ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У «Б е л Г У»)

ИНСТИТУТ

ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Магистерская диссертация

обучающегося по направлению подготовки 01.04.01 Математика,

магистерская программа Теория чисел

очной формы обучения, группы 07001535

Мотькиной Натальи Николаевны

Научный руководитель:

кандидат физико–математических наук

Куртова Л. Н.

Рецензент:

кандидат физико–математических наук,

доцент Москаленко Н. И.

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о целочисленных решениях уравнений различного вида восходит к древности. Простейшим уравнением является неопределенное уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y $ax + by = c$, где a,b и c — целые числа, причем a и b взаимно просты. Все решения такого уравнения в целых числах можно найти с помощью алгоритма Евклида. Некоторые неопределенные уравнения первой степени появились в связи с проблемами астрономии, например, при рассмотрении вопросов периодического повторения небесных явлений. Их решение начали рассматривать еще индусские математики примерно с V века. Позднее благодаря Гауссу неопределенные уравнения первой степени стали записывать и решать в форме сравнения. Систематизация проблем теории неопределенных уравнений второй степени и методов их решения проведена Диофантом (III в.). Большая часть дошедших до нас книг его «Арифметики» посвящена решению этих уравнений в рациональных положительных числах [1]. Сочинения Диофанта сыграли большую роль в дальнейшем развитии той части теории чисел, которая занимается решением уравнений в целых числах, называемых теперь *диофантовыми уравнениями*.

Неопределенное уравнение Ферма $x^2-ny^2 = 1$, где n — целое положительное число, не являющееся точным квадратом, имеет большое значение во всей теории диофантовых уравнений. Это уравнение часто называют *уравнением Пелля*. Под таким названием оно фигурирует в трудах Леонарда Эйлера, но Джон Пелль (XVII в.) этим уравнением не занимался [2]. Частный случай уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$ изучался еще пифагорейцами в связи с вычислением приближения к $\sqrt{2}$. Доказательством того, что уравнение Пелля имеет бесконечное множество решений при любом целом положительном n, отличном от полного квадрата, занимались Ферма, Броункер, Валлис, Эйлер, Лагранж.

В 1770 г. Ж. Лагранж доказал, что каждое натуральное число есть сумма не более четырех квадратов натуральных чисел (*задача Лагранжа*). До него Ферма, Эйлер и другие математики изучали квадратичные формы частного вида, Лагранж заложил основы общей теории [3]. Он установил основную связь между вопросом о представимости чисел квадратичной формой и существованием решений соответствующего сравнения второй степени. К. Ф. Гаусс, а затем Л. Дирихле, продолжая исследования Эйлера, создали теорию представления натуральных чисел квадратичными формами. Гаусс ввел так называемые *суммы Гаусса*

$$S(q,a,b) = \sum_{1\leqslant j\leqslant q} e^{2\pi i(aj^2+bj)/q},$$

которые явились первыми примерами тригонометрических сумм, и показал их полезность в решении задач теории чисел.

В 1926 г. Х. Клоостерман рассмотрел обобщение задачи Лагранжа. Он нашел асимптотическую формулу для количества представлений целого положительного числа диагональной квадратичной формой с четырьмя целыми переменными (*задача Клоостермана*) [4]. Число решений задачи представляется в виде интеграла. Идея Клоостермана состоит в том, что промежуток интегрирования он разбивал на дуги посредством дробей Фарея. Далее Клоостерман оценивал тригонометрические суммы специального вида

$$K(q,a,b) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ (j,q)=1}} e^{2\pi i(aj+b\bar{j})/q},$$

названные позднее *суммами Клоостермана.*

В настоящей работе рассматриваются асимптотические формулы для числа решений некоторых диофантовых уравнений.

Объектом исследования являются диофантовы уравнения.

Предмет исследования — асимптотические формулы числа решений диофантовых уравнений.

Цель работы заключается в изучении асимптотических формул для числа решений диофантовых уравнений второй степени.

Задачи работы. В соответствии с целью выделим следующие задачи:

1. Получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения Пелля с весами, отвечающими за ограничения на переменные x, y

$$\sum_{x^2-ny^2=1} e^{-\frac{x^2+y^2}{N}}.$$

2. Изучить поведение особого ряда в асимптотической формуле задачи Клоостермана. Выделить случаи, когда уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, где a, b, c, d, n —положительные целые, не имеет решения.

Актуальность работы следует из того, что решение выше перечисленных задач с квадратичными формами вносят новый вклад в теорию чисел.

В работе применяются *методы исследования* элементарной теории чисел и математического анализа.

Все результаты, изложенные в работе, являются новыми.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в дальнейших исследованиях, посвященных аддитивным задачам, а также при разработке специальных курсов по теории чисел.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы элементарной теории чисел и математического анализа.

Апробация результатов. Основные результаты работы были представлены на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Нальчик, 2017 г. По материалам работы подготовлены 2 статьи, тезисы доклада.

Первая глава диссертации содержит сведения из теории чисел, необходимые при дальнейшем изложении. Основные результаты научной работы сформулированы во 2 и 3 главах.

Во второй главе получена асимптотическая формула для числа решений уравнения Пелля с весами, отвечающими за ограничения на переменные x, y

$$I(n, N) = \sum_{x^2 - ny^2 = 1} e^{-\frac{x^2+y^2}{N}}.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема **1.** *Пусть N — натуральное число. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n, N) = e^{-\frac{1}{N}}(\frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{n+1}} + O(e^{-\ln^2 N})).$$

В третьей главе изучено поведение особого ряда асимптотической формулы в проблеме Клоостермана.

В работе [4] Х. Д. Клоостерман получил асимптотическую формулу для числа представлений положительного целого числа линейной комбинацией четырех квадратов с весами. Клоостерман привел примеры отдельных случаев, когда число представлений равно нулю. Случаи для простого p, равного двум, рассмотрены Клоостерманом более подробно, чем для нечетного простого p.

Применение точных формул для сумм Гаусса ([5]—[8]) позволило дополнить случаи [4] для нечетного простого p, при которых уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений.

Результаты исследования приведены в следующих теоремах.

Пусть p — нечетное простое число, a, b, c, d, n —положительные целые.

Теорема **2.** *Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения в случаях:*

1. если n и p взаимно просты, коэффициенты a, b, c, d делятся на p;

2. если n и p взаимно просты, три коэффициента квадратичной формы $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ делятся на p, произведение четвертого коэффициента и n является квадратичным невычетом по модулю p.

Теорема **3.** *Пусть*

$$a = p^{\alpha_1}a_1,\ (a_1, p) = 1,\ b = p^{\beta_1}b_1,\ (b_1, p) = 1,\ (c, p) = 1,\ (d, p) = 1,$$

$$n = p^{\eta_1}n_1,\ (n_1, p) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения в случаях:

1. если $\eta_1 < \alpha_1 \le \beta_1$, η_1 – нечетное число, $(\frac{-cd}{p}) = -1$;

2. если $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1$, η_1 – нечетное число, $(\frac{a_1n_1}{p}) = -1$, $(\frac{-cd}{p}) = -1$;

3. если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1$, α_1, η_1 – нечетные числа, $(\frac{a_1n_1}{p}) = -1$, $(\frac{-cd}{p}) = -1$.

В работе Клоостермана [4] утверждение теоремы 2 доказывается с помощью теории сравнений. Случаи 1 и 2 теоремы 3 приводятся в [4] без доказательства, случай 3 теоремы 3 является новым и не рассматривался ранее.

Теорема **4.** *Пусть*

$$a = p^{\alpha_1}a_1,\ (a_1, p) = 1,\ b = p^{\beta_1}b_1,\ (b_1, p) = 1,\ c = p^{\gamma_1}c_1,\ (c_1, p) = 1,\ (d, p) = 1,$$

$$n = p^{\eta_1}n_1, (n_1, p) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения в случаях:

1. если $\eta_1 < \alpha_1 \le \beta_1 \le \gamma_1$ и η_1 – нечетное число;

2. если $\eta_1 < \alpha_1 \le \beta_1 \le \gamma_1$, η_1 – четное число и $(\frac{dn_1}{p}) = -1$;

3. если $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1 \le \gamma_1$, η_1 – нечетное число и $(\frac{a_1n_1}{p}) = -1$;

4. если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– четное число и* $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$*;*

5. если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$, α_1 *– нечетное число и* $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p}) = -1$*;*

6. если $\alpha_1 < \eta_1 = \beta_1 < \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– четное число и* $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{b_1 n_1}{p}) = -1$*;*

7. если $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 *– четное число,* α_1 *– нечетное число,* β_1 *– нечетное число и* $(\frac{-a_1 b_1}{p}) = -1$, $(\frac{d n_1}{p}) = -1$*;*

8. если $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– нечетное число,* β_1 *– четное число и* $(\frac{-b_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$*;*

9. если $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– четное число,* β_1 *– нечетное число и* $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{b_1 n_1}{p}) = -1$*.*

Результаты теоремы 4 являются новыми и не исследовались в работе Клоостермана [4].

Глава 1

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Здесь формулируются известные леммы, используемые для доказательства утверждений магистерской диссертации.

Лемма **1.** *(Равенства для одномерной суммы Гаусса) Справедливы следующие утверждения:*

1. Если $(q_1, q_2) = 1$, *то*

$$S(q_1 q_2, l, m) = S(q_1, l q_2, m) S(q_2, l q_1, m).$$

2. Если $(q, 2l) = 1$, *то*

$$S(q, l, m) = \exp\left(-2\pi i (4l)^* m^2/q\right) \left(\frac{l}{q}\right) S(q, 1, 0),$$

где $4l(4l)^* \equiv 1 \pmod q$, $\left(\frac{l}{q}\right)$ *— символ Якоби.*

3. Если $(q, 2) = 1$, *то*

$$S(q, 1, 0) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 1 \pmod 4, \\ i\sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} = i^{\frac{(q-1)^2}{4}} \sqrt{q}.$$

4. Если $(l, 2) = 1$, *то*

$$S(2^\alpha, l, 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1, \\ \left(\frac{2}{l}\right)^\alpha 2^{\alpha/2}(1 + i^l), & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

5. Пусть A, B *– целые числа,* $(A, 2) = 1$. *Тогда*

$$S(2, A, B) = 2\chi(B; 2, 1);$$

$$S(2^\alpha, A, B) = \chi(B; 2, 0) \exp\left(-\frac{2\pi i}{2^\alpha} A^* \frac{B^2}{4}\right) S(2^\alpha, A, 0),$$

где $\alpha \geq 2, \;\; AA^* \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$.

6. Если $(q,l) = n$, *то*

$$S(q,l,m) = \begin{cases} nS(q/n, l/n, m/n), & \text{если } n \mid m; \\ 0, & \text{если } n \nmid m. \end{cases}$$

Лемма **2.** *(Свойства суммы Клоостермана) Пусть* $K(q,u,v)$ *— сумма Клоостермана. Справедлива следующие утверждения:*

1. $K(q,-u,-v) = K(q,u,v)$.

2. Если $(w,q) = 1$, *то* $K(q,uw,v) = K(q,u,vw)$.

3. При $(q_1,q_2) = 1$ *имеет место равенство*

$$K(q_1q_2,u,v) = K(q_1,u,v_1)K(q_2,u,v_2),$$

где v_1 *и* v_2 *определены соответственно по модулям* q_1 *и* q_2 *сравнением*

$$v_1q_2^2 + v_2q_1^2 \equiv v \pmod{q_1q_2}.$$

4. Пусть $\alpha > 1$. *Если* $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$, *то*

$$K(p^\alpha,u,v) = pK(p^{\alpha-1}, \frac{u}{p}, \frac{v}{p}).$$

Если $u \not\equiv 0, v \equiv 0 \pmod{p}$ *или если* $u \equiv 0, v \not\equiv 0 \pmod{p}$, *то*

$$K(p^\alpha,u,v) = 0.$$

5. Пусть $(u,p) = 1$, $\alpha > 1$. *Тогда*

$$K(p,u,0) = -1, \quad K(p^\alpha,u,0) = 0.$$

6. Пусть $u = p^\alpha u_1$, $(u_1,p) = 1$, $\alpha > 1$, $s > 1$. *Тогда*

$$K(p^\alpha,u,0) = p^{\alpha-1}(p-1), \quad K(p^{\alpha+1},u,0) = -p^\alpha, \quad K(p^{\alpha+s},u,0) = 0.$$

Лемма **3.** *(Равенства для обобщенной суммы Клоостермана) Пусть p — нечетное простое число и*

$$K_p(p^\alpha,u,v)=\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}(\frac{l}{p})e^{2\pi i\frac{ul+vl^*}{p^\alpha}}$$

— обобщенная сумма Клоостермана. Справедлива следующие утверждения:

1. Пусть $\alpha>1$. Если $u\equiv v\equiv 0 \pmod p$, то

$$K_p(p^\alpha,u,v)=pK_p(p^{\alpha-1},\frac{u}{p},\frac{v}{p}).$$

Если $u\not\equiv 0, v\equiv 0 \pmod p$ или если $u\equiv 0, v\not\equiv 0 \pmod p$, то

$$K_p(p^\alpha,u,v)=0.$$

2. Пусть $(u,p)=1$, $\alpha>1$. Тогда

$$K_p(p,u,0)=S(p,u,0),\quad K_p(p^\alpha,u,0)=0.$$

3. Пусть $u=p^\alpha u_1$, $(u_1,p)=1$, $\alpha>1$, $s>1$. Тогда

$$K_p(p^\alpha,u,0)=0,\quad K_p(p^{\alpha+1},u,0)=p^\alpha S(p,u_1,0),\quad K_p(p^{\alpha+s},u,0)=0.$$

Глава 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В этой главе получена асимптотическая формула для числа решений уравнения Пелля с весами, отвечающими за ограничения на переменные x, y

$$I(n,N)=\sum_{x^2-ny^2=1} e^{-\frac{x^2+y^2}{N}}.$$

В этой задаче n — целое положительное число, не являющееся точным квадратом. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема **1.** *Пусть N — натуральное число. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n,N)=e^{-\frac{1}{N}}(\frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{n+1}}+O(e^{-\ln^2 N})).$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$I(n,N)=\sum_{x^2-ny^2=1} e^{-\frac{x^2+y^2}{N}}.$$

Имеем

$$I(n,N)=\sum_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ny^2+1+y^2}{N}}=e^{-\frac{1}{N}}\sum_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(n+1)y^2}{N}},$$

то есть

$$I(n,N)=e^{-\frac{1}{N}}\ \theta(\frac{n+1}{\pi N}),$$

где

$$\theta(t)=\sum_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2\pi t}$$

— тета–функция Якоби.

Тета–функция удовлетворяет функциональному уравнению [9]

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}\theta(x)\quad (x>0).$$

Пусть
$$\frac{1}{x} = \frac{n+1}{N}, \quad n+1 \leqslant \frac{N}{\ln^2 N}.$$
Тогда
$$\theta(\frac{n+1}{\pi N}) = \frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{n+1}}\,\theta(\frac{\pi N}{n+1}) = \frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{n+1}}\sum_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 N}{n+1}y^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{n+1}}(1 + 2\sum_{y=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 N}{n+1}y^2}) = \frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{n+1}} + O(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{n+1}}\sum_{y=1}^{\infty} e^{-\pi^2 y \ln^2 N}) =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{n+1}} + O(e^{-\ln^2 N}).$$
В результате имеем утверждение теоремы 1. $\square$

Глава 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2—4

Для числа решений $r(n)$ уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ Х. Д. Клоостерманом была получена асимптотическая формула [4]:

$$r(n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} nS(n) + O(n^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi i n l}{q}} S(q, al, 0)S(q, bl, 0)S(q, cl, 0)S(q, dl, 0).$$

Проведем исследование особого ряда данной задачи.

В результате докажем теоремы.

Теорема **2.** *Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения в случаях:*

1. если n и p взаимно просты, коэффициенты a, b, c, d делятся на p;

2. если n и p взаимно просты, три коэффициента квадратичной формы $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ делятся на p, произведение четвертого коэффициента и n является квадратичным невычетом по модулю p.

Теорема **3.** *Пусть*

$$a = p^{\alpha_1} a_1,\ (a_1, p) = 1,\ b = p^{\beta_1} b_1,\ (b_1, p) = 1,\ (c, p) = 1,\ (d, p) = 1,$$

$$n = p^{\eta_1} n_1,\ (n_1, p) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения в случаях:

1. если $\eta_1 < \alpha_1 \le \beta_1$, η_1 – нечетное число, $(\frac{-cd}{p}) = -1$;

2. если $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1$, η_1 – нечетное число, $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$, $(\frac{-cd}{p}) = -1$;

3. если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1$, α_1, η_1 – нечетные числа, $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$, $(\frac{-cd}{p}) = -1$.

Теорема 4. *Пусть*

$$a = p^{\alpha_1}a_1,\ (a_1,p)=1,\ b=p^{\beta_1}b_1,\ (b_1,p)=1,\ c=p^{\gamma_1}c_1,\ (c_1,p)=1,\ (d,p)=1,$$

$$n = p^{\eta_1}n_1, (n_1,p)=1.$$

Уравнение $n = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ *не имеет решения в случаях:*

1. если $\eta_1 < \alpha_1 \le \beta_1 \le \gamma_1$ *и* η_1 *– нечетное число;*

2. если $\eta_1 < \alpha_1 \le \beta_1 \le \gamma_1$, η_1 *– четное число и* $(\frac{dn_1}{p}) = -1$*;*

3. если $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1 \le \gamma_1$, η_1 *– нечетное число и* $(\frac{a_1n_1}{p}) = -1$*;*

4. если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \le \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– четное число и* $(\frac{-a_1d}{p}) = -1$*;*

5. если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \le \gamma_1$, α_1 *– нечетное число и* $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p}) = -1$*;*

6. если $\alpha_1 < \eta_1 = \beta_1 < \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– четное число и* $(\frac{-a_1d}{p}) = -1$, $(\frac{b_1n_1}{p}) = -1$*;*

7. если $\alpha_1 \le \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 *– четное число,* α_1 *– нечетное число,* β_1 *– нечетное число и* $(\frac{-a_1b_1}{p}) = -1$, $(\frac{dn_1}{p}) = -1$*;*

8. если $\alpha_1 \le \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– нечетное число,* β_1 *– четное число и* $(\frac{-b_1d}{p}) = -1$, $(\frac{a_1n_1}{p}) = -1$*;*

9. если $\alpha_1 \le \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 *– нечетное число,* α_1 *– четное число,* β_1 *– нечетное число и* $(\frac{-a_1d}{p}) = -1$, $(\frac{b_1n_1}{p}) = -1$.

Доказательство. Для особого ряда асимптотической формулы Клоостермана

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi inl}{q}} S(q,al,0)S(q,bl,0)S(q,cl,0)S(q,dl,0)$$

рассмотрим функцию

$$\Phi(q) = q^{-4} \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi inl}{q}} S(q,al,0)S(q,bl,0)S(q,cl,0)S(q,dl,0).$$

Она является мультипликативной.

По свойству мультипликативной функции получим представление ряда виде произведения

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Phi(q) = \prod_{p\backslash q} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + ...).$$

Рассмотрим явные формулы для всех таких возможных произведений при нечетном простом p.

1, Случай, когда все коэффициенты взаимно просты с p

Пусть $(a,p) = 1, (b,p) = 1, (c,p) = 1, (d,p) = 1, (n,p) = 1$. Тогда для произведения сумм Гаусса (лемма 1 утверждения 2,3) получаем формулу

$$S(p^\alpha, al, 0)S(p^\alpha, bl, 0)S(p^\alpha, cl, 0)S(p^\alpha, dl, 0) = \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) p^{2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Phi(p^\alpha) = \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) p^{-2\alpha} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) p^{-2\alpha} K(p^\alpha, -n, 0).$$

Используя равенство 5 из леммы 2, получаем, что

$$\Phi(p) = -\left(\frac{abcd}{p}\right) p^{-2},$$

$$\Phi(p^\alpha) = 0, \quad \alpha > 1.$$

Получаем 1-ый множитель в представлении особого ряда в виде произведений по простым числам:

$$\prod_{\substack{(a,p)=1 \\ (b,p)=1 \\ (c,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ (n,p)=1}} \left(1 - \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p^2}\right).$$

Если $abcd$ — квадратичный вычет по модулю p, то

$$1 - \left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p^2} = 1 - \frac{1}{p^2} > 3/4.$$

Если $abcd$ — квадратичный невычет по модулю p, то

$$1 - \left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p^2} = 1 + \frac{1}{p^2} > 1.$$

Скобка стремится к 1 с ростом p.

2. Случай, когда все коэффициенты взаимно просты с p, а n делится на p

Пусть $(a,p) = 1, (b,p) = 1, (c,p) = 1, (d,p) = 1, n = p^{\alpha}n_1, (n_1,p) = 1$. Формулы для произведения сумм Гаусса аналогичны:

$$\Phi(p^{\alpha}) = \left(\frac{abcd}{p^{\alpha}}\right)p^{-2\alpha}K(p^{\alpha}, -n, 0).$$

Изменятся формулы для суммы Клоостермана. Используя равенство 6 из леммы 2, получаем, что

$$\Phi(p^k) = \left(\frac{abcd}{p^k}\right)p^{-2k}\varphi(p^k) = \left(\frac{abcd}{p^k}\right)\frac{p-1}{p^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \alpha,$$

$$\Phi(p^{\alpha+1}) = -\left(\frac{abcd}{p^{\alpha+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha+2}}.$$

$$\Phi(p^{\alpha+s}) = 0, \quad s > 1.$$

Получаем 2-ой множитель в представлении особого ряда в виде произведений по простым числам:

$$\prod_{\substack{(a,p)=1\\(b,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\alpha}n_1,(n_1,p)=1}} \left(1 + \left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{p-1}{p^2} + \left(\frac{abcd}{p^2}\right)\frac{p-1}{p^3} + \cdots + \left(\frac{abcd}{p^{\alpha}}\right)\frac{p-1}{p^{\alpha+1}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{abcd}{p^{\alpha+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha+2}}\right).$$

Если $abcd$ — квадратичный вычет по модулю p, то в данной скобке происходит взаимное уничтожение слагаемых, в результате получаем множитель:

$$1 + \frac{p^{\alpha+1} - p - 1}{p^{\alpha+2}} > 1.$$

Скобка стремится к 1 с ростом p.

Если $abcd$ — квадратичный невычет по модулю p, то в данной скобке содержится геометрическая прогрессия со знаменателем $-1/p$:

$$1 + \frac{p^{\alpha+1} - p^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha}(p^2+1)}{p^{\alpha+2}(p+1)} > 5/8.$$

Скобка стремится к 1 с ростом p.

3. Случай, когда один из коэффициентов делится на p, $(n, p) = 1$

Пусть $a = p^{\alpha_1}a_1, (a_1, p) = 1, (b, p) = 1, (c, p) = 1, (d, p) = 1, (n, p) = 1.$

Найдем $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = p^{-4}p(\frac{bcd}{p})S^3(p, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^{p} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p}}.$$

Используя лемму 3 (утверждение 2), получаем, что

$$\Phi(p) = p^{-4}p(\frac{-bcdn}{p})S^4(p, 1, 0) = p^{-1}(\frac{-bcdn}{p}).$$

Пусть $1 < \alpha \le \alpha_1$. Тогда

$$\Phi(p^{\alpha}) = p^{-4\alpha}p^{\alpha}(\frac{bcd}{p^{\alpha}})S^3(p^{\alpha}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\alpha})=1}}^{p^{\alpha}} \left(\frac{l}{p^{\alpha}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\alpha}}}.$$

Если α – четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\alpha})=1}}^{p^{\alpha}} \left(\frac{l}{p^{\alpha}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\alpha}}} = K(p^{\alpha}, -n, 0) = 0$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 5).

Если α – нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^\alpha}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}} = K_p(p^\alpha, -n, 0) = 0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 2).

Тогда $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Пусть $\alpha > \alpha_1 \geq 1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} p^{\alpha_1} (\frac{bcd}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}}) S^3(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}.$$

Имеем

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}} = 0$$

для четного α_1 в силу леммы 2 (утверждение 5), для нечетного α_1 в силу леммы 2 (утверждение 2). Тогда $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\(b,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\(n,p)=1}} \left(1 + (\frac{-bcdn}{p})\frac{1}{p}\right).$$

Данная скобка больше 1, если $(-bcdn)$ — квадратичный вычет по модулю p; больше 1/2 и стремится к 1 с ростом p, если $(-bcdn)$ — квадратичный невычет по модулю p.

4. Случай, когда два коэффициента делятся на p, $(n,p)=1$

Пусть

$$a = p^{\alpha_1} a_1, (a_1, p) = 1, b = p^{\beta_1} b_1, (b_1, p) = 1, (c, p) = 1, (d, p) = 1, (n, p) = 1.$$

Имеем

$$\Phi(p) = p^{-4}p^2(\frac{cd}{p})S^2(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p} e^{-\frac{2\pi inl}{p}} = -\left(\frac{-cd}{p}\right)p^{-1}.$$

Пусть $\min(\alpha_1,\beta_1)=\alpha_1$.

4.1) При $1<\alpha\le\alpha_1$ с учетом утверждения 5 (лемма 2):

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha}p^{2\alpha}(\frac{cd}{p^\alpha})S^2(p^\alpha,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}} = 0.$$

4.2) При $\alpha_1<\alpha\le\beta_1$

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha}p^{\alpha_1}(\frac{cd}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})S^2(p^\alpha,1,0)S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}.$$

Сумма Клоостермана

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}$$

равна нулю. При четном $\alpha-\alpha_1$ это следует из утверждения 5 леммы 2, при нечетном – из утверждения 2 леммы 3. Поэтому $\Phi(p^\alpha)=0$.

4.3) При $\alpha_1\le\beta_1<\alpha$

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha}p^{\alpha_1+\beta_1}(\frac{cd}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\alpha-\beta_1}})\cdot$$

$$\cdot S^2(p^\alpha,1,0)S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0)S(p^{\alpha-\beta_1},1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}.$$

Как и в случае 4.2. имеем $\Phi(p^\alpha)=0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ (n,p)=1}}\left(1-(\frac{-cd}{p})\frac{1}{p}\right).$$

Данная скобка больше 1/2, если $(-cd)$ — квадратичный вычет по модулю p; больше 1 и стремится к 1 с ростом p, если $(-cd)$ — квадратичный невычет по модулю p.

5. Случай, когда три коэффициента делятся на p, $(n,p)=1$

Пусть

$$a = p^{\alpha_1}a_1, (a_1,p) = 1, b = p^{\beta_1}b_1, (b_1,p) = 1, c = p^{\gamma_1}c_1, (c_1,p) = 1,$$

$$(d,p) = 1, (n,p) = 1.$$

Найдем $\Phi(p)$.

$$\Phi(p) = p^{-4}p^3(\frac{d}{p})S(p,1,0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^{p} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p}}.$$

Используя лемму 3 (утверждение 2), получаем, что

$$\Phi(p) = p^{-1}(\frac{-dn}{p})S^2(p,1,0) = (\frac{dn}{p}).$$

Пусть $\alpha_1 \le \beta_1 \le \gamma_1$. Из утверждения 5 леммы 2 и из утверждения 2 леммы 3 получим, что $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Имеем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ (n,p)=1}} \left(1 + (\frac{dn}{p})\right).$$

Данная скобка равна нулю, если dn — квадратичсный невычет по модулю p; равна двум, если dn — квадратичсный вычет по модулю p

6. Случай, когда все коэффициенты делятся на p, $(n,p)=1$

В этом случае уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2$ не имеет решений.

Выводы.

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения в случаях:

1. если n и p взаимно просты, коэффициенты a, b, c, d делятся на p;

2. если n и p взаимно просты, три коэффициента квадратичной формы $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ делятся на p, произведение четвертого коэффициента и n является квадратичным невычетом по модулю p.

7. Случай, когда один из коэффициентов и n делятся на p

Пусть

$$a = p^{\alpha_1}a_1, (a_1, p) = 1, (b, p) = 1, (c, p) = 1, (d, p) = 1, n = p^{\eta_1}n_1, (n_1, p) = 1.$$

7.1) Рассмотрим $\eta_1 < \alpha_1$. Тогда

$$\Phi(p) = p^{-4}p(\frac{bcd}{p})S^3(p, 1, 0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p} \left(\frac{l}{p}\right) = 0.$$

Пусть $\alpha \leq \eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha}p^\alpha(\frac{bcd}{p^\alpha})S^3(p^\alpha, 1, 0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^\alpha}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}.$$

Если α — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^\alpha}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}} = K(p^\alpha, -n, 0) = p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если α — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^\alpha}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}} = K_p(p^\alpha, -n, 0) = 0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Для $p \equiv 1 \pmod 4$: $p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$ и $S^3(p^\alpha, 1, 0) = p^{3\alpha/2}$.

Для $p \equiv 3 \pmod 4$ при четных α: $p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$ и $S^3(p^\alpha, 1, 0) = p^{3\alpha/2}$.

Тогда для четных α: $\Phi(p^\alpha) = p^{-\alpha/2-1}(p-1)$.

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4}p^{\eta_1+1}(\frac{bcd}{p^{\eta_1+1}})S^3(p^{\eta_1+1}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если η_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если η_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p, 1, 0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Если $p \equiv 3 \pmod 4$, то $p^{\eta_1+1} \equiv 1 \pmod 4$ для нечетного η_1. Тогда

$$S^3(p^{\eta_1+1}, 1, 0) = p^{3(\eta_1+1)/2}.$$

Если $p \equiv 3 \pmod 4$, то $p^{\eta_1+1} \equiv 3 \pmod 4$ для четного η_1 и

$$S^3(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S(p, 1, 0) = p^{3\eta_1/2+2}.$$

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} -p^{-\eta_1/2-3/2}, & \text{если } \eta_1 \text{ – нечетное}, \\ (\frac{-bcdn_1}{p})p^{-\eta_1/2-1}, & \text{если } \eta_1 \text{ – четное}. \end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда в функции $\Phi(p^\alpha)$ будет входить либо сумма Клоостермана, либо обобщенная сумма Клоостермана, которые будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть η_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\(b,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\\eta_1<\alpha_1}} \left(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+(\frac{-bcdn_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\right).$$

Пусть η_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\(b,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\\eta_1<\alpha_1}} \left(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}-\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right).$$

Если η_1 - нечетное, то скобка больше 3/4; η_1 — четное и $(-n_1bcd)$ — квадратичный вычет по модулю p, то скобка больше 1; η_1 — четное и $(-n_1bcd)$ — квадратичный невычет по модулю p, то скобка больше 1 и стремится к 1 с ростом p.

7.2) Пусть $\eta_1 = \alpha_1$.

Если $1 \le \alpha \le \eta_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 7.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha) = p^{-\alpha/2-1}(p-1)$.

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4}p^{\eta_1}(\frac{bcd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p})S^3(p^{\eta_1+1},1,0)S(p,1,0)\times$$

$$\times \sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+2}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если η_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+2}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если η_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+2}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p, 1, 0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Если $p \equiv 3 \pmod 4$, то $p^{\eta_1+1} \equiv 1 \pmod 4$ для нечетного η_1. Тогда

$$S^3(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S^2(p, 1, 0) = -p^{3\eta_1/2+5/2}.$$

Если η_1 — четное, то $p^{\eta_1+1} \equiv 3 \pmod 4$ и

$$S^3(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S(p, 1, 0) = p^{3\eta_1/2+2}.$$

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} (\frac{a_1n_1}{p})p^{-\eta_1/2-3/2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — нечетное,} \\ -(\frac{a_1bcd}{p})p^{-\eta_1/2-2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — четное.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть η_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\(b,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\\eta_1=\alpha_1}} \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\eta_1/2+1}} - (\frac{a_1bcd}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right).$$

Если (a_1bcd) — квадратичный вычет по модулю p, то скобка больше 1; если (a_1bcd) — квадратичный невычет по модулю p, то скобка больше 1 и стремится к 1 с ростом p.

Пусть η_1 - нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\(b,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\\eta_1=\alpha_1}}\left(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}+(\frac{a_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}})\right).$$

Скобка больше 1.

7.3) Пусть $\eta_1>\alpha_1$.

Если $1\le\alpha\le\alpha_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 7.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha)=p^{-\alpha/2-1}(p-1)$.

Пусть $\alpha_1<\alpha\le\eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha)=p^{-4\alpha}p^{\alpha_1}(\frac{bcd}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})S^3(p^\alpha,1,0)S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}.$$

Если α_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}=K(p^\alpha,-n,0)=p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если α_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}=\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p}\right)=0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда для четного α_1:

$$\Phi(p^\alpha)=(\frac{bcd}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})p^{-\alpha+\alpha_1/2-1}(p-1).$$

Пусть $\alpha=\eta_1+1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1}(\frac{bcd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})S^3(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если α_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если α_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p, 1, 0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Если α_1 — нечетное, то

$$S^3(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1}, 1, 0)S(p, 1, 0) = (\frac{-1}{p^{\eta_1}})p^{2\eta_1+5/2-\alpha_1/2}.$$

Если α_1 — четное, то

$$S^3(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1}, 1, 0)S(p, 1, 0) = p^{2\eta_1+2-\alpha_1/2}.$$

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} (\frac{-a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{bcd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-n_1}{p})p^{-\eta_1-3/2+\alpha_1/2}, & \text{если } \alpha_1 \text{ — нечетное,} \\ -(\frac{a_1bcd}{p^{\eta_1+1}})p^{-\eta_1-2+\alpha_1/2}, & \text{если } \alpha_1 \text{ — четное.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть α_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ (b,p)=1 \\ (c,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \eta_1>\alpha_1}} (1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\alpha_1/2+1}} +$$

$$+p^{\alpha_1/2}((\frac{a_1bcd}{p})\frac{p-1}{p^{\alpha_1+2}}+\ldots+(\frac{a_1bcd}{p^{\eta_1}})\frac{p-1}{p^{\eta_1+1}}-(\frac{a_1bcd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{\eta_1+2}})).$$

Пусть (a_1bcd) — квадратичный вычет по модулю p. Тогда получим множитель

$$(1+\frac{1}{p}-p^{\alpha_1/2}(\frac{1}{p^{\eta_1+1}}+\frac{1}{p^{\eta_1+2}}))>1,$$

который стремится к 1 с ростом p.

Пусть (a_1bcd) — квадратичный невычет по модулю p. Тогда получим множитель

$$(1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p^{\alpha_1/2+1}}\frac{1-(-1/p)^{\eta_1-\alpha_1}}{1+1/p}+(-1)^{\eta_1+1}\frac{p-1}{p^{\eta_1+2-\alpha_1/2}})>1,$$

который стремится к 1 с ростом p.

Пусть α_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\(b,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\\eta_1>\alpha_1}}\left(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\alpha_1+1)/2}}+(\frac{-a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{bcd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+1)/2}}{p^{\eta_1+2}}\right),$$

который стремится к 1 с ростом p.

Выводы:

Если $(n,p)>1$ и один из коэффициентов делится на p, то уравнение $ax^2+by^2+cz^2+du^2=n$ всегда имеет решение.

8. Случай, когда два из коэффициентов и n делятся на p

Пусть

$$a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1,b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1,(c,p)=1,(d,p)=1,$$

$$n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1.$$

Без ограничений можем считать, что $\alpha_1 \le \beta_1$.

8.1) Пусть $\eta_1 < \alpha_1 \le \beta_1$.

Для $1 \le \alpha \le \eta_1$

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} p^{2\alpha} (\frac{cd}{p^\alpha}) S^2(p^\alpha, 1, 0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = (\frac{-cd}{p^\alpha}) \frac{p-1}{p}.$$

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4} p^{2\eta_1+2} (\frac{cd}{p^{\eta_1+1}}) S^2(p^{\eta_1+1}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} =$$

$$= -p^{-4\eta_1-4} p^{2\eta_1+2} (\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}}) p^{\eta_1+1} p^{\eta_1} = -(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}}) \frac{1}{p}.$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда в функции $\Phi(p^\alpha)$ будет входить либо сумма Клоостермана, либо обобщенная сумма Клоостермана, которые будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\1\le\eta_1<\alpha_1\le\beta_1}} \left(1 + \frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p}) + \ldots + (\frac{-cd}{p^{\eta_1}}) - (\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p-1}\right)\right).$$

Если $(-cd)$ — квадратичный вычет по модулю p, то данная скобка равна

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{\eta_1(p-1)}{p},$$

и она будет больше $1/2 + \eta_1/2$ и стремиться к $\eta_1 + 1$ с ростом p.

Если $(-cd)$ — квадратичный невычет по модулю p и η_1 — четное, то данная скобка равна $1 + 1/p$, и она будет больше 1, стремиться к 1 с ростом p.

Если η_1 — нечетное, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}(-1-\frac{1}{p-1})=0.$$

8.2) Пусть $\eta_1=\alpha_1<\beta_1$.

Если $1\le\alpha\le\eta_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 8.1, т.е.

$$\Phi(p^\alpha)=(\frac{-cd}{p^\alpha})\frac{p-1}{p}.$$

Пусть $\alpha=\eta_1+1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=$$

$$=p^{-4\eta_1-4}p^{2\eta_1+1}(\frac{cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p})S^2(p^{\eta_1+1},1,0)S(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=$$

$$=p^{-4\eta_1-4}p^{2\eta_1+1}(\frac{cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p})S^2(p^{\eta_1+1},1,0)S(p,1,0)p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)=$$

$$=(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1n_1}{p})\frac{1}{p}.$$

Пусть $\alpha>\eta_1+1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\1\le\eta_1=\alpha_1\le\beta_1}}\left(1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\eta_1}})\right)+(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1n_1}{p})\frac{1}{p}\right).$$

Если $(-cd)$ — квадратичный вычет по модулю p, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\eta_1+(\frac{a_1n_1}{p})\frac{1}{p}>\frac{\eta_1}{2}$$

и стремится к $1+\eta_1$ с ростом p.

Если $(-cd)$ — квадратичный утвычет по модулю p и η_1 — четное, то данная скобка равна

$$1 - (\frac{a_1 n_1}{p})\frac{1}{p},$$

и она будет больше $1/2$ при $(\frac{a_1 n_1}{p}) = 1$; больше 1 при $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$ и стремиться к 1 с ростом p.

Если η_1 — нечетное, то данная скобка равна

$$1 - \frac{p-1}{p} + (\frac{a_1 n_1}{p})\frac{1}{p},$$

и она будет при $(\frac{a_1 n_1}{p}) = 1$ равна $2/p$, при $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$ равна 0.

8.3) Пусть $\eta_1 = \alpha_1 = \beta_1$.

Если $1 \leq \alpha \leq \eta_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 8.1, т.е.

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-cd}{p^\alpha})\frac{p-1}{p}.$$

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4}p^{2\eta_1}(\frac{cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1 b_1}{p})S^2(p^{\eta_1+1},1,0)S^2(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} =$$

$$= -p^{-4\eta_1-4}p^{2\eta_1}(\frac{cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1 b_1}{p})S^2(p^{\eta_1+1},1,0)S^2(p,1,0)p^{\eta_1} =$$

$$= -(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-a_1 b_1}{p})\frac{1}{p^2}.$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ 1\leq\eta_1=\alpha_1=\beta_1}} \left(1 + \frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p}) + ... + (\frac{-cd}{p^{\eta_1}})\right) - (\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-a_1 b_1}{p})\frac{1}{p^2}\right).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = 1$, то данная скобка равна

$$1 + \frac{p-1}{p}\eta_1 - (\frac{a_1 b_1}{p})\frac{1}{p^2},$$

и она будет $> 3/4 + \eta_1/2$ и стремиться к $\eta_1 + 1$ с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = -1$ и η_1 — четное, то данная скобка равна

$$1 + (\frac{-a_1 b_1}{p})\frac{1}{p^2},$$

и она будет > 1 при $(\frac{a_1 b_1}{p}) = 1$ и $> 3/4$ при $(\frac{a_1 b_1}{p}) = -1$ и стремиться к 1 с ростом p.

Если η_1 — нечетное, то данная скобка равна

$$1 - \frac{p-1}{p} - (\frac{-a_1 b_1}{p})\frac{1}{p^2},$$

и она будет равна $1/p - 1/p^2 > 0$ при $(\frac{a_1 b_1}{p}) = 1$ и $1/p + 1/p^2 > 0$ при $(\frac{a_1 b_1}{p}) = -1$ и стремиться к 0 с ростом p.

8.4) Пусть $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1$.

Если $1 \le \alpha \le \alpha_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 8.1, т.е.

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-cd}{p^\alpha})\frac{p-1}{p}.$$

Пусть $\alpha_1 < \alpha \le \eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} p^{\alpha_1 + \alpha} (\frac{cd}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}}) S^2(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}}.$$

Если $\alpha - \alpha_1$ — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = K(p^\alpha, -n, 0) = p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $\alpha - \alpha_1$ — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = K_p(p^\alpha, -n, 0) = 0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда для четного $\alpha - \alpha_1$, так как

$$S^2(p^\alpha, 1, 0) = (\frac{-1}{p^\alpha})p^\alpha, \quad S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) = p^{(\alpha-\alpha_1)/2},$$

то

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-cd}{p^\alpha})p^{-(\alpha-\alpha_1)/2-1}(p-1).$$

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Имеем

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\eta_1+1}(\frac{cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})S^2(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1}, 1, 0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если $\eta_1 - \alpha_1$ — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $\eta_1 - \alpha_1$ — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p, 1, 0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Так как

$$S^2(p^{\eta_1+1}, 1, 0) = (\frac{-1}{p^{\eta_1+1}})p^{\eta_1+1}, \quad S(p^{\eta_1+1-\alpha_1}, 1, 0)S(p, 1, 0) = p^{(\eta_1+2-\alpha_1)/2},$$

тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} -(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})p^{-\eta_1/2-3/2+\alpha_1/2}, & \text{если } \eta_1-\alpha_1 \text{ — нечетное,} \\ (\frac{a_1n_1}{p})(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})p^{-\eta_1/2-1+\alpha_1/2}, & \text{если } \eta_1-\alpha_1 \text{ — четное.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1+1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть α_1 и η_1 — четные. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ (c,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ 1\le\alpha_1<\eta_1<\beta_1}} (1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{p}+...+\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2}}\right)+(\frac{a_1n_1}{p})(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}+(\frac{a_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}},$$

и она будет $> 1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}-(\frac{a_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}},$$

и она будет >1 при $(\frac{a_1n_1}{p})=1$ и >1 при $(\frac{a_1n_1}{p})=-1$ и стремиться к 1 с ростом p.

Пусть α_1 — четное и η_1 — нечетное или наоборот. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ (c,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ 1\le\alpha_1<\eta_1<\beta_1}} (1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1+4}})\frac{1}{p^2}...+(\frac{-cd}{p^{\eta_1-1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1-1)/2}}\right)-$$

$$-(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+1)/2}}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}},$$

и она будет $>1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$, α_1 – четное и η_1 - нечетное, то получим скобку

$$1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+1)/2}}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}},$$

и она будет $>3/4$ и стремиться к 1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$, α_1 – нечетное и η_1 - четное, то получим скобку

$$\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}},$$

и она будет >0 и стремиться к 0 с ростом p.

Пусть α_1 и η_1 — нечетные. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ 1\le\alpha_1<\eta_1<\beta_1}}(1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1+4}})\frac{1}{p^2}+...+(\frac{-cd}{p^{\eta_1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2}}\right)+$$

$$+(\frac{a_1n_1}{p})(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}+(\frac{a_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}},$$

и она будет $> 1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = -1$, то данная скобка равна

$$\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}(1+(\frac{a_1n_1}{p})),$$

и она будет > 0 при $(\frac{a_1n_1}{p}) = 1$ и стремиться к 0 с ростом p; равна 0 при $(\frac{a_1n_1}{p}) = -1$.

8.5) Пусть $\alpha_1 < \eta_1 = \beta_1$.

Если $1 \le \alpha \le \alpha_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 8.1, т.е.

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-cd}{p^\alpha})\frac{p-1}{p}.$$

Если $\alpha_1 < \alpha \le \eta_1$, то для четного $\alpha-\alpha_1$:

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-cd}{p^\alpha})\frac{p-1}{p^{(\alpha-\alpha_1)/2+1}}.$$

Пусть $\alpha = \eta_1+1$. Получим

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\eta_1}(\frac{cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p})\cdot$$

$$\cdot S^2(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p,1,0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если $\eta_1-\alpha_1$ — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1},-n,0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $\eta_1-\alpha_1$ — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1},-n,0) = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Так как

$$S^2(p^{\eta_1+1},1,0)=(\frac{-1}{p^{\eta_1+1}})p^{\eta_1+1},\quad S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S^2(p,1,0)=(\frac{-1}{p})p^{(\eta_1+2-\alpha_1)/2},$$

тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=\begin{cases}(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{b_1n_1}{p})p^{-\eta_1/2-3/2+\alpha_1/2}, & \text{если } \eta_1-\alpha_1 \text{ — нечетное,}\\ -(\frac{-a_1b_1}{p})(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})p^{-\eta_1/2-2+\alpha_1/2}, & \text{если } \eta_1-\alpha_1 \text{ — четное.}\end{cases}$$

Пусть $\alpha>\eta_1+1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть α_1 и η_1 — четные. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1}}(1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+...+(\frac{-cd}{p^{\eta_1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2}}\right)-(\frac{-a_1b_1}{p})(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+2}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}-(\frac{-a_1b_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+2}},$$

и она будет $>1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}+(\frac{-a_1b_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+2}},$$

и она будет $>11/8$ при $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и >1 при $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и стремиться к 1 с ростом p.

Пусть α_1 — четное и η_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1}} (1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+...+(\frac{-cd}{p^{\eta_1-1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1-1)/2}}\right)+(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+1)/2}}+(\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}},$$

и она будет $>1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+1)/2}}+(\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}},$$

и она будет $>3/4$ при $(\frac{b_1n_1}{p})=-1$ и >1 при $(\frac{b_1n_1}{p})=1$ и стремиться к 1 с ростом p.

Пусть α_1 и η_1 — нечетные. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1}} (1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+...+(\frac{-cd}{p^{\eta_1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2}}\right)-(\frac{-a_1b_1}{p})(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+2}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}}-(\frac{-a_1b_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+2}},$$

и она будет $>1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = -1$, то данная скобка равна

$$\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+1}} - (\frac{-a_1b_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1)/2+2}},$$

и она будет > 0 и стремиться к 0 с ростом p.

Пусть α_1 — нечетное и η_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1}} (1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+...+(\frac{-cd}{p^{\eta_1-1}})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1-1)/2}}\right)+(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = 1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+1)/2}}+(\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}},$$

и она будет $> 1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = -1$, то данная скобка равна

$$\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+1)/2}} - (\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1-\alpha_1+3)/2}},$$

и она будет > 0 и стремиться к 0 с ростом p.

8.6) Пусть $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1$.

Если $1 \leq \alpha \leq \alpha_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 8.1, т.е.

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-cd}{p^\alpha})\frac{p-1}{p}.$$

Если $\alpha_1 < \alpha \leq \beta_1$, то для четного $\alpha - \alpha_1$:

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-cd}{p^\alpha})\frac{p-1}{p^{(\alpha-\alpha_1)/2+1}}.$$

Пусть $\beta_1 < \alpha \leq \eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} p^{\alpha_1+\beta_1} (\frac{cd}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\alpha-\beta_1}}) S^2(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) S(p^{\alpha-\beta_1}, 1, 0) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}}.$$

Если $\alpha_1 + \beta_1$ — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = K(p^\alpha, -n, 0) = p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $\alpha_1 + \beta_1$ — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = K_p(p^\alpha, -n, 0) = 0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда для четного $\alpha_1 + \beta_1$, так как

$$S^2(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) S(p^{\alpha-\beta_1}, 1, 0) =$$

$$= (\frac{-1}{p^\alpha}) i^{(p^{\alpha-\alpha_1}-1)^2/4} i^{(p^{\alpha-\beta_1}-1)^2/4} p^{2\alpha-(\alpha_1+\beta_1)/2} =$$

$$= \begin{cases} (\frac{-1}{p^\alpha})(\frac{-1}{p^{\alpha+1}}) p^{2\alpha-(\alpha_1+\beta_1)/2}, \text{если } \alpha_1, \beta_1 \text{ — нечетные}, \\ p^{2\alpha-(\alpha_1+\beta_1)/2}, \text{если } \alpha_1, \beta_1 \text{ — четные}. \end{cases}$$

то

$$\Phi(p^\alpha) = \begin{cases} (\frac{-a_1 b_1}{p^{\alpha+1}})(\frac{-cd}{p^\alpha}) \frac{p-1}{p^{\alpha+1-(\alpha_1+\beta_1)/2}}, \text{если } \alpha_1, \beta_1 \text{ — нечетные}, \\ (\frac{a_1 b_1 cd}{p^\alpha}) \frac{p-1}{p^{\alpha+1-(\alpha_1+\beta_1)/2}}, \text{если } \alpha_1, \beta_1 \text{ — четные}. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1} (\frac{cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}}) \cdot$$

$$\cdot S^2(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\beta_1},1,0)\cdot$$
$$\cdot\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если $\alpha_1+\beta_1$ — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=K(p^{\eta_1+1},-n,0)=-p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $\alpha_1+\beta_1$ — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=K_p(p^{\eta_1+1},-n,0)=p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Так как

$$S^2(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\beta_1},1,0)=$$
$$=(\frac{-1}{p^{\eta_1+1}})i^{(p^{\eta_1+1-\alpha_1}-1)^2/4}i^{(p^{\eta_1+1-\beta_1}-1)^2/4}p^{2(\eta_1+1)-(\alpha_1+\beta_1)/2},$$

то

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=\begin{cases}(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}})(\frac{n_1}{p})\dfrac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}, \text{если } \alpha_1+\beta_1 \text{ — нечетное},\\ -(\frac{a_1b_1cd}{p^{\eta_1+1}})p^{-\eta_1-2+(\alpha_1+\beta_1)/2}, \text{если } \alpha_1,\beta_1 \text{ — четные},\\ -(\frac{-a_1b_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})p^{-\eta_1-2+(\alpha_1+\beta_1)/2}, \text{если } \alpha_1,\beta_1 \text{ — нечетные}.\end{cases}$$

Пусть $\alpha>\eta_1+1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть α_1 — четное, β_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\(c,p)=1\\(d,p)=1\\n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\\alpha_1\le\beta_1<\eta_1}}(1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1+4}})\frac{1}{p^2}+...+(\frac{-cd}{p^{\beta_1}})\frac{1}{p^{(\beta_1-\alpha_1)/2}}\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p^{1-(\alpha_1+\beta_1)/2}}\left((\frac{a_1b_1cd}{p^{\beta_1+1}})\frac{1}{p^{\beta_1+1}}+(\frac{a_1b_1cd}{p^{\beta_1+2}})\frac{1}{p^{\beta_1+2}}+...+(\frac{a_1b_1cd}{p^{\eta_1}})\frac{1}{p^{\eta_1}}\right)-$$

$$-(\frac{a_1b_1cd}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{\eta_1+2-(\alpha_1+\beta_1)/2}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$ и $\left(\frac{a_1b_1cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет $>1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$ и $\left(\frac{a_1b_1cd}{p}\right)=-1$, то

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p^{(\beta_1-\alpha_1)/2}(p+1)}\left(1-(-\frac{1}{p})^{\eta_1-\beta_1}\right)+$$

$$+(-1)^{\eta_1-1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}}+(-1)^{\eta_1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет $>1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$ и $\left(\frac{a_1b_1cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет >1 и стремиться к 1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$ и $\left(\frac{a_1b_1cd}{p}\right)=-1$, то

$$1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p^{(\beta_1-\alpha_1)/2}(p+1)}\left(1-(-\frac{1}{p})^{\eta_1-\beta_1}\right)+$$

$$+(-1)^{\eta_1-1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}}+(-1)^{\eta_1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет >1 и стремиться к 1 с ростом p.

Пусть α_1 — нечетное, β_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1}}(1+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p})+...+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1}})\right)+$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p} + (\frac{-cd}{p^{\alpha_1+4}})\frac{1}{p^2} + ... + (\frac{-cd}{p^{\beta_1}})\frac{1}{p^{(\beta_1-\alpha_1)/2}} \right) +$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\beta_1+1}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\beta_1+2}})\frac{1}{p^{\beta_1+1-(\alpha_1+\beta_1)/2}} + ... + (\frac{-cd}{p^{\eta_1}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2}} \right) -$$

$$-(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\eta_1}})\frac{1}{p^{\eta_1+2-(\alpha_1+\beta_1)/2}}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = 1$ и $\left(\frac{-a_1b_1}{p}\right) = 1$, то данная скобка равна

$$1 + \frac{p-1}{p}\alpha_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}} - \frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет $> 1 + \alpha_1/2$ и стремиться к $\alpha_1 + 1$ с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = 1$ и $\left(\frac{-a_1b_1}{p}\right) = -1$, то

$$1 + \frac{p-1}{p}\alpha_1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{p^{(\beta_1-\alpha_1)/2}(p+1)}\left(1 - (-\frac{1}{p})^{\eta_1-\beta_1}\right) +$$

$$+(-1)^{\eta_1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}} + (-1)^{\eta_1+1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет $> 1 + \alpha_1/2$ и стремиться к $\alpha_1 + 1$ с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = -1$ и $\left(\frac{-a_1b_1}{p}\right) = 1$, то данная скобка равна

$$\frac{2}{p^{(\beta_1-\alpha_1)/2}(p+1)}\left(1 - (-\frac{1}{p})^{\eta_1-\beta_1}\right) + (-1)^{\eta_1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}} + (-1)^{\eta_1}\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет > 0 и стремиться к 0 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right) = -1$ и $\left(\frac{-a_1b_1}{p}\right) = -1$, то данная скобка равна

$$\frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+1}} + \frac{1}{p^{\eta_1-(\alpha_1+\beta_1)/2+2}},$$

и она будет > 0 и стремиться к 0 с ростом p.

Пусть α_1 — четное, β_1 — нечетное или наоборот α_1 – нечетное, β_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1}} (1 + \frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p}) + ... + (\frac{-cd}{p^{\alpha_1}}) \right) +$$

$$+\frac{p-1}{p}\left((\frac{-cd}{p^{\alpha_1+2}})\frac{1}{p}+(\frac{-cd}{p^{\alpha_1+4}})\frac{1}{p^2}+...+(\frac{-cd}{p^{\beta_1-1}})\frac{1}{p^{(\beta_1-1-\alpha_1)/2}}\right)+$$

$$+(\frac{-cd}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}})(\frac{n_1}{p})p^{-\eta_1-3/2+(\alpha_1+\beta_1)/2}).$$

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{p-1}{p}\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\beta_1-\alpha_1+1)/2}}+(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}})(\frac{n_1}{p})p^{-\eta_1-3/2+(\alpha_1+\beta_1)/2},$$

и она будет $>1+\alpha_1/2$ и стремиться к α_1+1 с ростом p.

Если $\left(\frac{-cd}{p}\right)=-1$, то данная скобка равна

$$1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{(\beta_1-\alpha_1+1)/2}}+(-1)^{\eta_1+1}(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}})(\frac{n_1}{p})p^{-\eta_1-3/2+(\alpha_1+\beta_1)/2},$$

если α_1 – четное. Она будет >1 и стремиться к 1 с ростом p.

Если α_1 – нечетное, то

$$\frac{1}{p^{(\beta_1-\alpha_1+1)/2}}+(-1)^{\eta_1+1}(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}})(\frac{n_1}{p})p^{-\eta_1-3/2+(\alpha_1+\beta_1)/2},$$

она будет >0 и стремиться к 0 с ростом p.

Выводы:

Пусть

$$a=p^{\alpha_1}a_1,\ (a_1,p)=1,\ b=p^{\beta_1}b_1,\ (b_1,p)=1,\ (c,p)=1,\ (d,p)=1,$$

$$n=p^{\eta_1}n_1,\ (n_1,p)=1.$$

Уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ не имеет решения в случаях:

1. если $\eta_1<\alpha_1\le\beta_1$ и η_1 – нечетное число, $(\frac{-cd}{p})=-1$.
2. если $\eta_1=\alpha_1<\beta_1$, $(\frac{-cd}{p})=-1$, $(\frac{a_1n_1}{p})=-1$ и η_1 – нечетное число.
3. если $\alpha_1<\eta_1<\beta_1$, т $(\frac{a_1n_1}{p})=-1$, $(\frac{-cd}{p})=-1$ и α_1, η_1 – нечетные числа.

9. Случай, когда три коэффициента и n делятся на p

Пусть

$$a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1,b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1,c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1,$$

$$(d,p)=1,n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1.$$

Без ограничений можем считать, что $\alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1$.

9.1) Пусть $\eta_1<\alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1$. Найдем $\Phi(p)$.

$$\Phi(p)=p^{-4}p^3(\frac{d}{p})S(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}(\frac{l}{p})=0.$$

Пусть $1<\alpha\le\eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha)=p^{-4\alpha}p^{3\alpha}(\frac{d}{p^\alpha})S(p^\alpha,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^\alpha}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}.$$

Если α — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^\alpha}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}=K(p^\alpha,-n,0)=p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если α — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^\alpha}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}=K_p(p^\alpha,-n,0)=0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда для четных α в силу $S(p^\alpha,1,0)=p^{\alpha/2}$:

$$\Phi(p^\alpha)=p^{\alpha/2-1}(p-1).$$

Пусть $\alpha=\eta_1+1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=p^{-4\eta_1-4}p^{3\eta_1+3}(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})S(p^{\eta_1+1},1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если η_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если η_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} -p^{\eta_1/2-1/2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — нечетное,} \\ (\frac{dn_1}{p})p^{\eta_1/2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — четное.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда в функции $\Phi(p^\alpha)$ будет входить либо сумма Клоостермана, либо обобщенная сумма Клоостермана, которые будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть η_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1<\alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1}} \left(p^{\eta_1/2}(1+(\frac{dn_1}{p}))\right).$$

Данная скобка равна $2p^{\eta_1/2}$ при $(\frac{dn_1}{p}) = 1$ и 0 при $(\frac{dn_1}{p}) = -1$.

Пусть η_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1<\alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1}} (0).$$

9.2) Пусть $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1 \le \gamma_1$.

Если $1 \le \alpha \le \eta_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 9.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha/2-1}(p-1)$.

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) =$$

$$= p^{-4\eta_1-4}p^{3\eta_1+2}(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p})S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p,1,0)\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+2}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если η_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+2}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1},-n,0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если η_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+2}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1},-n,0) = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} (\frac{a_1n_1}{p})p^{\eta_1/2-1/2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — нечетное,} \\ -(\frac{-a_1d}{p})p^{\eta_1/2-1}, & \text{если } \eta_1 \text{ — четное.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда в функции $\Phi(p^\alpha)$ будет входить либо сумма Клоостермана, либо обобщенная сумма Клоостермана, которые будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть η_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1=\alpha_1<\beta_1\leq\gamma_1}} \left(p^{\eta_1/2-1}(p-(\frac{-a_1d}{p}))\right).$$

Данная скобка равна $p^{\eta_1/2-1}(p+1)>0$ при $(\frac{-a_1d}{p})=-1$ и $p^{\eta_1/2-1}(p-1)>0$ при $(\frac{-a_1d}{p})=1$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть η_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1=\alpha_1<\beta_1\leq\gamma_1}} \left(p^{\eta_1/2-1/2}(1+(\frac{a_1n_1}{p}))\right).$$

Данная скобка равна $2p^{\eta_1/2-1/2}$ при $(\frac{a_1n_1}{p})=1$ и 0 при $(\frac{a_1n_1}{p})=-1$.

9.3) Пусть $\eta_1=\alpha_1=\beta_1<\gamma_1$

Если $1\leq\alpha\leq\eta_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 9.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha)=p^{\alpha/2-1}(p-1)$.

Пусть $\alpha=\eta_1+1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=$$

$$=p^{-4\eta_1-4}p^{3\eta_1+1}(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1b_1}{p})S(p^{\eta_1+1},1,0)S^2(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если η_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=K(p^{\eta_1+1},-n,0)=-p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если η_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta_1+1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} -(\frac{-a_1b_1}{p})p^{\eta_1/2-3/2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — нечетное,}\\ (\frac{-a_1b_1dn_1}{p})p^{\eta_1/2-1}, & \text{если } \eta_1 \text{ — четное.}\end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда в функции $\Phi(p^\alpha)$ будет входить либо сумма Клоостермана, либо обобщенная сумма Клоостермана, которые будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть η_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1=\alpha_1=\beta_1<\gamma_1}} \left(p^{\eta_1/2-1}(p+(\frac{-a_1b_1dn_1}{p}))\right).$$

Данная скобка равна $p^{\eta_1/2-1}(p+1)>0$ при $(\frac{-a_1b_1dn_1}{p})=1$ и $p^{\eta_1/2-1}(p-1)>0$ при $(\frac{-a_1b_1dn_1}{p})=-1$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть η_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1=\alpha_1=\beta_1<\gamma_1}} \left(p^{\eta_1/2-3/2}(p-(\frac{-a_1b_1}{p})\right).$$

Данная скобка равна $p^{\eta_1/2-3/2}(p-1)>0$ при $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и $p^{\eta_1/2-3/2}(p+1)>0$ при $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и стремиться к ∞ с ростом p.

9.4) Пусть $\eta_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$

Если $1 \le \alpha \le \eta_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 9.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha/2-1}(p-1)$.

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) =$$

$$= p^{-4\eta_1-4}p^{3\eta_1}(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1b_1c_1}{p})S(p^{\eta_1+1},1,0)S^3(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+4}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если η_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+4}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1},-n,0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если η_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{\eta_1+4}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} (\frac{-a_1b_1c_1n_1}{p})p^{\eta_1/2-3/2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — нечетное,}\\ -(\frac{a_1b_1c_1d}{p})p^{\eta_1/2-2}, & \text{если } \eta_1 \text{ — четное.}\end{cases}$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда в функции $\Phi(p^\alpha)$ будет входить либо сумма Клоостермана, либо обобщенная сумма Клоостермана, которые будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Пусть η_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1=\alpha_1=\beta_1=\gamma_1}} \left(p^{\eta_1/2-2}(p^2-(\frac{a_1b_1c_1d}{p}))\right).$$

Данная скобка равна $p^{\eta_1/2-2}(p^2+1)>0$ при $(\frac{a_1b_1c_1d}{p})=1$ и $p^{\eta_1/2-2}(p^2-1)>0$ при $(\frac{a_1b_1c_1d}{p})=-1$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть η_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \eta_1=\alpha_1=\beta_1=\gamma_1}} \left(p^{\eta_1/2-3/2}(p+(\frac{-a_1b_1c_1n_1}{p}))\right).$$

Данная скобка равна $p^{\eta_1/2-3/2}(p+1)>0$ при $(\frac{-a_1b_1c_1n_1}{p})=1$ и $p^{\eta_1/2-3/2}(p-1)>0$ при $(\frac{-a_1b_1c_1n_1}{p})=-1$ и стремиться к ∞ с ростом p. Если $\eta_1=1$, то скобка стремиться к 1 с ростом p.

9.5) Пусть $\alpha_1<\eta_1<\beta_1\leq\gamma_1$

Если $1\leq\alpha\leq\alpha_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 9.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha)=p^{\alpha/2-1}(p-1)$.

Пусть $\alpha_1<\alpha\leq\eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha)=p^{-4\alpha}p^{2\alpha+\alpha_1}(\frac{d}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})S(p^\alpha,1,0)S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}.$$

Если α_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}=K(p^\alpha,-n,0)=p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если α_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}} = K_p(p^\alpha, -n, 0) = 0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда для четных α_1 в силу

$$S(p^\alpha, 1, 0)S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) = (\frac{-1}{p^\alpha})p^{\alpha-\alpha_1/2}$$

имеем

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-a_1 d}{p^\alpha})p^{\alpha_1/2-1}(p-1),$$

для нечетных α_1: $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4}p^{2\eta_1+2+\alpha_1}(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})S(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1}, 1, 0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если α_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $p \equiv 3 \pmod 4$, то $p^{\eta_1+1} \equiv 1 \pmod 4$ для нечетного η_1, для четного η_1: $p^{\eta_1+1} \equiv 3 \pmod 4$. Тогда для четного α_1:

$$S(p^{\eta_1+1}, 1, 0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1}, 1, 0) = (\frac{-1}{p^{\eta_1+1}})p^{\eta_1+1-\alpha_1/2},$$

в связи с чем имеем

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -(\frac{-a_1 d}{p^{\eta_1+1}})p^{\alpha_1/2-1}.$$

Если α_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+2-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3). Кроме того

$$S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p,1,0) = (\frac{-1}{p})p^{\eta_1+3/2-\alpha_1/2}$$

для нечетного α_1. В силу чего

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = (\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p})p^{\alpha_1/2-1/2}.$$

Пусть α_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1<\beta_1\leq\gamma_1}} (1+p^{\alpha_1/2}-1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1}})\right)-(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1+1}})p^{\alpha_1/2-1})$$

Данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-1}(p-1)(\eta_1-\alpha_1+1)>0$ при $(\frac{-a_1d}{p})=1$; равна $p^{\alpha_1/2-1}(p+1)>0$ при $(\frac{-a_1d}{p})=-1$ и η_1 – четном, равна 0 при $(\frac{-a_1d}{p})=-1$ и η_1 – нечетном.

Пусть α_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1<\beta_1\leq\gamma_1}} (1+p^{(\alpha_1-1)/2}-1+(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p})p^{(\alpha_1-1)/2})$$

Данная скобка равна $2p^{(\alpha_1-1)/2}>0$ при $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p})=1$ и стремиться к ∞ с ростом p; равна 0 при $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p})=-1$.

Если $\alpha_1 = 1$, то получим

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ 1=\alpha_1<\eta_1<\beta_1\le\gamma_1}} (1+(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p})),$$

произведение равно 0 при $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p}) = -1$.

9.6) Пусть $\alpha_1 < \eta_1 = \beta_1 < \gamma_1$

Если $1 \le \alpha \le \alpha_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 9.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha/2-1}(p-1)$, для нечетных α: $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Если $\alpha_1 < \alpha \le \eta_1$, то для четных α_1: $\Phi(p^\alpha) = (\frac{-a_1 d}{p^\alpha})p^{\alpha_1/2-1}(p-1)$, для нечетных α_1: $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) =$$

$$= p^{-4\eta_1-4}p^{2\eta_1+1+\alpha_1}(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p})S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p,1,0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1\\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+3-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если α_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+3-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1},-n,0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если α_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+3-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Так как

$$S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S^2(p,1,0)=(\frac{-1}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-1}{p})p^{\eta_1+2-\alpha_1/2}$$

для четного α_1 и

$$S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p,1,0)=(\frac{-1}{p})p^{\eta_1+3/2-\alpha_1/2}$$

для нечетного α_1.

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=\begin{cases}(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{n_1b_1}{p})p^{\alpha_1/2-1}, & \text{если } \alpha_1 \text{ — четное,}\\ -(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-b_1}{p})p^{\alpha_1/2-3/2}, & \text{если } \alpha_1 \text{ — нечетное.}\end{cases}$$

Пусть α_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1<\gamma_1}}(1+p^{\alpha_1/2}-1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1}})\right)+(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{n_1b_1}{p})p^{\alpha_1/2-1})$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, $(\frac{n_1b_1}{p})=1$, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-1}(p+1+(p-1)(\eta_1-\alpha_1))>0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, $(\frac{n_1b_1}{p})=-1$, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-1}(p-1)(\eta_1-\alpha_1+1)>0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, $(\frac{n_1b_1}{p})=1$, η_1 – нечетное, тогда данная скобка равна $2p^{\alpha_1/2-1}>0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, $(\frac{n_1b_1}{p})=1$, η_1 — четное, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-1}(p-1)>0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, $(\frac{n_1b_1}{p})=-1$, η_1 — нечетное, тогда данная скобка равна 0.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{n_1 b_1}{p}) = -1$, η_1 — четное, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-1}(p+1) > 0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть α_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1<\gamma_1}} (1 + p^{(\alpha_1-1)/2} - 1 - (\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-b_1}{p})p^{\alpha_1/2-3/2})$$

Данная скобка равна $p^{(\alpha_1-3)/2}(p-1) > 0$ при $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-b_1}{p}) = 1$; $p^{(\alpha_1-3)/2}(p+1) > 0$ при $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-b_1}{p}) = -1$ и стремится к ∞ с ростом p.

9.7) Пусть $\alpha_1 < \eta_1 = \beta_1 = \gamma_1$.

Если $1 \le \alpha \le \alpha_1$, то получим равенства для $\Phi(p^\alpha)$, аналогичные тем, что для случая 9.1:

$$\Phi(p^\alpha) = \begin{cases} p^{\alpha/2-1}(p-1), & \text{если } \alpha \text{ — четное,} \\ 0, & \text{если } \alpha \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Если $\alpha_1 < \alpha \le \eta_1$, то

$$\Phi(p^\alpha) = \begin{cases} (\frac{-a_1 d}{p^\alpha})p^{\alpha_1/2-1}(p-1), & \text{если } \alpha_1 \text{ — четное,} \\ 0, & \text{если } \alpha_1 \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) =$$

$$= p^{-4\eta_1-4}p^{2\eta_1+\alpha_1}(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1 c_1}{p})S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S^2(p,1,0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1\\ (l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+4-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если α_1 — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+4-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если α_1 — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{2\eta_1+4-\alpha_1}}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}} = p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Так как

$$S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S^2(p,1,0) = (\frac{-1}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-1}{p})p^{\eta_1+2-\alpha_1/2}$$

для четного α_1 и

$$S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S^3(p,1,0) = p^{\eta_1+5/2-\alpha_1/2}$$

для нечетного α_1.

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \begin{cases} (\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-n_1b_1c_1}{p})p^{\alpha_1/2-3/2}, & \text{если } \alpha_1 \text{ — нечетное,}\\ -(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-b_1c_1}{p})p^{\alpha_1/2-2}, & \text{если } \alpha_1 \text{ — четное.}\end{cases}$$

Пусть α_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1=\gamma_1}} (1+p^{\alpha_1/2}-1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1}})\right)-(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-b_1c_1}{p})p^{\alpha_1/2-2})$$

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$, $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-2}(p^2 + p(p-1)(\eta_1 - \alpha_1) - 1) > 0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$, $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-2}(p^2 + p(p-1)(\eta_1 - \alpha_1) + 1) > 0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = 1$, η_1 — нечетное, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-1}(p-1) > 0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = 1$, η_1 — четное, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-2}(p^2+1) > 0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = -1$, η_1 — нечетное, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-2}(p+1) > 0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = -1$, η_1 — четное, тогда данная скобка равна $p^{\alpha_1/2-1}(p^2-1) > 0$ и стремиться к ∞ с ростом p.

Пусть α_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1<\eta_1=\beta_1=\gamma_1}} (p^{(\alpha_1-1)/2} + (\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-n_1 b_1 c_1}{p})p^{\alpha_1/2-3/2})$$

Данная скобка равна $p^{(\alpha_1-3)/2}(p+1) > 0$ при $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-n_1 b_1 c_1}{p}) = 1$; $p^{(\alpha_1-3)/2}(p-1) > 0$ при $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{-n_1 b_1 c_1}{p}) = -1$ и стремиться к ∞ с ростом p.

9.8) Пусть $\alpha_1 \le \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$

Если $1 \le \alpha \le \alpha_1$, то получим равенства, аналогичные тем, что для случая 9.1, т.е. для четных α: $\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha/2-1}(p-1)$, для нечетных α: $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Если $\alpha_1 < \alpha \le \beta_1$, то для четных α_1:

$$\Phi(p^\alpha) = (\frac{-a_1 d}{p^\alpha})p^{\alpha_1/2-1}(p-1),$$

для нечетных α_1: $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Пусть $\beta_1 < \alpha \le \eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} p^{\alpha_1+\beta_1+\alpha} (\frac{d}{p^\alpha})(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\alpha-\beta_1}}) S(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) S(p^{\alpha-\beta_1}, 1, 0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{3\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}}.$$

Если $3\alpha - \alpha_1 - \beta_1$ — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{3\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = K(p^\alpha, -n, 0) = p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $3\alpha - \alpha_1 - \beta_1$ — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{3\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = K_p(p^\alpha, -n, 0) = 0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Рассмотрим случаи, когда $3\alpha - \alpha_1 - \beta_1$ — четное.

$$S(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) S(p^{\alpha-\beta_1}, 1, 0) = p^{(3\alpha-\alpha_1-\beta_1)/2},$$

если α — четное, α_1 — четное, β_1 — четное. В остальных случаях

$$S(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha-\alpha_1}, 1, 0) S(p^{\alpha-\beta_1}, 1, 0) = (\frac{-1}{p}) p^{(3\alpha-\alpha_1-\beta_1)/2},$$

если α — четное, α_1 — нечетное, β_1 — нечетное; если α — нечетное, α_1 — четное, β_1 — нечетное; если α — нечетное, α_1 — нечетное, β_1 — четное.

Тогда

$$\Phi(p^\alpha) =$$

$$= \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)}{p^{\alpha/2}} \cdot \begin{cases} 1, \text{если } \alpha \text{ — четное, } \alpha_1 \text{ — четное, } \beta_1 \text{ — четное,} \\ (\frac{-a_1 b_1}{p}), \text{если } \alpha \text{ — четное, } \alpha_1 \text{ — нечетное, } \beta_1 \text{ — нечетное,} \\ (\frac{-a_1 d}{p}), \text{если } \alpha \text{ — нечетное, } \alpha_1 \text{ — четное, } \beta_1 \text{ — нечетное,} \\ (\frac{-b_1 d}{p}), \text{если } \alpha \text{ — нечетное, } \alpha_1 \text{ — нечетное, } \beta_1 \text{ — четное,} \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \eta_1 + 1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1} (\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}}) \cdot$$

$$\cdot S(p^{\eta_1+1}, 1, 0) S(p^{\eta_1+1-\alpha_1}, 1, 0) S(p^{\eta_1+1-\beta_1}, 1, 0) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1}} \right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1}} \right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = K(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = -p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}} \left(\frac{l}{p^{3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1}} \right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^{\eta_1+1}}} = K_p(p^{\eta_1+1}, -n, 0) = p^{\eta_1} (\frac{-n_1}{p}) S(p, 1, 0)$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

1. Пусть η_1 — нечетное, α_1 — нечетное, β_1 — нечетное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ – нечетное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -p^{\eta_1} p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1} (\frac{-a_1 b_1}{p}) p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2} =$$

$$= -\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}} (\frac{-a_1 b_1}{p}).$$

2. Пусть η_1 — нечетное, α_1 — четное, β_1 — четное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — нечетное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -p^{\eta_1} p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1} p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2} =$$

$$= -\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}.$$

3. Пусть η_1 — четное, α_1 — четное, β_1 — нечетное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — нечетное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -p^{\eta_1} p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1} (\frac{-a_1 d}{p}) p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2} =$$

$$= -\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}} (\frac{-a_1 d}{p}).$$

4. Пусть η_1 — четное, α_1 — нечетное, β_1 — четное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — нечетное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -p^{\eta_1} p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1} (\frac{-d b_1}{p}) p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2} =$$

$$= -\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}} (\frac{-d b_1}{p}).$$

5. Пусть η_1 — четное, α_1 — четное, β_1 — четное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = (\frac{-n_1}{p}) p^{\eta_1} p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1} (\frac{a_1 b_1 d}{p}) p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2+1/2} =$$

$$= \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+1}} (\frac{-a_1 b_1 d n_1}{p}).$$

6. Пусть η_1 — четное, α_1 — нечетное, β_1 — нечетное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = (\frac{-n_1}{p}) p^{\eta_1} p^{-4\eta_1-4} p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1} (\frac{-d}{p}) p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2+1/2} =$$

$$= \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+1}} (\frac{d n_1}{p}).$$

7. Пусть η_1 — нечетное, α_1 — нечетное, β_1 — четное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = (\frac{-n_1}{p})p^{\eta_1}p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1}(\frac{-a_1}{p})p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2+1/2} =$$

$$= \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+1}}(\frac{a_1n_1}{p}).$$

8. Пусть η_1 — нечетное, α_1 — четное, β_1 — нечетное, тогда $3\eta_1 - \alpha_1 - \beta_1$ — четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = (\frac{-n_1}{p})p^{\eta_1}p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1}(\frac{-b_1}{p})p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2+1/2} =$$

$$= \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+1}}(\frac{b_1n_1}{p}).$$

Пусть $\alpha > \eta_1 + 1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

1. η_1 — нечетное, α_1 — нечетное, β_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1<\gamma_1}} (p^{(\alpha_1-1)/2} + (\frac{-a_1b_1}{p})\left(p^{(\alpha_1-1)/2} - \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+1)/2}} - \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right))$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = 1$, тогда данная скобка

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}} + \frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right) > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то стремление к 2.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}} + \frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right) > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

2. η_1 — нечетное, α_1 — четное, β_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1<\gamma_1}} (1+p^{\alpha_1/2}-1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}}+...+\frac{1}{p^{(\eta_1-1)/2}}\right)-$$

$$-\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}(1+\beta_1-\alpha_1)-p^{\alpha_1/2-1}(-1+\beta_1-\alpha_1)-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+1)-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

3. η_1 — четное, α_1 — четное, β_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1<\gamma_1}} (1+p^{\alpha_1/2}-1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}}+...+\frac{1}{p^{(\eta_1-1)/2}}\right)-$$

$$-(\frac{-a_1 d}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}(1+\beta_1-\alpha_1)-p^{\alpha_1/2-1}(-1+\beta_1-\alpha_1)-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

4. η_1 — четное, α_1 — нечетное, β_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1<\gamma_1}}(p^{(\alpha_1-1)/2}+(\frac{-b_1 d}{p})\left(p^{(\alpha_1-1)/2}-\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+1)/2}}-\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

5. η_1 — четное, α_1 — четное, β_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1<\gamma_1}}(p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1 d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1 d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\beta_1/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+(\frac{-a_1b_1dn_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\beta_1/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+(\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+(\frac{b_1n_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

6. η_1 — четное, α_1 — нечетное, β_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1<\gamma_1}}(p^{(\alpha_1-1)/2}+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left((\frac{-a_1b_1}{p})\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\left((\frac{-a_1b_1}{p})-(\frac{dn_1}{p})\right)\right)).$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и $(\frac{dn_1}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}>2$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1=1$, то данная скобка равна 2.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и $(\frac{dn_1}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-2p^{(\alpha_1+\beta_1-\eta_1)/2-1}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1=1$, то данная скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и $(\frac{dn_1}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1+\beta_1-\eta_1)/2-1}>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 b_1}{p}) = -1$ и $(\frac{dn_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна 0.

7. η_1 — нечетное, α_1 — нечетное, β_1 — четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1 \le \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1}} (p^{(\alpha_1-1)/2} + p^{(\alpha_1+\beta_1)/2} \left((\frac{-b_1 d}{p}) \frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{p^{\eta_1/2+1}} \left((\frac{-b_1 d}{p}) - (\frac{a_1 n_1}{p}) \right) \right)).$$

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = 1$ и $(\frac{a_1 n_1}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} > 1$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то данная скобка равна 2.

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = 1$ и $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - 2p^{(\alpha_1+\beta_1-\eta_1)/2-1} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то данная скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{a_1 n_1}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1+\beta_1-\eta_1)/2-1} > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна 0.

8. η_1 — нечетное, α_1 — четное, β_1 — нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1 \le \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1}} (p^{\alpha_1/2} + p^{\alpha_1/2-1}(p-1) \left((\frac{-a_1 d}{p^{\alpha_1+1}}) + ... + (\frac{-a_1 d}{p^{\beta_1}}) \right) +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left((\frac{-a_1d}{p})\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\left((\frac{-a_1d}{p})-(\frac{b_1n_1}{p})\right)\right)).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$ и $(\frac{b_1n_1}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$ и $(\frac{b_1n_1}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1)-2p^{(\alpha_1+\beta_1-\eta_1)/2-1}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$ и $(\frac{b_1n_1}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1+\beta_1-\eta_1)/2-1}>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$ и $(\frac{b_1n_1}{p})=-1$, тогда данная скобка равна 0.

9.9) Пусть $\alpha_1\leq\beta_1<\eta_1=\gamma_1$.

Если $1\leq\alpha\leq\alpha_1$, то для четных α: $\Phi(p^\alpha)=p^{\alpha/2-1}(p-1)$.

Если $\alpha_1<\alpha\leq\beta_1$, то для четных α_1: $\Phi(p^\alpha)=(\frac{-a_1d}{p^\alpha})p^{\alpha_1/2-1}(p-1)$.

Если $\beta_1<\alpha\leq\eta_1$, то

$$\Phi(p^\alpha)=$$

$$=\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)}{p^{\alpha/2}}\cdot\begin{cases}1, \text{если } \alpha \text{ – четное, } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – четное,}\\ (\frac{-a_1b_1}{p}), \text{если } \alpha \text{ – четное, } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – нечетное,}\\ (\frac{-a_1d}{p}), \text{если } \alpha \text{ – нечетное, } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – нечетное,}\\ (\frac{-b_1d}{p}), \text{если } \alpha \text{ – нечетное, } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – четное,}\\ 0, \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пусть $\alpha=\eta_1+1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1}(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}})(\frac{c_1}{p})(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})\cdot$$

$$\cdot S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\beta_1},1,0)S(p,1,0)\cdot$$
$$\cdot\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{3\eta_1+4-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – четное, то
$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{3\eta_1+4-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=K(p^{\eta_1+1},-n,0)=-p^{\eta_1}$$
в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – нечетное, то
$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{3\eta_1+4-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=K_p(p^{\eta_1+1},-n,0)=p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0)$$
в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

1. Пусть η_1 – нечетное, α_1 – нечетное, β_1 – нечетное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – нечетное и
$$\Phi(p^{\eta_1+1})=p^{\eta_1}(\frac{-a_1b_1c_1n_1}{p})p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1}p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2+1}=$$
$$=(\frac{-a_1b_1c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}.$$

2. Пусть η_1 – нечетное, α_1 – четное, β_1 – четное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – нечетное и
$$\Phi(p^{\eta_1+1})=(\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}.$$

3. Пусть η_1 – четное, α_1 – четное, β_1 – нечетное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – нечетное и
$$\Phi(p^{\eta_1+1})=(\frac{-a_1c_1dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}.$$

4. Пусть η_1 – четное, α_1 – нечетное, β_1 – четное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – нечетное и
$$\Phi(p^{\eta_1+1})=(\frac{-b_1c_1dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}.$$

5. Пусть η_1 – четное, α_1 – четное, β_1 – четное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -p^{\eta_1}p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\beta_1+\eta_1}(\frac{a_1b_1c_1d}{p})p^{(3\eta_1+3-\alpha_1-\beta_1)/2+1/2} =$$

$$= -(\frac{a_1b_1c_1d}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+2}}.$$

6. Пусть η_1 – четное, α_1 – нечетное, β_1 – нечетное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -(\frac{-c_1d}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+2}}.$$

7. Пусть η_1 – нечетное, α_1 – нечетное, β_1 – четное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -(\frac{-a_1c_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+2}}.$$

8. Пусть η_1 – нечетное, α_1 – четное, β_1 – нечетное, тогда $3\eta_1-\alpha_1-\beta_1$ – четное и

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = -(\frac{-b_1c_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+2}}.$$

Пусть $\alpha > \eta_1+1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны 0 в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Рассмотрим возможные произведения.

1. η_1 – нечетное, α_1 – нечетное, β_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1=\gamma_1}} (p^{(\alpha_1-1)/2} + (\frac{-a_1b_1}{p})\left(p^{(\alpha_1-1)/2} - \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+1)/2}} + (\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}} - (\frac{c_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right) > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то стремление к 2.

Пусть $(\frac{-a_1 b_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}} - (\frac{c_1 n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right) > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

2. η_1 – нечетное, α_1 – четное, β_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1=\gamma_1}} (1 + p^{\alpha_1/2} - 1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1 d}{p^{\alpha_1+1}}) + ... + (\frac{-a_1 d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}} + \frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}} + ... + \frac{1}{p^{(\eta_1-1)/2}}\right)+$$

$$+(\frac{c_1 n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}(1+\beta_1-\alpha_1) - p^{\alpha_1/2-1}(-1+\beta_1-\alpha_1) - p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}} - (\frac{c_1 n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right),$$

она положительна и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+1) - p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}} - (\frac{c_1 n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right) > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

3. η_1 – четное, α_1 – четное, β_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1=\gamma_1}} (1 + p^{\alpha_1/2} - 1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}}+...+\frac{1}{p^{(\eta_1-1)/2}}\right)+$$

$$+(\frac{-a_1c_1dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{\eta_1/2+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}(1+\beta_1-\alpha_1)-p^{\alpha_1/2-1}(-1+\beta_1-\alpha_1)-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}-(\frac{c_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right),$$

она положительна и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}-(\frac{c_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

4. η_1 – четное, α_1 – нечетное, β_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1=\gamma_1}}(p^{(\alpha_1-1)/2}+(\frac{-b_1d}{p})\left(p^{(\alpha_1-1)/2}-\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+1)/2}}+(\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}-(\frac{c_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{(\eta_1+1)/2}}-(\frac{c_1n_1}{p})\frac{1}{p^{(\eta_1+3)/2}}\right)>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

5. η_1 – четное, α_1 – четное, β_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\leq\beta_1<\eta_1=\gamma_1}} (p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\beta_1/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}-(\frac{a_1b_1c_1d_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}+p^{(\alpha_1-1)/2}(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\beta_1/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}-(\frac{-b_1c_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right),$$

она положительна и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}-(\frac{-b_1c_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

6. η_1 – четное, α_1 – нечетное, β_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\leq\beta_1<\eta_1=\gamma_1}} (p^{(\alpha_1-1)/2}+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left((\frac{-a_1b_1}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\right)-\right.$$

$$\left.-(\frac{-c_1d}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)>2$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1=1$, то данная скобка стремится 2.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)>2$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1=1$, то данная скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

7. η_1 – нечетное, α_1 – нечетное, β_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1=\gamma_1}}(p^{(\alpha_1-1)/2}+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left((\frac{-b_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\right)-\right.$$

$$\left.-(\frac{-a_1c_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=1$ и $(\frac{-a_1c_1}{p})=1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)>2$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1=1$, то данная скобка стремится 2.

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=1$ и $(\frac{-a_1c_1}{p})=-1$, тогда данная скобка равна

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}-\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)>2$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то данная скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{-a_1 c_1}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}} - \frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right) > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-b_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{-a_1 c_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}} + \frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right) > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

8. η_1 – нечетное, α_1 – четное, β_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1<\eta_1=\gamma_1}} (p^{\alpha_1/2} + p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1 d}{p^{\alpha_1+1}}) + ... + (\frac{-a_1 d}{p^{\beta_1}})\right) +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left((\frac{-a_1 d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}} - \frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}\right) - (\frac{-b_1 c_1}{p})\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right)).$$

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$ и $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2-1}(p + (p-1)(\beta_1 - \alpha_1) + 1) - p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}} + \frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right) > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$ и $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$p^{\alpha_1/2-1}(p + (p-1)(\beta_1 - \alpha_1) + 1) - p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}} - \frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right) > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = 1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}} - \frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right) > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = -1$, тогда данная скобка равна

$$p^{(\alpha_1+\beta_1)/2}\left(\frac{1}{p^{\eta_1/2+1}}+\frac{1}{p^{\eta_1/2+2}}\right) > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

9.10) Пусть $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1 < \eta_1$

Если $1 \leq \alpha \leq \alpha_1$, то для четных α: $\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha/2-1}(p-1)$.

Если $\alpha_1 < \alpha \leq \beta_1$, то для четных α_1: $\Phi(p^\alpha) = (\frac{-a_1 d}{p^\alpha})p^{\alpha_1/2-1}(p-1)$.

Если $\beta_1 < \alpha \leq \gamma_1$, то

$$\Phi(p^\alpha) =$$

$$= \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)}{p^{\alpha/2}} \cdot \begin{cases} 1, \text{если } \alpha \text{ – четное, } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – четное,} \\ (\frac{-a_1 b_1}{p}), \text{если } \alpha \text{ – четное, } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – нечетное,} \\ (\frac{-a_1 d}{p}), \text{если } \alpha \text{ – нечетное, } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – нечетное,} \\ (\frac{-b_1 d}{p}), \text{если } \alpha \text{ – нечетное, } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – четное,} \\ 0, \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

Пусть $\gamma_1 < \alpha \leq \eta_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha}p^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\alpha-\beta_1}})(\frac{c_1}{p^{\alpha-\gamma_1}})(\frac{d}{p^\alpha})\cdot$$

$$\cdot S(p^\alpha,1,0)S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0)S(p^{\alpha-\beta_1},1,0)S(p^{\alpha-\gamma_1},1,0)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{4\alpha-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}}.$$

Если $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ – четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{4\alpha-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{p^\alpha}} = K(p^\alpha,-n,0) = p^{\alpha-1}(p-1)$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ – нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{4\alpha-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^\alpha}}=K_p(p^\alpha,-n,0)=0$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда

$$\Phi(p^\alpha)=\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p-1)}{p^{\alpha+1}}\cdot$$

$$\begin{cases}(\frac{a_1b_1c_1d}{p^\alpha}), \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – четное,}\\ (\frac{-c_1d}{p^\alpha})(\frac{-a_1b_1}{p^{\alpha+1}}), \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – четное,}\\ (\frac{-b_1d}{p^\alpha})(\frac{-a_1c_1}{p^{\alpha+1}}), \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – нечетное,}\\ (\frac{-a_1d}{p^\alpha})(\frac{-b_1c_1}{p^{\alpha+1}}), \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – нечетное,}\\ 0, \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

Пусть $\alpha=\eta_1+1$. Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1})=p^{-4\eta_1-4}p^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}(\frac{a_1}{p^{\eta_1+1-\alpha_1}})(\frac{b_1}{p^{\eta_1+1-\beta_1}})(\frac{c_1}{p^{\eta_1+1-\gamma_1}})(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})\cdot$$

$$\cdot S(p^{\eta_1+1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\alpha_1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\beta_1},1,0)S(p^{\eta_1+1-\gamma_1},1,0)\cdot$$

$$\cdot\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{4\eta_1+4-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}.$$

Если $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ – четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{4\eta_1+4-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=K(p^{\eta_1+1},-n,0)=-p^{\eta_1}$$

в силу леммы о сумме Клоостермана (утверждение 6).

Если $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ – нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\eta_1+1})=1}}^{p^{\eta_1+1}}\left(\frac{l}{p^{4\eta_1+4-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{p^{\eta_1+1}}}=K_p(p^{\eta_1+1},-n,0)=p^{\eta_1}(\frac{-n_1}{p})S(p,1,0).$$

в силу леммы об обобщенной сумме Клоостермана (утверждение 3).

Тогда

$$\Phi(p^{\eta_1+1}) = \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+2}}\cdot$$

$$\begin{cases}
-(\frac{a_1b_1c_1d}{p^{\eta+1}}), \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – четное,}\\
-(\frac{-c_1d}{p^{\eta+1}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\eta_1}}), \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – четное,}\\
-(\frac{-b_1d}{p^{\eta+1}})(\frac{-a_1c_1}{p^{\eta_1}}), \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – нечетное,}\\
-(\frac{-a_1d}{p^{\eta+1}})(\frac{-b_1c_1}{p^{\eta_1}}), \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – нечетное,}\\
(\frac{-a_1b_1c_1n_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – нечетное, } \eta_1 \text{ – нечетное,}\\
(\frac{dn_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – нечетное, } \eta_1 \text{ – четное,}\\
(\frac{c_1n_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – нечетное, } \eta_1 \text{ – нечетное,}\\
(\frac{-a_1b_1dn_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – нечетное, } \eta_1 \text{ – четное,}\\
(\frac{b_1n_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – четное, } \eta_1 \text{ – нечетное,}\\
(\frac{-a_1c_1dn_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – четное, } \beta_1 \text{ – нечетное, } \gamma_1 \text{ – четное, } \eta_1 \text{ – четное,}\\
(\frac{a_1n_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – четное, } \eta_1 \text{ – нечетное,}\\
(\frac{-b_1c_1dn_1}{p})\sqrt{p}, \text{если } \alpha_1 \text{ – нечетное, } \beta_1 \text{ – четное, } \gamma_1 \text{ – четное, } \eta_1 \text{ – четное.}
\end{cases}$$

Рассмотрим возможные произведения.

1. α_1 – четное, β_1 – четное, γ_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (1+p^{\alpha_1/2}-1+$$

$$+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}}+...+\frac{1}{p^{\gamma_1/2}}\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1}(p-1)\left((\frac{a_1b_1c_1d}{p^{\gamma+1}})\frac{1}{p^{\gamma_1+1}}+(\frac{a_1b_1c_1d}{p^{\gamma+2}})\frac{1}{p^{\gamma_1+2}}+...+(\frac{a_1b_1c_1d}{p^{\eta_1}})\frac{1}{p^{\eta_1}}\right)-$$

$$-(\frac{a_1b_1c_1d}{p^{\eta_1+1}})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$ и $(\frac{-b_1c_1}{p})=1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1)-p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1-\eta_1}-p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-\eta_1-2}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$ и $(\frac{-b_1c_1}{p})=-1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+1)-p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1-\eta_1}-p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-\eta_1-2}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, $(\frac{-b_1c_1}{p})=1$, η_1 — четное, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+1)-\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1}+\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, $(\frac{-b_1c_1}{p})=1$, η_1 — нечетное, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+1)-\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1}+\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2-2p-1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, $(\frac{-b_1c_1}{p})=-1$, η_1 — четное, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1)-\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1}+\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, $(\frac{-b_1c_1}{p})=-1$, η_1 — четное, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1)-\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1}+\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2-2p-1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

2. α_1 – нечетное, β_1 – нечетное, γ_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (1+p^{(\alpha_1-1)/2}-1+0+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1b_1}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+3)/2}}+...+\frac{1}{p^{\gamma_1/2}}\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1}(p-1)\left((\frac{-c_1d}{p^{\gamma_1+1}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\gamma_1}})\frac{1}{p^{\gamma_1+1}}+(\frac{-c_1d}{p^{\gamma_1+2}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\gamma_1+1}})\frac{1}{p^{\gamma_1+2}}+...+\right.$$

$$\left.+(\frac{-c_1d}{p^{\eta_1}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\eta_1+1}})\frac{1}{p^{\eta_1}}\right)-(\frac{-c_1d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-a_1b_1}{p^{\eta_1}})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=1$, η_1 — четное, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p+1)}{p^{\eta_1+2}}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=1$, η_1 — нечетное, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(2p^2+p+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=-1$, η_1 — четное, тогда получаем

$$\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p+1)}{p^{\eta_1+2}}>0.$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=-1$, η_1 — нечетное, тогда получаем

$$\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p+3)}{p^{\eta_1}(p+1)}>0.$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p})=-1$ и $(\frac{-c_1d}{p})=1$, η_1 — четное, тогда получаем

$$\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1}-\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)}>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = -1$ и $(\frac{-c_1d}{p}) = 1$, η_1 — нечетное, тогда получаем

$$\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1} + \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+2}} > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = 1$ и $(\frac{-c_1d}{p}) = -1$, η_1 — четное, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - \frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1} + \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = 1$ и $(\frac{-c_1d}{p}) = -1$, η_1 — нечетное, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - \frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1} - \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+2}} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

3. α_1 – нечетное, β_1 – четное, γ_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (1 + p^{(\alpha_1-1)/2} - 1 + 0 +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-b_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}} + \frac{1}{p^{(\beta_1+3)/2}} + ... + \frac{1}{p^{\gamma_1/2}}\right) +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1}(p-1)\left((\frac{-b_1d}{p^{\gamma_1+1}})(\frac{-a_1c_1}{p^{\gamma_1}})\frac{1}{p^{\gamma_1+1}} + (\frac{-b_1d}{p^{\gamma_1+2}})(\frac{-a_1c_1}{p^{\gamma_1+1}})\frac{1}{p^{\gamma_1+2}} + ... +\right.$$

$$\left. +(\frac{-b_1d}{p^{\eta_1}})(\frac{-a_1c_1}{p^{\eta_1-1}})\frac{1}{p^{\eta_1}}\right) - (\frac{-b_1d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-a_1c_1}{p^{\eta_1}})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1c_1}{p}) = 1$ и $(\frac{-b_1d}{p}) = 1$, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - \frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p+1)}{p^{\eta_1+2}} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1c_1}{p}) = -1$ и $(\frac{-b_1d}{p}) = -1$, тогда получаем

$$\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p+1)}{p^{\eta_1+2}} > 0.$$

Пусть $(\frac{-a_1c_1}{p}) = -1$ и $(\frac{-b_1d}{p}) = 1$, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - \frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1} - (-1)^{\eta_1}\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1c_1}{p}) = 1$ и $(\frac{-b_1d}{p}) = -1$, тогда получаем

$$\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1} + (-1)^{\eta_1}\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)} > 0.$$

4. α_1 – четное, β_1 – нечетное, γ_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (p^{\alpha_1/2} + p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}}) + ... + (\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right) +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}} + \frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}} + ... + \frac{1}{p^{\gamma_1/2}}\right) +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\gamma_1+1}})(\frac{-b_1c_1}{p^{\gamma_1}})\frac{1}{p^{\gamma_1+1}} + (\frac{-a_1d}{p^{\gamma_1+2}})(\frac{-b_1c_1}{p^{\gamma_1+1}})\frac{1}{p^{\gamma_1+2}} + ...+\right.$$

$$\left.+(\frac{-a_1d}{p^{\eta_1}})(\frac{-b_1c_1}{p^{\eta_1-1}})\frac{1}{p^{\eta_1}}\right) - (\frac{-a_1d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{-b_1c_1}{p^{\eta_1}})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p}) = 1$ и $(\frac{-b_1c_1}{p}) = 1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1) - p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1-\eta_1} - p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-\eta_1-2} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = -1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-1-\eta_1} - p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2-\eta_1-2} > 0.$$

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$ и $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = -1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1) - \frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1} - (-1)^{\eta_1}\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$ и $(\frac{-b_1 c_1}{p}) = 1$, тогда получаем

$$\frac{2p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1)/2}}{p+1} + (-1)^{\eta_1}\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}(p^2+1)}{p^{\eta_1+2}(p+1)} > 0.$$

5. α_1 – нечетное, β_1 – нечетное, γ_1 – нечетное, η_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (1 + p^{(\alpha_1-1)/2} - 1 + 0 +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1 b_1}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}} + \frac{1}{p^{(\beta_1+3)/2}} + \ldots + \frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right) +$$

$$+0 + (\frac{-a_1 b_1 c_1 n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1 b_1}{p}) = 1$ и $(\frac{c_1 n_1}{p}) = 1$, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2\eta_1-3)/2} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-a_1 b_1}{p}) = 1$ и $(\frac{c_1 n_1}{p}) = -1$, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} - p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2\eta_1-3)/2} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = -1$ и $(\frac{c_1n_1}{p}) = 1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} - p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2\eta_1-3)/2} > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = -1$ и $(\frac{c_1n_1}{p}) = -1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2\eta_1-3)/2} > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

6. α_1 – нечетное, β_1 – нечетное, γ_1 – нечетное, η_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (1+p^{(\alpha_1-1)/2}-1+0+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1b_1}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+3)/2}}+...+\frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right)+$$

$$+0+(\frac{dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = 1$, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2} - p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + (\frac{dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1 = 1$, то скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-a_1b_1}{p}) = -1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + (\frac{dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

7. α_1 – четное, β_1 – четное, γ_1 – нечетное, η_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}}+...+\frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right)+$$

$$+0+(\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1)-p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2}+(\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p})=-1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}-p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2}+(\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

8. α_1 – четное, β_1 – четное, γ_1 – нечетное, η_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (p^{\alpha_1/2}+p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}})+...+(\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right)+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}}+...+\frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right)+$$

$$+0+(\frac{-a_1b_1dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1) - p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + (\frac{b_1 n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2} + p^{\alpha_1/2-1} - p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} - (\frac{b_1 n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

9. α_1 – четное, β_1 – нечетное, γ_1 – четное, η_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (p^{\alpha_1/2} + p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1 d}{p^{\alpha_1+1}}) + ... + (\frac{-a_1 d}{p^{\beta_1}})\right) +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1 d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}} + \frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}} + ... + \frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right) +$$

$$+0 + (\frac{b_1 n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = 1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p+(p-1)(\beta_1-\alpha_1)+1) - p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + (\frac{b_1 n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + (\frac{b_1 n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

10. α_1 – четное, β_1 – нечетное, γ_1 – четное, η_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (p^{\alpha_1/2} + p^{\alpha_1/2-1}(p-1)\left((\frac{-a_1d}{p^{\alpha_1+1}}) + ... + (\frac{-a_1d}{p^{\beta_1}})\right) +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-a_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+2)/2}} + \frac{1}{p^{(\beta_1+4)/2}} + ... + \frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right) +$$

$$+0 + (\frac{-a_1c_1dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-a_1d}{p}) = 1$, тогда получаем

$$p^{\alpha_1/2-1}(p + (p-1)(\beta_1-\alpha_1) + 1) - p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} + (\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к ∞ с ростом p.

Пусть $(\frac{-a_1d}{p}) = -1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2} - (\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}} > 0$$

и стремится к 0 с ростом p.

11. α_1 – нечетное, β_1 – четное, γ_1 – четное, η_1 – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1 \\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}} (1 + p^{(\alpha_1-1)/2} - 1 + 0 +$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-b_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}} + \frac{1}{p^{(\beta_1+3)/2}} + ... + \frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right) +$$

$$+0+(\frac{a_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=1$, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2}+(\frac{a_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1=1$, то скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=-1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2}+(\frac{a_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

12. α_1 – нечетное, β_1 – четное, γ_1 – четное, η_1 – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,(a_1,p)=1\\ b=p^{\beta_1}b_1,(b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma_1}c_1,(c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta_1}n_1,(n_1,p)=1\\ \alpha_1\le\beta_1\le\gamma_1<\eta_1}}(1+p^{(\alpha_1-1)/2}-1+0+$$

$$+p^{(\alpha_1+\beta_1)/2-1}(p-1)(\frac{-b_1d}{p})\left(\frac{1}{p^{(\beta_1+1)/2}}+\frac{1}{p^{(\beta_1+3)/2}}+...+\frac{1}{p^{(\gamma_1-1)/2}}\right)+$$

$$+0+(\frac{-b_1c_1dn_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}).$$

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=1$, тогда получаем

$$2p^{(\alpha_1-1)/2}-p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2}+(\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}>0$$

и стремится к ∞ с ростом p. Если $\alpha_1=1$, то скобка стремиться к 2.

Пусть $(\frac{-b_1d}{p})=-1$, тогда получаем

$$p^{(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)/2}-(\frac{c_1n_1}{p})\frac{p^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)/2}}{p^{\eta_1+3/2}}>0$$

и стремится к 0 с ростом p.

Выводы:

Пусть

$$a = p^{\alpha_1} a_1,\ (a_1, p) = 1,\ b = p^{\beta_1} b_1,\ (b_1, p) = 1,\ c = p^{\gamma_1} c_1,\ (c_1, p) = 1,\ (d, p) = 1,$$

$$n = p^{\eta_1} n_1, (n_1, p) = 1.$$

Тогда:

1. Если $\eta_1 < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ и η_1 – нечетное число, то уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = n$ не имеет решений.

2. Если $\eta_1 < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$, η_1 – четное число и $(\frac{dn_1}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = n$ не имеет решений.

3. Если $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$, η_1 – нечетное число и $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = n$ не имеет решений.

4. Если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$, η_1 – нечетное число, α_1 – четное число и $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = n$ не имеет решений.

5. Если $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$, α_1 – нечетное число и $(\frac{d}{p^{\eta_1+1}})(\frac{a_1}{p^{\eta_1}})(\frac{n_1}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = n$ не имеет решений.

6. Если $\alpha_1 < \eta_1 = \beta_1 < \gamma_1$, η_1 – нечетное число, α_1 – четное число и $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{b_1 n_1}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = n$ не имеет решений.

7. Если $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 – четное число, α_1 – нечетное число, β_1 – нечетное число и $(\frac{-a_1 b_1}{p}) = -1$, $(\frac{dn_1}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2+by^2+cz^2+du^2 = n$ не имеет решений.

8. Если $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 – нечетное число, α_1 – нечетное число, β_1 – четное число и $(\frac{-b_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{a_1 n_1}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2+by^2+cz^2+du^2 = n$ не имеет решений.

9. Если $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$, η_1 – нечетное число, α_1 – четное число, β_1 – нечетное число и $(\frac{-a_1 d}{p}) = -1$, $(\frac{b_1 n_1}{p}) = -1$, то уравнение $ax^2+by^2+cz^2+du^2 = n$ не имеет решений.

10. Случай, когда все коэффициенты и n делятся на p

Пусть

$$a = p^{\alpha_1} a_1, (a_1, p) = 1, b = p^{\beta_1} b_1, (b_1, p) = 1, c = p^{\gamma_1} c_1, (c_1, p) = 1,$$

$$d = p^{\delta_1} d_1, (d_1, p) = 1, n = p^{\eta_1} n_1, (n_1, p) = 1.$$

После деления всего уравнения на число, равное $p^{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1)}$, получаем один из случаев, описанных ранее.

Доказательство теорем 2–4 завершено.

$\square$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. —М.: Просвещение, 1966. —384 с.

2. *Бугаенко В. О.* Уравнения Пелля. —М.: МЦНМО, 2001.

3. *Айерлэнд К.* Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. —М.: Мир, 1987. —416 с.

4. *Kloosterman H. D.* On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$//Acta mathematica. —1926. —*49*. —P. 407–464.

5. *Малышев А. В.* О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. —1962. —Т. 65. –С. 3–212.

6. *Hua Loo–Keng.* Introduction to number theory, Springer, 1982. –572 p.

7. *Estermann T.* A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method // Proc. London Math. Soc. —1962. —*12*. —P. 425–444.

8. *Estermann T.* On Kloosterman's sum // Mathematica. —1961. —*8*. —P. 83–86.

9. *Мамфорд Д.* Лекции о тета-функциях. —Новокузнецк: ИО НФМИ. —1998. —440 с.