a_{12} + a_{21})u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0 \quad (1)$$

с матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы α_j этих матриц, называемые модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы третьего порядка

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Из (1) видно, что соотношения $v_x = -(a_{21}u_x + a_{22}u_y)$, $v_y = a_{11}u_x + a_{12}u_y$ определяют вектор-функцию $v = (v_1, v_2)$, которая называется сопряженной к решению u системы Ламе. Закон Гука заключается в том, что столбцы $\sigma_{(1)}$ и $\sigma_{(2)}$ тензора напряжений σ выражаются через частные производные функции v по формулам $\sigma_{(1)} = v_y$, $\sigma_{(2)} = -v_x$. Заметим, что функция v постоянна тогда и только тогда, когда u является многочленом первой степени вида

$$u_1(x, y) = \lambda_1 - \lambda_0 y, \quad u_2(x, y) = \lambda_1 + \lambda_0 x.$$

Решения u системы Ламе этого типа называем тривиальными.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: soldatov48@gmail.com

Система Ламе (1) определяется матричным квадратным трехчленом

$$p(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2,$$

или в явном виде

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

с многочленами $p_1(z) = \alpha_1 + 2\alpha_6 z + \alpha_3 z^2$, $p_2(z) = \alpha_3 + 2\alpha_5 z + \alpha_2 z^2$, $p_3(z) = \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5 z^2$.

В силу эллиптичности характеристический многочлен $\chi = p_1 p_2 - p_3^2$ имеет в верхней полуплоскости два корня ν_1, ν_2, возможно совпадающие. Случаи $\nu_1 \neq \nu_2$ простых корней и $\nu_j = \nu$ одного кратного корня указываем обозначениями, соответственно, (i) и (ii). В дальнейшем существенную роль будут играть не сами корни ν, а их сумма и произведение, которые обозначим, соответственно, $s = \nu_1 + \nu_2$ и $t = \nu_1\nu_2$ (в случае (ii) следует положить $s = 2\nu$, $t = \nu^2$).

Если многочлен $p_3 = 0$, т.е. $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, система (1) распадается на два уравнения $\alpha_1 u_{1,xx} + \alpha_3 u_{1,yy} = 0$ и $\alpha_3 u_{2,xx} + \alpha_2 u_{2,yy} = 0$, а корни многочлена χ находятся из уравнений $p_j(\nu_j) = 0$, т.е. $\nu_1 = i\sqrt{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3}}$ и $\nu_2 = i\sqrt{\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}}$. Этот случай не представляет интереса и в дальнейшем исключается из рассмотрений.

Обозначим $\mathscr{A}$ класс всех положительно определенных матриц вида (2), для которых $p_3 \neq 0$. В этом классе выделим подмножества $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$, которые определяются условием линейной независимости многочленов, соответственно, p_2, p_3 и p_1, p_3, фигурирующих в (3). Все множество $\mathscr{A}$ совпадает с объединением этих подмножеств. Вне пересечения $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ модули упругости подчинены неравенству $\alpha_3^2 < \alpha_1\alpha_2$. Если $\alpha \notin \mathscr{A}_j$, то корни многочлена χ различны и находятся из уравнений

$(\alpha_2^2 p_1 - \alpha_5^2 p_2)(\nu_1) = 0, p_2(\nu_2) = 0$ при $j = 1$ и уравнений $p_1(\nu_1) = 0$, $(\alpha_3^2 p_2 - \alpha_5^2 p_1)(\nu_2) = 0$ при $j = 2$.

Упругая среда называется ортотропной, если $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$, в этом случае координатные прямые служат осями симметрии упругой среды и для многочленов (3) имеем более простые выражения $p_1(z) = \alpha_1 + \alpha_3 z^2$, $p_2(z) = \alpha_3 + \alpha_2 z^2$ и $p_3(z) = (\alpha_3 + \alpha_4)z$. В частности, в ортотропной среде либо $\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ (напомним, что случай $p_3 = 0$ исключается). Поскольку при $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$ характеристическое уравнение $\chi = 0$ биквадратно, его корни ν в верхней полуплоскости можно выразить явно с помощью положительных чисел ρ и ρ_0, определяемых равенствами

$$\rho^2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad \rho_0^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 + 2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3}. \quad (4)$$

Заметим, что числа $\rho_0^2 - 4\rho^2$ и $\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3$ одного знака. В обозначениях (4) для суммы и произведения корней имеют место единые выражения $s = i\rho_0$, $t = -\rho^2$.

Ортотропная среда называется изотропной, если дополнительно выполнены соотношения $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4$. В этом случае $\alpha_1 > \alpha_3$, так что $\kappa = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} > 1$. В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет кратный корень $\nu = i$.

Исходя из двух типов корней характеристического уравнения, положим

$$\text{(i) } J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для любого* $\alpha \in \mathcal{A}_j$, $j = 1, 2$, *существует обратимая матрица* $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, *которая непрерывно зависит от* α *и удовлетворяет матричному уравнению* $a_{11}b + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2 = 0$, *причем связанная с ней матрица* $c = -(a_{21}b + a_{22}bJ)$ *также обратима. В случае* $\alpha \in \mathcal{A}_0$ *можно положить* $b = 1$.

Если матрица $\tilde{b}$ *также является решением этого уравнения, то* $\tilde{b} = bd$, *где матрица* d *коммутирует с* J.

2. Первая и вторая краевые задачи в классах Харди. Рассмотрим систему Ламе в области D комплексной плоскости, ограниченной ляпуновским контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Эта область может быть как конечной (т.е. лежать внутри некоторого круга), так и бесконечной (т.е. содержать внешность некоторого круга). В случае бесконечной области все простые контуры, составляющие Γ, равноправны. Если же область D конечна, то один из этих контуров охватывает все остальные, его называем внешним контуром. Удобно тип области D указывать сигнатурой $\kappa(D)$, принимающей значения 1, если эта область конечна, и 0 в противном случае. В дальнейшем в случае $\kappa(D) = 0$ бесконечной области на градиент решения u системы (1) накладывается условие $|u_x(z)| + |u_y(z)| = O(|z|^{-2})$ при $z \longrightarrow \infty$, в частности, существует предел $u(\infty) = \lim u(z)$ на бесконечности. Из этого условия следует, что в случае бесконечной области тривиальными решениями могут быть только постоянные векторы.

Как известно [2], класс Харди $h^p(D)$ гармонических функций вводится аналогично случаю аналитических функций. Этот класс можно также ввести следующим эквивалентным способом. Условимся под диффеоморфным граничным вложением $\omega: K \to \overline{D}$ квадрата $K = \{(r, s), 0 \le r, s \le 1\}$ в замкнутую область $\overline{D}$ понимать взаимно однозначную функцию $\omega \in C^{1,\nu}(K)$ со значениями в $\overline{D} \subseteq \mathbb{C}$, для которой векторы ω_r и ω_s всюду линейно независимы и $\omega(0, s) \in \Gamma$, $\omega(r, s) \in D$ при $0 < r \le 1$. Тогда пространство $h^p(D)$ можно определить как класс всех гармонических функций $u(z)$, $z \in D$, которые допускают почти всюду на Γ угловые предельные значения u^+ и удовлетворяют условию

$$\sup_{0 < r \le 1} \int_0^1 |(u \circ \omega)(r, s)|^p ds < \infty$$

для любого диффеоморфного граничного вложения $\omega: K \to \overline{D}$. Последнее условие влечет $u^+ \in L^p(\Gamma)$, причем пространство h^p банахово относительно нормы $|u| = |u^+|_{L^p}$.

Это определение можно распространить на любые функции $w \in C(D)$, его ниже используем для решений $w = u$ системы Ламе и сопряженных к ним функций $w = v$. Пусть граница Γ области D состоит из простых контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем в случае $\kappa(D) = 1$ контур Γ_m является внешним. Тогда при $m \ge 2$ функция v, сопряженная к решению u системы Ламе, вообще говоря, будет многозначной, оставаясь однозначной для своих частных производных. При обходе контуров Γ_j, $1 \le j \le m - 1$, она получает конечные приращения. Можно выделить такое конечномерное пространство $U(D) \subseteq C^\infty(\overline{D})$ размерности $2(m - 1)$ решений u_0 системы Ламе, что сопряженные к ним функции многозначны и любое решение u этой системы единственным образом представляется в виде $u = u_0 + u_1$, $u_0 \in U(D)$, где функция, сопряженная к u_1, однозначна. Совершенно аналогично обстоит дело и с однозначными функциями, сопряженными к многозначным решениям системы Ламе. Соответствующее пространство для этих функций обозначаем $V(D)$. С помощью указанных разложений пространство Харди h^p естественным образом распространяется и на многозначные функции.

Теорема 1. *Пространство $h^p(D)$, $p > 1$, решений $w = u$ системы Ламе и аналогичное пространство сопряженных к ним функций $w = v$ банахово относительно нормы $|w| = |w|_{L^p}$, причем $u \in h^p$ равносильно $v \in h^p$.*

Как известно [3], основные краевые условия для системы Ламе состоят в задании на граничном контуре либо вектора смещений $u^+ = f$ (задача Дирихле), либо нормальной компоненты $\sigma^+ n = \sigma^+_{(1)} n_1 + \sigma^+_{(2)} n_2$ тензора напряжения σ, где $n = n_1 + in_2$ есть единичная внешняя нормаль на Γ (задача Неймана). Согласно закону Гука последнее краевое условие можем записать в форме $(v^+)' = g$ для касательной производной граничного значения v^+ сопряженной функции.

С точки зрения общих сильно эллиптических систем вопросы разрешимости задач Дирихле и Неймана для системы Ламе в гёльдеровских и соболевских пространствах хорошо изучены [4]. В частности, задача Дирихле однозначно разрешима в этих пространствах, а задача Неймана фредгольмова индекса нуль. Более точно, все решения однородной задачи тривиальны, а условие ортогональности

$$\int_\Gamma g u_0^+ |dt| = 0 \tag{5}$$

правой части g неоднородной задачи тривиальным решениям u_0 необходимы и достаточны для ее разрешимости. Напомним, что в случае бесконечной области D тривиальными решениями являются постоянные векторы $u_0 = \xi \in \mathbb{R}^2$, а при $\kappa(D) = 1$ число условий ортогональности (5) равно трем.

Поскольку функция v в краевом условии $(v^+)' = g$, вообще говоря, многозначна, проинтегрировать это равенство в классе непрерывных функций нельзя. Однако с помощью указанных выше разложений можно перейти к задаче Дирихле $v^+ = f$ для однозначной функции v, сопряженной к многозначному решению системы Ламе. В определенном смысле полученная задача будет эквивалентной задаче Неймана. Тем самым открывается возможность рассмотрения задач Дирихле для решений (1) и сопряженных к ним функций в классах классах Харди $h^p(D)$. При этом условия ортогональности (5) по отношению к последней задаче в случае $(D) = 0$ бесконечной области снимаются, а в случае $\kappa(D) = 1$ они переходят в одно условие

$$\int_\Gamma f(t) n(t) |dt| = 0, \tag{6}$$

где подынтегральное выражение понимается как скалярное произведение $f_1(t)$ и вектора нормали $n = (n_1, n_2)$ в точке $t \in \Gamma$ в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 2. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Тогда задача Дирихле $u^+ = f$ для системы Ламе в классе $h^p(D)$, $p > 1$, однозначно разрешима, а задача Дирихле $v^+ = f$ фредгольмова и ее индекс равен $-\kappa(D)$. Более точно, однородная задача имеет только нулевое решение, а неоднородная задача при $\kappa(D) = 0$ безусловно разрешима, а при $\kappa(D) = 1$ она разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условию ортогональности* (6).

Если правая часть f этих задач принадлежит классу $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, то и любое их решение принадлежит $C^\mu(\overline{D})$. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к классам $C^{1,\mu}$.

3. Обобщенные потенциалы двойного слоя. В исследованиях краевых задач анизотропной плоской упругости в классических пространствах Гёльдера и Соболева можно выделить два основных направления. Первое из них состоит в использовании аналитических функций по аналогии с формулами Колосова–Мусхелишвили [3] в изотропном случае. Это направление представлено работами С.Г. Лехницкого, Г.Н. Савина, С.Г. Михлина и др. (см., например, [5, 6].) Второе направление основано на применении классического метода потенциала, оно развивалось В.Д. Купрадзе [1], М.О. Башелейшвили и др.

Достаточно широкое распространение получило также использование вместо аналитических функций решений эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами, являющихся частным случаем обобщенных аналитических функций И.Н. Векуа (см., например, [7–9]). Представление общего решения системы Ламе через так называемые функции, аналитические по Дуглису, полученное в [9] (см. также [10]), было использовано [11] для введения обобщенных потенциалов двойного слоя. В данной работе приведены окончательные результаты в смысле явного описания этих потенциалов только через модули упругости и простейшие симметричные комбинации корней характеристического уравнения в общем анизотропном случае. С помощью этих потенциалов, по-видимому, впервые удается распространить разрешимость задач Дирихле и Неймана на класс $C(\overline{D})$ в рамках общего теоретико-функционального подхода, развитого в [12].

Интеграл типа Коши для аналитических функций с вещественной плотностью φ можно записать в виде $P\varphi - iQ\varphi$ с интегралом

$$(P\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\operatorname{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2}\varphi(t)|dt|, \quad z \in D,$$

где $|dt|$ означает элемент длины дуги, $n = n_1 + in_2$ есть единичный вектор внешней нормали и $dt = in(t)|dt|$. Интеграл $Q\varphi$ определяется аналогично по отношению к $\mathrm{Im}[\overline{n(t)}\,(t - z)]$.

Хорошо известно [2], что для $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$, аналитическая функция $\phi(z)$, определяемая интегралом типа Коши, принадлежит классу Харди $H^p(D)$ и допускает почти всюду на Γ угловые предельные значения $\phi^+(t_0)$, для которых справедлива формула Сохоцкого–Племеля $\phi^+ = \varphi + P^*\varphi - iQ^*\varphi$, где * означает, что интегралы берутся в граничных точках $t_0 \in \Gamma$. Таким образом, $(P\varphi)^+ = \varphi + P^*\varphi$, $(Q\varphi)^+ = Q^*\varphi$. Напомним, что контур Γ предполагается ляпуновским и принадлежит $C^{1,\nu}$, поэтому ядро интеграла $P^*\varphi$ имеет слабую особенность. Интеграл $(Q^*\varphi)(t_0)$ сингулярный и понимается в смысле главного значения по Коши. Отсюда, в частности, следует, что вещественные функции $P\varphi$ и $Q\varphi$ принадлежат классу Харди $h^p(D)$ гармонических функций. В случае $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ или $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, функции $P\varphi$ и $Q\varphi$ принадлежат аналогичному классу в замкнутой области $\overline{D}$. Кроме того, в случае $\varphi \in C(\Gamma)$ функция $P\varphi \in C(\overline{D})$, а $Q\varphi \in h^p(D)$ для любого $p > 1$.

Интеграл $P\varphi$ представляет собой классический потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа. По аналогии с ним в обозначениях леммы 1 введем интегралы

$$(P_{kr}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2} H_{kr}(t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{7}$$

с плотностью $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$ и матричными множителями $H_{11}(\xi) = \mathrm{Im}[bh(\xi, J)b^{-1}]$, $H_{22}(\xi) = \mathrm{Im}[ch(\xi, J)c^{-1}]$, $H_{21}(\xi) = \mathrm{Im}[ch(\xi, J)b^{-1}]$, $H_{12}(\xi) = \mathrm{Im}[bh(\xi, J)c^{-1}]$, где положено $h(\xi, J) = (-\xi_2 + i\xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}$. В силу леммы 1 эти матрицы не зависят от выбора матрицы b и связанной с ней матрицы c.

Т е о р е м а 3. *Каждая пара равенств* $u = P_{11}\varphi$, $v = -[\mathrm{Im}(cb^{-1})]Q\varphi + P_{21}\varphi$ *и* $v = P_{22}\varphi$, $u = -[\mathrm{Im}(bc^{-1})]Q\varphi + P_{12}\varphi$ *определяет решение и системы Ламе и сопряженную к ней функцию* v.

В соответствии с этой теоремой интегралы $P_{11}\varphi$ и $P_{22}\varphi$ называем обобщенными потенциалами двойного слоя для решений системы Ламе и сопряженных к ним функциям. Пусть интегралы $(P^*_{kr}\varphi)(t_0)$ определяются аналогично (7) по отношению к $z = t_0 \in \Gamma$. Как и в случае интеграла $P\varphi$, ядра $|t - z|^{-2}\mathrm{Re}[\overline{n(t)}\,(t - t_0)]H_{kr}(t - t_0)$ имеют слабые особенности и, следовательно, операторы P^*_{kr} компактны в пространствах $C(\Gamma)$ и $L^p(\Gamma)$.

Л е м м а 2. *Интегральные операторы P_{kr} ограничены $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$, $1 < p < \infty$, и справедливы формулы* $(P_{11}\varphi)^+ = \varphi + P^*_{11}\varphi$, $(P_{21}\varphi)^+ = [\mathrm{Re}(cb^{-1})]\varphi + P^*_{21}\varphi$ *и* $(P_{22}\varphi)^+ = \varphi + P^*_{22}\varphi$, $(P_{12}\varphi)^+ = [\mathrm{Re}(bc^{-1})]\varphi + P^*_{12}\varphi$.

Эти операторы также ограничены $X(\Gamma) \to X(\overline{D})$, *где X означает любой из символов* C, C^μ, $C^{1,\mu}$, $0 < \mu < \nu$, *причем операторы P^*_{kr} компактны в* $X(\Gamma)$.

Согласно теореме 3, функция v, сопряженная к решению $u = P_{11}\varphi$, должна быть однозначной. В частности, решения $u \in U(D)$ системы Ламе раздела 2 не могут быть представлены потенциалом двойного слоя $P_{11}\varphi$. В случае бесконечной области D это относится и к постоянным векторам $u = \xi \in \mathbb{R}^2$. Аналогично обстоит дело и с представлением однозначных сопряженных функций $v \in V(D)$ к (вообще говоря, многозначным) решениям системы (1).

Т е о р е м а 4. *Пусть область D ограничена контуром* $\Gamma \in C^{1,\nu}$. *Тогда операторы P_{kk} фредгольмовы* $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$, *причем* $\ker P_{11} \subseteq \ker P_{22}$ *и* $\mathrm{ind} P_{11} = 0$, $\dim(\ker P_{11}) = 2m - 2\kappa(D)$ *и* $\mathrm{ind} P_{22} = 1$, $\dim(\ker P_{22}) = 3m - 2\kappa(D)$, *где m есть число связных компонент контура* Γ.

Ядро $\ker P_{11}$ *состоит из постоянных на контурах* Γ_k *вектор-функций* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, *которые при* $\kappa(D) = 1$ *обращаются в нуль на внешнем контуре, а образ* $\mathrm{im} P_{11}$ *состоит из всех функций* $u \in H^p(D)$, *сопряженная функция к которым однозначна в области D и которые при* $\kappa(D) = 0$ *исчезают на* ∞.

Основываясь на теореме 2, ядро $\ker P_{22}$ можно также точно описать, в частности, оно содержится в $C^{1,\mu}(\overline{D})$ для любого $0 < \mu < \nu$. Теорема 4 позволяет свести задачи Дирихле для решений системы (1) или сопряженных к ним функций к эквивалентным системам интегральных уравнений Фредгольма на границе Γ.

Матрицы $H_{kr}(\xi)$ в (7) можно описать в явном виде непосредственно в терминах элементов матрицы (2) и комбинаций $s = \nu_1 + \nu_2$, $t = \nu_1\nu_2$ корней характеристического уравнения.

Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113PK01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 664 с.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972. 628 с.

3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 709 с.
4. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Л., 1950. 417 с.
6. *England A.H.* Complex Variable Methods in Elasticity. L.; N.Y.; Sydney, Tokyo: Intersci., 1971. 197 p.
7. *Begehr H., Lin Wei.* In: Partial Diifferential Equations with Real Analysis. Longman Sci. and Techn., 1992. P. 219–239.
8. *Gilbert R.P., Lin Wei* // J. Elasticity. 1985. V. 15. P. 143–154.
9. *Солдатов А.П.* // ДАН. 2002. Т. 385. № 2. С. 163–167.
10. *Soldatov A.P.* // Anal. Oldenbourg Wiss. 2010. V. 20. № 2. P. 107–117
11. *Soldatov A.P.* // Proc. Appl. Math. and Mech. 2007. V. 7. № 1. P. 2040083–2040084.
12. *Солдатов А.П.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 674–686.