УДК 517.954

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Б. Васильев
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *vbv57@inbox.ru*

Рассматриваются дискретные псевдодифференциальные уравнения в дискретных аналогах пространств Соболева–Слободецкого в модельных дискретных областях евклидова пространства. Ключевую роль при исследовании разрешимости играет понятие периодической факторизации эллиптического символа дискретного псевдодифференциального оператора, которое может быть использовано для для различных типов канонических областей.

Ключевые слова: дискретное пространство Соболева–Слободецкого, дискретный псевдодифференциальный оператор, эллиптический символ, периодическая факторизация.

Введение

Мы рассмотрим некоторые «дискретные» аспекты хорошо разработанной теории эллиптических псевдодифференциальных уравнений [1], именно вопросы разрешимости их дискретных аналогов. По-видимому, для построения дискретных аппроксимаций решений псевдодифференциальных уравнений исследование этих вопросов является одной из важных составляющих. Некоторые предварительные рассмотрения элементов этой теории приведены в [3, 4, 5].

1. Дискретные пространства и операторы

Мы используем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{T}^m$ – m-мерный куб $[-\pi,\pi]^m, h>0, \hbar = h^{-1}$. Мы рассматриваем, определенные на этом кубе как периодические функции на $\mathbb{R}^m$ с таким основным кубом периодов.

Мы будем использовать термин «дискретная функция» для функций дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$. Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^m, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m,$$

если ряд сходится, функция $\tilde{u}_d(\xi)$ является периодической на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такое дискретное преобразование Фурье сохраняет основные свойства интегрального преобразования Фурье, в частности, обратное дискретное преобразование Фурье дается формулой

$$(F_d^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m.$$

Дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно-однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^m)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$ с нормами

$$||u_d||_2 = \left(\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m} |u_d(\tilde{x})|^2 h^m \right)^{1/2}$$

и

$$||\tilde{u}_d||_2 = \left(\int\limits_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^m} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

П р и м е р. Поскольку в определении пространств Соболева–Слободецкого участвуют частные производные, мы будем использовать их дискретные аналоги, т.е. разделенные разности первого порядка

$$(\Delta_k^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1}(u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m) - u_d(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_m)),$$

для которых дискретное преобразование Фурье выглядит следующим образом

$$(\widetilde{\Delta_k^{(1)} u_d})(\xi) = h^{-1}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)\tilde{u}_d(\xi).$$

Далее, для разделенной разности второго порядка мы имеем

$$(\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-2}(u_d(x_1, \cdots, x_k + 2h, \cdots, x_m) -$$

$$-2u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m) + u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m))$$

для которой дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$(\widetilde{\Delta_k^{(2)} u_d})(\xi) = h^{-2}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2\tilde{u}_d(\xi).$$

Таким образом, для дискретного лапласиана мы получим выражение

$$(\Delta_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{m} (\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}),$$

так что

$$(\widetilde{\Delta_d u_d})(\xi) = h^{-2} \sum_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2\tilde{u}_d(\xi).$$

Мы будем использовать дискретное преобразование Фурье для определения дискретных пространств Соболева–Слободецкого, которые очень удобны для изучения дискретных псевдодифференциальных уравнений. Обозначим $\zeta^2 = h^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2$ и введем следующее

О п р е д е л е н и е. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ состоит из дискретных функций $u_d(\tilde{x})$, для которых следующая норма

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

конечна.

Далее, пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – область, и $D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$ – дискретная область.

О п р е д е л е н и е. Пространство $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$. Норма в пространстве $H^s(D_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Пространство $H_0^s(D_d)$ состоит из дискретных функций u_d with с носителем в D_d, причем эти функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в пространстве $H_0^s(D_d)$ дается формулой

$$||u_d||_s^+ = \inf ||\ell u_d||_s,$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ.

Фурье-образ пространства $H^s(D_d)$ обозначим $\widetilde{H}^s(D_d)$.

З а м е ч а н и е . Подобные пространства были детально изучены в работе [2]. Конечно, введенные нормы будут эквивалентны L_2-норме, но константы эквивалентности будут зависеть от h. Отметим, что в наших рассмотрениях все константы ниже не зависят от h.

Пусть $\widetilde{A}_d(\xi)$ – периодическая функция на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такие функции мы называем символами. Как принято, мы определим дискретный псевдодифференциальный оператор посредством его символа.

О п р е д е л е н и е. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d в дискретной области D_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x}\in D_d,$$

Оператор A_d называется эллиптическим, если

$$ess \inf_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^m} |\widetilde{A}_d(\xi)| > 0.$$

З а м е ч а н и е . Можно ввести символ $\widetilde{A}_d(\tilde{x},\xi)$, зависящий от пространственной переменной $\tilde{x}$, и определить общий дискретный псевдодифференциальный оператор формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} \widetilde{A}_d(\tilde{x},\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x}\in D_d,$$

Для исследования последних операторов и связанных с ними уравнений потребуется более тонкая и сложная техника.

О п р е д е л е н и е. Класс E_α состоит из символов, удовлетворяющих следующему условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \tag{1}$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Число $\alpha\in\mathbb{R}$ называется порядком дискретного псевдодифференциального оператора A_d. Грубо говоря, порядок дискретного псевдодифференциального оператора – это степень h, взятая со знаком «минус».

С учетом последнего определения легко доказать следующее свойство.

Л е м м а. Дискретный псевдодифференциальный оператор $A_d \in E_\alpha$ является линейным ограниченным оператором $H^s(h\mathbb{Z}^m) \to H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^m)$ с нормой, не зависящей от h.

2. Операторы и уравнения

С оператором A_d мы свяжем уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{2}$$

которое ниже будет рассмотрено только для случая полупространства $D = \mathbb{R}^m_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \cdots, x_m), x_m > 0\}$.

3. Периодическая факторизация

Обозначим $\Pi_\pm = \{(\xi', \xi_m \pm i\tau), \tau > 0\}, \xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m$.

О п р е д е л е н и е. Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A^{\pm 1}_{d,+}(\xi)| \leq c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{æ}{2}}, \quad |A^{\pm 1}_{d,-}(\xi)| \leq c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{\alpha - æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

В некоторых простых случаях можно использовать топологическую формулу

$$æ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} d \arg A_d(\cdot, \xi_m),$$

где $A_d(\cdot, \xi_m)$ означает, что $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ фиксировано, и интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Другими словами, нужно вычислить поделенное на 2π приращение аргумента символа $A_d(\xi)$, когда ξ_m меняется от $-\hbar\pi$ до $\hbar\pi$ при фиксированном ξ'.

4. Уравнения и разрешимость

Т е о р е м а 1. Если эллиптический символ $\tilde{A}_d(\xi) \in E_\alpha$ допускает периодическую факторизацию с индексом æ, так что $|æ - s| < 1/2$, то уравнение (2) имеет единственное решение в пространстве $H^s(hD_d)$ для любой правой части $v_d \in H^{s-\alpha}(hD_d)$,

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) P^{per}_{\xi'}(\tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi)\widetilde{\ell v_d}(\xi)).$$

З а м е ч а н и е . Нетрудно заключить, что решение не зависит от выбора продолжения ℓv_d.

Т е о р е м а 2. Пусть $æ - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. Тогда общее решение уравнения (2) в образах Фурье имеет следующий вид

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) X_n(\xi) P^{per}_{\xi'}(X^{-1}_n(\xi)\tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi)\widetilde{\ell v_d}(\xi)) + \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1} c_k(\xi')\hat{\zeta}^k_m,$$

$$(P^{per}_{\xi'}\tilde{u}_d)(\xi) \equiv \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_d(\xi) + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \eta_m) \operatorname{ctg}\frac{h(\xi_m - \eta_m)}{2} d\eta_m\right),$$

где $X_n(\xi)$ – произвольный многочлен степени n переменных $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, \cdots, m$, удовлетворяющий условию (1), $c_j(\xi'), j = 0, 1, \cdots, n-1$, – произвольные функции из $H_{s_j}(h\mathbb{T}^{m-1}), s_j = s - æ + j - 1/2$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект 1.7311.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука.— 1973.— 236 с.
2. Франк Л. С. Пространства сеточных функций // Матем. сборн.— 1971.—86.— 2.— С. 187–233.
3. Vasilyev V. B. Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization. In: Integral Methods in Science and Engineering. V.1. Theoretical Technique. C. Constanda, Dalla Riva, M., Lamberti, P.D., Musolino, P. (Eds.) Birkhäuser, 2017. P. 315–324.
4. Vasilyev V. B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators // AIP Conf. Proc.—2017.—1863.— P. 140014.
5. Vasilyev V. B. On discrete boundary value problems // AIP Conf. Proc.—2017.— 1880. – P. 050010.