ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 174 (2020). С. 37–45
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-174-37-45

УДК 517.983.23

ОПЕРАТОРНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

© 2020 г. **А. В. ГЛУШАК**

Аннотация. Рассматриваются операторные гипергеометрические функции ${}_1F_2(\cdot)$ и ${}_2F_3(\cdot)$, построенные по неограниченному оператору. С их помощью решены задачи Коши для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Приводится новая пара подобных операторов.

Ключевые слова: оператор преобразования, операторная функция Бесселя, операторная функция Бесселя—Струве, операторная гипергеометрическая функция, интегро-дифференциальное уравнение.

OPERATOR HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

© 2020 **A. V. GLUSHAK**

Abstract. We consider operator hypergeometric functions ${}_1F_2(\cdot)$ and ${}_2F_3(\cdot)$ constructed by an unbounded operator. Using these functions, we solve Cauchy problems for singular integro-differential equations. A new pair of similar operators is given.

Keywords and phrases: transformation operator, Bessel operator function, Bessel–Struve operator function, operator hypergeometric function, integro-differential equation.

AMS Subject Classification: 34G10

1. Введение. Исследование дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами стимулирует развитие теории разрешающих операторов соответствующих начальных задач. В результате исследований эволюционных уравнений первого порядка

$$u'(t) = Au(t)$$

возникли полугруппы линейных операторов, а при изучении уравнения второго порядка (абстрактного волнового уравнения)

$$u''(t) = Au(t)$$

— операторные косинус-функции. Операторные функции Бесселя и Струве были введены в рассмотрение для исследования уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД). Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной операторной косинус-функции. В настоящей работе по неограниченному оператору A будут построены операторные гипергеометрические функции ${}_1F_2(\cdot)$, ${}_2F_3(\cdot)$ и установлены некоторые их свойства.

Пусть $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в нем областью определения $D(A)$. В [2] при $k > 0$ исследована абстрактная задача Коши для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732-а).

уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0 \tag{2}$$

и установлено необходимое и достаточное условие разрешимости, сформулированное в терминах оценки нормы резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ и ее весовых производных. В [5] получен критерий равномерной корректности этой задачи, который, в отличие от [2], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее невесовых производных.

Пусть $L(E)$ — пространство линейных ограниченных операторов. Задача (1), (2) называется *равномерно корректной*, если существует коммутирующая на $D(A)$ с оператором A операторная функция $Y_k(\cdot) : [0,\infty) \to L(E)$ и такие числа $M \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $Y_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\big\|Y_k(t)\big\| \leqslant Me^{\omega t}, \quad \big\|Y_k'(t)u_0\big\| \leqslant Mte^{\omega t}\big\|Au_0\big\|. \tag{3}$$

Функция $Y_k(t)$ названа в [2, 5] операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1), (2). Обозначим через G_k множество операторов A, для которых задача (1), (2) равномерно корректна; при этом G_0 — множество генераторов операторной косинус-функции $Y_0(t)$.

В дальнейшем удобно использовать обозначения

$$B_k u(t) \equiv u''(t) + \frac{k}{t}u'(t), \quad S_k u(t) \equiv B_k u(t) - \frac{k}{t}u'(0) = u''(t) + \frac{k}{t}\big(u'(t) - u'(0)\big)$$

для дифференциальных выражений Бесселя B_k и Бесселя—Струве S_k соответственно. Пусть также $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера и

$$\mu_{k,m} = \frac{2\Gamma\left(\dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2} + \dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k}{2} - \dfrac{m}{2}\right)}.$$

2. Операторная гипергеометрическая функция ${}_1F_2(\cdot)$. В [5] доказано, что если задача (1), (2) равномерно корректна при значении параметра $m \geqslant 0$ ($A \in G_m$), то эта задача равномерно корректна и для $k > m \geqslant 0$ ($A \in G_k$); при этом соответствующая ОФБ $Y_k(t)$ имеет вид

$$Y_k(t) = P_{k,m}Y_m(t) = \mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^m\big(1 - s^2\big)^{(k-m)/2-1}Y_m(ts)\,ds. \tag{4}$$

Интеграл, стоящий в правой части (4), принято называть *интегралом Пуассона* $P_{k,m}$ или *оператором преобразования*. Подробнее об операторах преобразования см., например, в [6, 10].

Равенство (4) называется формулой сдвига по параметру k решения задачи Коши для уравнения (1). Отметим, что формула сдвига по параметру решения задачи Коши для уравнения Бесселя—Струве приводится в [4]; она также будет использована в настоящей работе.

Пусть $A \in G_l$, $l \geqslant 0$, $k > m > -1$. Рассмотрим операторную функцию вида

$$U(t) = P_{k,m}Y_l(t) = \mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^m\big(1 - s^2\big)^{(k-m)/2-1}Y_l(ts)\,ds. \tag{5}$$

При $l = m \geqslant 0$ равенство (5) совпадает с формулой сдвига по параметру (4). Если A — оператор умножения на число $A \in \mathbb{C}$, то

$$Y_k(t) = \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(t^2\dfrac{A}{4}\right)^j}{j!\,\Gamma\left(j + \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}\right)} = \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(t\frac{\sqrt{A}}{2}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{k}{2}} I_{\frac{k}{2} - \frac{1}{2}}\left(t\sqrt{A}\right),$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя. В этом случае, вычисляя интеграл в равенстве (5) с помощью [8, 2.15.2.5], получим

$$U(t) = {}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right),$$

где ${}_1F_2(\cdot)$ — гипергеометрическая функция. Поэтому определяемую равенством (5) операторную функцию $U(t)$ будем называть *операторной гипергеометрической функцией* (ОГФ), *построенной по оператору* $A \in G_l$, и обозначать

$$P_{k,m}Y_l(t) \equiv {}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right), \quad l \geqslant 0, \quad k > m > -1.$$

Как уже было отмечено, ОГФ

$${}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right)$$

при $l = m \geqslant 0$ совпадает с ОФБ $Y_k(t)$:

$$P_{k,m}Y_m(t) = {}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right) = {}_0F_1\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right) = Y_k(t).$$

Если $u_0 \in D(A)$, то для ОФБ $Y_k(t)$ справедливы соотношения (см. [5])

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t)Au_0, \quad \lim_{t\to 0+} Y_k''(t)u_0 = \frac{1}{k+1}Au_0. \tag{6}$$

Используя равенства (6), из представления (5) выводим соответствующие свойства и для производных ОГФ ${}_1F_2(\cdot)$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\,{}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right)u_0 = \\ = \frac{(m+1)t}{(k+1)(l+1)}\,{}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{3}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{3}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right)Au_0, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{d^2}{dt^2}\,{}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right)u_0 = \frac{(m+1)}{(k+1)(l+1)}Au_0. \tag{8}$$

Учитывая неравенства (3), легко получим следующие оценки:

$$\left\|\,{}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right)\right\| \leqslant Me^{\omega t},$$

$$\left\|\frac{d}{dt}\,{}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right)u_0\right\| \leqslant Mte^{\omega t}\|Au_0\|.$$

Далее ОГФ ${}_1F_2(\cdot)$ будет использована при решении ряда начальных задач для сингулярных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Укажем также, что обзор по исследованиям в области интегро-дифференциальных уравнений в банаховом прстранстве может быть найден во введении монографии [7] и для уравнений в гильбертовом пространстве — в [1].

Теорема 1. *Пусть $A \in G_l$, $l \geqslant 0$, $k > m > 0$, $u_0 \in D(A)$. Тогда функция*

$$u(t) = {}_1F_2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{l}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right)u_0 = P_{k,m}Y_l(t)u_0 \tag{9}$$

является решением сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$M_{k,m,l}u(t) \equiv B_ku(t) + \frac{l-m}{t^{m+1}}\int\limits_0^t \tau^m B_k u(\tau)\,d\tau = Au(t) \tag{10}$$

и удовлетворяет начальным условиям (2).

Доказательство. Чтобы проверить, что определяемая равенством (9) функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (10), будем использовать равенство

$$B_k u(t) = B_k P_{k,m} Y_l(t) u_0 = P_{k,m} B_m Y_l(t) u_0 = \mu_{k,m} \int_0^1 s^m \big(1-s^2\big)^{(k-m)/2-1} B_m Y_l(ts) u_0\, ds, \tag{11}$$

называемое сплетающим свойством оператора Пуассона $P_{k,m}$, которое было установлено в [3, (14)].

Учитывая равенство (11), после элементарных преобразований получим

$$\frac{l-m}{t^{m+1}} \int_0^t \tau^m B_k u(\tau)\, d\tau = \frac{(l-m)\mu_{k,m}}{t^{m+1}} \int_0^t \tau^m \int_0^1 s^m \big(1-s^2\big)^{(k-m)/2-1} B_m Y_l(\tau s) u_0\, ds\, d\tau =$$

$$= \frac{(l-m)\mu_{k,m}}{t^{m+1}} \int_0^t \tau^m \left(\frac{d}{d\tau} + \frac{m}{\tau}\right) \int_0^1 s^m \big(1-s^2\big)^{(k-m)/2-1} \left(\frac{Y_l'(\tau s) u_0}{s}\right) ds\, d\tau =$$

$$= (l-m)\mu_{k,m} \int_0^1 s^m \big(1-s^2\big)^{(k-m)/2-1} \left(\frac{Y_l'(\tau s) u_0}{\tau s}\right) ds. \tag{12}$$

Складывая равенства (11) и (12), в силу замкнутости оператора A имеем

$$M_{k,m,l} u(t) = B_k u(t) + \frac{l-m}{t^{m+1}} \int_0^t \tau^m B_k u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \mu_{k,m} \int_0^1 s^m \big(1-s^2\big)^{(k-m)/2-1} B_l Y_l(ts) u_0\, ds = Au(t). \tag{13}$$

Следовательно, определяемая равенством (9) функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (10).

Справедливость начальных условий (2) вытекает из соответствующих свойств ОФБ $Y_l(t)$, а именно: $Y_l(0) = I$, $Y_l'(0) = 0$. Теорема доказана. □

В теореме 1 фактически установлено, что на дважды непрерывно дифференцируемых функциях имеет место равенство

$$M_{k,m,l} P_{k,m} = P_{k,m} B_l.$$

Таким образом, стоящий в правой части равенства (5) интегральный оператор Пуассона является оператором преобразования, сплетающим интегро-дифференциальное выражение $M_{k,m,l}$ левой части (10) и дифференциальное выражение Бесселя B_l.

Отметим также, что если $k > m = 1$, $l = 0$, $A \in G_{k+1}$, то интегро-дифференциальное уравнение (10) превращается в нагруженное уравнение Мальмстена

$$u''(t) + \frac{k-1}{t} u'(t) - \frac{k-1}{t^2}\left(u(t) - u(0)\right) = Au(t), \quad t > 0,$$

для которого задача Коши с начальными условиями (2) однозначно разрешима (см. [4]) и

$$u(t) = u_0 + \frac{t}{k+1} L_{k+1}(t) A u_0.$$

В качестве еще одного применения ОГФ ${}_1F_2(\cdot)$ покажем, что определяемая равенством (9) функция $u(t)$ является также и решением дифференциального уравнения третьего порядка

$$\left(t\frac{d}{dt} + l - 1\right)\left(t\frac{d}{dt} + k - 1\right)\big(tu'(t)\big) = t^2 A\big(tu'(t) + (m+1)u(t)\big),$$

или, в развернутом виде,

$$tu'''(t) + (k+l+1)u''(t) + \frac{kl}{t}u'(t) = A\bigl(tu'(t) + (m+1)u(t)\bigr), \tag{14}$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} \bigl(B_\nu u(t) - Au(t)\bigr) = 0, \tag{15}$$

где B_ν — дифференциальное выражение Бесселя, $\nu = (kl + k + l - m)/(m+1)$.

Теорема 2. *Пусть $A \in G_l$, $l \geqslant 0$, $k > m > 0$, $u_0 \in D(A^2)$. Тогда определяемая равенством* (9) *функция $u(t)$ является решением дифференциального уравнения* (14) *и удовлетворяет начальным условиям* (15).

Доказательство. Легко проверить, что дифференциальное уравнение третьего порядка (14) получается дифференцированием интегро-дифференциального уравнения (10), поэтому определяемая равенством (9) функция $u(t)$ является решением и этого уравнения, а также удовлетворяет первым двум начальным условиям в (15).

Справедливость третьего начального условия в (15) вытекает из равенств (7), (8) для производных ОГФ ${}_1F_2(\cdot)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0+} \bigl(B_\nu u(t) - Au(t)\bigr) = \\
&= \lim_{t\to 0+} \left(u''(t) + \frac{kl+k+l-m}{m+1} \frac{m+1}{(k+1)(l+1)}\, {}_1F_2\left(\frac{m+3}{2};\ \frac{k+3}{2},\ \frac{l+3}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right) Au_0 - Au(t) \right) = \\
&\qquad = \left(\frac{m+1}{(k+1)(l+1)} + \frac{kl+k+l-m}{(k+1)(l+1)} - 1 \right) Au_0 = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

В частности, при $l = m = 0$ единственным решением дифференциального уравнения третьего порядка

$$tu'''(t) + (k+1)u''(t) = A\bigl(tu'(t) + u(t)\bigr), \tag{16}$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} \bigl(B_k u(t) - Au(t)\bigr) = 0, \tag{17}$$

является функция

$${}_1F_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{k}{2} + \frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right) u_0 = Y_k(t)u_0.$$

Утверждение о единственности легко получить, если заметить, что уравнение (16) можно записать в виде

$$\bigl(tu''(t) + ku'(t) - tAu(t)\bigr)' = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение по промежутку $(0, t)$ и учитывая начальные условия (17), сведем задачу (16), (17) к однозначно разрешимой задаче Коши (1), (2) для уравнения ЭПД.

3. Операторная гипергеометрическая функция ${}_2F_3(\cdot)$. Переходим к построению еще одной ОГФ. При $k > 0$ в [4] исследована задача Коши для уравнения Бесселя—Струве

$$S_k v(t) \equiv v''(t) + \frac{k}{t}\bigl(v'(t) - v'(0)\bigr) = Av(t), \quad t > 0, \tag{18}$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = v_1, \tag{19}$$

установлена ее равномерная корректность при $A \in G_k$ и построен разрешающий оператор $L_k(t)$ этой задачи, названный операторной функцией Струве (ОФС). Для ОФС $L_k(t)$, также как и для

ОФБ $Y_k(t)$, при $k > m \geqslant 0$ имеет место формула сдвига по параметру

$$L_k(t) = \nu_{k,m} \int\limits_0^1 s^m \left(1 - s^2\right)^{(k-m)/2-1} L_m(ts)\, ds = \frac{\nu_{k,m}}{\mu_{k,m}} P_{k,m} L_m(t),$$

$$\nu_{k,m} = \frac{2\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{k}{2}-\dfrac{m}{2}\right)}.$$

Пусть $A \in G_l$, $l \geqslant 0$, и $k > m > -1$. Рассмотрим операторную функцию вида

$$V(t) = \frac{\nu_{k,m}}{\mu_{k,m}} P_{k,m} L_l(t) = \frac{2\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{k}{2}-\dfrac{m}{2}\right)} \int\limits_0^1 s^m \left(1 - s^2\right)^{(k-m)/2-1} L_l(ts)\, ds. \tag{20}$$

Если A — оператор умножения на число $A \in \mathbb{C}$, то (см. [4])

$$L_k(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t\left(t^2 \dfrac{A}{4}\right)^j}{\Gamma\left(j+\dfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(j+\dfrac{k}{2}+1\right)} = \frac{2^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}{A^{\frac{k}{4}+\frac{1}{4}}\, t^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}} \mathbf{L}_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}\left(t\sqrt{A}\right),$$

где $\mathbf{L}_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Струве (см. [9, с. 655]).

В этом случае, вычисляя интеграл в (18) с помощью [9, 2.7.4.1], получим

$$V(t) = \frac{\nu_{k,m} t}{\mu_{k,m}}\, {}_2F_3\left(1,\ \frac{m}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2},\ \frac{l}{2}+1,\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right).$$

Поэтому определяемую равенством (20) операторную функцию $V(t)$ естественно назвать операторной гипергеометрической функцией типа ${}_2F_3(\cdot)$, зависящей от трех переменных параметров m, k, l и двух фиксированных.

Покажем, что ОГФ $V(t)$, как и ОГФ ${}_1F_2(\cdot)$, может быть использована при решении начальной задачи для сингулярного интегро-дифференциального уравнения, содержащего дифференциальное выражение Бесселя—Струве S_k.

Теорема 3. *Пусть $A \in G_l$, $l \geqslant 0$, $k > m > 0$, $v_1 \in D(A)$. Тогда функция*

$$v(t) = V(t) v_1 = \frac{\nu_{k,m}}{\mu_{k,m}} P_{k,m} L_l(t) v_1 \tag{21}$$

является решением сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$S_k v(t) + \frac{l-m}{t^{m+1}} \int\limits_0^t \tau^m S_k v(\tau)\, d\tau = A v(t) \tag{22}$$

и удовлетворяет начальным условиям (19).

Доказательство. Применяя равенство (19) к функции $v(t) = V(t) v_1$, получим

$$M_{k,m,l} v(t) = B_k v(t) + \frac{l-m}{t^{m+1}} \int\limits_0^t \tau^m B_k v(\tau)\, d\tau = \nu_{k,m} \int\limits_0^1 s^m (1-s^2)^{(k-m)/2-1} B_l L_l(ts) v_1\, ds. \tag{23}$$

Учитывая в (23) уравнение (18), после элементарных преобразований будем иметь

$$B_k v(t) + \frac{l-m}{t^{m+1}} \int_0^t \tau^m B_k v(\tau)\, d\tau =$$
$$= \nu_{k,m} \int_0^1 s^m (1-s^2)^{(k-m)/2-1} \left(AL_l(ts)v_1 + \frac{l}{ts} v_1 \right) ds = Av(t) + \frac{kl}{mt} v_1, \quad (24)$$

и после подстановки $B_k v(t) = S_k v(t) + (k/t)v_1$ равенство (24) превращается в (22).

Справедливость начальных условий (19) вытекает из из соответствующих свойств ОФС $L_l(t)$, а именно, $L_l(0) = 0$, $L_l'(0) = I$. Теорема доказана. $\square$

Если $k > m = 1$, $l = 0$, $A \in G_{k+1}$, то интегро-дифференциальное уравнение (22) превращается в уравнение Мальмстена вида

$$v''(t) + \frac{k-1}{t} v'(t) - \frac{k-1}{t^2} v(t) = Av(t), \quad t > 0,$$

для которого задача Коши с начальными условиями (19) однозначно разрешима (см. [4]) и $v(t) = tY_{k+1}(t)v_1$.

Аналогично теореме 2 устанавливается следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $A \in G_l$, $l \geqslant 0$, $k > m > 0$, $v_1 \in D(A^2)$. Тогда определяемая равенством* (20) *функция $v(t) = V(t)v_1$ является решением дифференциального уравнения*

$$tv'''(t) + (k+l+1)v''(t) + \frac{kl}{t}\big(v'(t) - v'(0)\big) = A\big(tv'(t) + (m+1)v(t)\big)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = v_1, \quad v''(0) = 0.$$

В частности, при $l = m = 0$ единственным решением дифференциального уравнения третьего порядка

$$tv'''(t) + (k+1)v''(t) = A\big(tv'(t) + v(t)\big), \quad (25)$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = v_1, \quad v''(0) = 0, \quad (26)$$

является функция

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)t}{\Gamma(k/2+1/2)}\ {}_2F_3\left(1,\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{k+1}{2};\ t^2\frac{A}{4}\right) v_1 = L_k(t)v_1.$$

Утверждение о единственности легко получить, если заметить, что уравнение (25) можно записать в виде

$$\big(tv''(t) + k\big(v'(t) - v'(0)\big) - Av(t)\big)' = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение по промежутку $(0,t)$ и учитывая начальные условия (26), задачу (25), (26) сведем к однозначно разрешимой задаче Коши (18), (19) для уравнения Бесселя—Струве.

4. Заключение. В работе введены в рассмотрение операторные гипергеометрические функции ${}_1F_2(\cdot)$ и ${}_2F_3(\cdot)$, построенные по неограниченному оператору $A \in G_k$. С их помощью решены задачи Коши для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, а также указана новая пара подобных операторов.

В заключение укажем, что, используя свойства ОФБ $Y_k(t)$, можно построить другие семейства операторных функций, которые будут являться разрешающими операторами для ряда дифференциальных уравнений. Так, операторная функция

$$F(t) = \frac{2\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{b}{2}\right)} \int\limits_0^\infty s^{b-1}\exp\left(-s^2\right) Y_k(2ts)\,ds, \quad b>0,$$

является разрешающим оператором для дифференциального уравнения

$$u''(t) + \left(\frac{k}{t}I - 2tA\right)u'(t) = 2bAu(t), \quad t>0, \tag{27}$$

а операторная функция

$$H(t) = \frac{2\exp(t^2)}{\Gamma\left(\dfrac{b}{2}\right)} \int\limits_0^\infty s^{b-1}\exp\left(-s^2\right) Y_k(2ts)\,ds, \quad b>0,$$

— для дифференциального уравнения

$$u''(t) + \left(\frac{k}{t}I - 2t(A+2I)\right)u'(t) - 2\left((b-2t^2)A + (k+1-2t^2)I\right)u(t) = 0, \quad t>0. \tag{28}$$

Если оператор A ограничен, то

$$F(t) = {}_1F_1\left(\frac{b}{2};\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2};\ t^2A\right),$$

где ${}_1F_1(\cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера.

Функции $u(t) = F(t)u_0$ и $u(t) = H(t)u_0$ удовлетворяют соответственно уравнениям (27), (28) и начальным условиям

$$u(0) = u_0 \in D(A), \quad u'(0) = 0.$$

Наконец, укажем, что функция $w(t) = T(t)w_0$, где

$$T(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{2^k\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}\right)t^{\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^\infty s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\Psi\left(m,\ \frac{k+1}{2};\ \frac{s^2}{4t}\right) Y_k(s)\,ds, \quad k>0, \tag{29}$$

$\Psi(\cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, является решением нагруженного сингулярного дифференциального уравнения первого порядка

$$w'(t) + \frac{m}{t}\big(w(t) - w(0)\big) = Aw(t), \quad t>0, \quad m>0,$$

и удовлетворяет начальному условию

$$w(0) = w_0 \in D(A).$$

При $m=0$, $A \in G_k$ равенство (29) превращается в формулу связи полугруппы $T(t)$ с ОФБ $Y_k(t)$ (см. [5])

$$T(t) = \frac{1}{2^k\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}\right)t^{\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^\infty s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_k(s)\,ds, \quad k>0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование операторных моделей, возникающих в теории вязкоупругости// Совр. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 1. — С. 60–73.
2. *Глушак А. В.* Операторная функция Бесселя// Докл. РАН. — 1997. — *352*, № 5. — С. 587–589.
3. *Глушак А. В.* Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 3. — С. 364–371.
4. *Глушак А. В.* Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя—Струве// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 7. — С. 891–905.
5. *Глушак А. В., Покручин О. А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 1. — С. 41–59.
6. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
7. *Орлов С. С.* Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986.
10. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2018.

Глушак Александр Васильевич
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: aleglu@mail.ru, Glushak@bsu.edu.ru