ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**( Н И У « Б е л Г У » )**

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

# ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование,
профиль Математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041203
Бацылевой Ирины Ильиничны

Научный руководитель
к. ф.- м. н., доцент
Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи в обучении математике занимают одно из важных мест: это и цель, и средство обучения. Умение решать задачи – показатель обученности и развития учащихся.

Безусловно, на сегодняшний день одним из основных результатов обучения математике в школе является способность решать задачи. Исследование ученых методистов, педагогов, психологов таких, как Г. В. Дорофеев, М. Л. Галицкий, А. Г. Мордкович, Д. Пойя, Г.И. Саранцев, Л. М. Фридман и др., были посвящены вопросам обучению решения задач.

В трудах авторы рассматривают различные аспекты методики обучения учащихся решению математических задач: классификация математических задач; функции задач в обучении; психолого-педагогические основы обучения решению математических задач и т. д.

Функция – одно из фундаментальных понятий математики, а функциональная идея является одной из определяющих идей развития школьного курса математики. Это связано с тем, что функциональная линия проходит через школьный курс алгебры, алгебры и начала анализа.

При изучении и анализе школьных учебников и учебных пособий по алгебре, материалов ОГЭ и ЕГЭ, можно сделать вывод о том, что большинство заданий посвящено теме «Функция». В заданиях ЕГЭ каждый год встречаются задачи на нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке. И между тем у школьников есть трудности при решении данного вида задач. Одной из причин этого является недостаточное количество часов, отводимых на изучение этой темы. Учителя отмечают, что в методической литературе уделяется недостаточное внимание методике обучения решению задач по данной теме. В повседневной жизни располагая определенными ресурсами, нам приходится часто искать оптимальное решение задачи. Конечно, не все задачи поддаются точному математическому описанию, однако существуют некоторые методы в математике, с помощью которых эти задачи можно свести к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции.

**Цель дипломной работы:** Разработка факультативных занятий по теме «Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции» в курсе алгебры и начала анализа в 11 классах.

**Объект исследования:** процесс обучения школьников алгебре и началам анализа в 11 классах.

**Предмет исследования:** задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции в школьном курсе математики.

**Гипотеза:** проведение факультативных занятий по теме «Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции» способствует систематизации, обобщению знаний школьников и повышению их качества.

Для достижения цели были поставлены задачи:

1. Изучить теоретические аспекты обучения решению математических задач;

2.Рассмотреть элементарные функции и методы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции;

3. Проанализировать содержания школьных учебников на наличие задач о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции;

4. Разработать факультатив для 11 класса на тему «Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции»;

Для достижения поставленных задач использовались следующие методы исследования: наблюдение, анализ литературы, беседа с учителями, педагогический эксперимент.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, приложения.

В первой главе описываются общие вопросы обучения школьников решению математических задач. В этой же главе изложены теоретические вопросы, связанные с нахождением наибольшего и наименьшего значений функции в школьном курсе математики. На основе анализа учебной литературы выделены методы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Во второй главе выполнен анализ содержания темы «Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции» в школьных учебниках. Также во второй главе даны методические рекомендации по решению задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

В третьей главе описаны цели и задачи факультатива «Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции», приведена разработка некоторых занятий, описана апробация факультативных занятий.

Работа завершается заключением, списком литературы и приложением в котором приведены разработанные конспекты факультативных занятий.

# 1 ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

## 1.1 Общие вопросы обучения решению математических задач

В обучении математике решение задач затрагивает важные аспекты образования: воспитательные, образовательные, практические. Как известный факт, задачи формируют и развивают алгоритмическое и логическое мышление школьников и мировоззрение. Задачи являются одним из основных средств развития пространственного воображения у учащихся.

Как было отмечено педагогами, методистами, при обучении творческим знаниям задачи способствуют мотивации введения понятий, выявлению их существенных свойств, усвоению математической символики и терминологии, задачи раскрывают взаимосвязи одного понятия с другим [30], [31].

При решении математических задач, несомненно, огромную значимость имеют теоремы. В ходе изучения теоремы задачи осуществляют следующие функции: вычисляют закономерности, отраженные в теореме; способствуют мотивации ее введения; помогают освоению содержания теоремы; обеспечивают восприятие идеи доказательства, раскрывают приемы доказательства; учат использованию теоремы; показывают взаимосвязи других теорем с изучаемой теоремой.

При изменении места и роли задач в обучении видоизменяются и обновляются сами задачи. Ранее задания выражались при помощи слов «найти», «вычислить», «доказать», «построить». Сейчас в школе наиболее часто применяют фразы «обосновать», «аргументировать», «выбрать из различных способов более оптимальный», «исследовать», «спрогнозировать различные способы решения» и т.д.

Наиболее результативной формой развития математической деятельности является решение задач. Как правило, математические задачи решаются в основном фронтальным образом, письменно, комментированием, в тестовой форме и т.д. [32].

Фронтальная форма решения задач является наиболее используемой, это решение одной и той же задачи в одно и то же время всеми учениками. Организовывать фронтальное решение задач возможно различными способами.

Одно из самых распространенных в средних классах, общеобразовательной школы, и менее используемое в старших классах, является устное решение задач. Это в первую очередь выполняемые устно вычисления и тождественные преобразования или это могут быть задачи-вопросы, истинность ответов на которые необходимо привести ряд аргументов для доказательства. Сейчас в школах учителя математики практически на каждом уроке проводят в виде «пятиминутки» решение устных упражнений, так как одной из задач обучения математики в школе является обучение быстрым устным вычислениям. Для значительной экономии времени при организации устного решения задач, следует использовать проектор, таблички и другие средства представления обучающимся устной задачи.

Наиболее часто на уроках используют письменное решение задач, в практике обучения удобнее, чтобы одну и ту же задачу решали все ученики класса одновременно с решением этой же задачи на доске. Задачу при этом могут решать либо ученики по указанию учителя, либо сам учитель. Такую форму организации решения задач применяют:

– при решении первых задач после показа учителем по ознакомлению с новыми понятиями и методами;

– при рассмотрении разных вариантов решения одной задачи для сравнения и выбора наилучшего;

– при решении задач, с которыми самостоятельно не все ученики могут справиться;

– для разбора ошибок, допущенных несколькими учениками класса при самостоятельном решении задачи и т.д.

Одна из наиболее эффективных форм организации решения математических задач – письменное самостоятельное решение задач, при применении такой формы учащиеся обучаются творчески думать, самостоятельно разбираться в различных вопросах теории и приложения математики. Самостоятельное решение задач повышает учебную активность, ученики не могут списать с доски готовые задания, поэтому вынуждены сами разбираться с решением задачи. Также самостоятельное решение математических задач значительно сокращает время, необходимое для опроса обучающихся на уроках. Письменное самостоятельное решение задач значительно повышает учебную активность обучающихся, стимулирует творческую инициативу, возбуждает их интерес к решению задач. Возможны разнообразные формы организации самостоятельного решения задач.

Комментирование – еще одна форма решения математических задач.

При комментировании решения задач все ученики самостоятельно решают одну и ту же задачу, а один из них последовательно «комментирует» (как бы поясняет) решение. То есть ученик-комментатор по порядку объясняет, почему он выполняет то или иное действие, приводит доказательство своего ответа. Каждый шаг ученика при этом, должен быть оправдан ссылкой на математические предложения.

## 1.2 Элементарные функции в школьном курсе математики

1. Постоянная функция задается на множестве всех действительных чисел формулой $y = C$, где $C$ – некоторое действительное число. Постоянная функция ставит в соответствии каждому действительному значению независимой переменной $x$ одно и то же значение зависимой переменной $y$ – значение $C$. Постоянную функцию также называют константой [18].

Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами $(0, C)$. Для примера покажем графики постоянных функций $y = 5$, $y = -2$ и $y = \sqrt{3}$, которым на рисунке 1, приведенном ниже показано, отвечают синяя $(y = 5)$, красная $(y = -2)$, зеленая ($y$= $\sqrt{3}$) прямые соответственно.

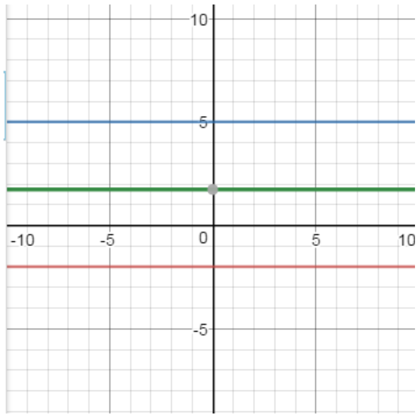



Рис.1

Свойства постоянной функции:

– Область определения: все множество действительных чисел;

– Постоянная функция является четной;

– Область значений: множество, состоящее из единственного числа C

– Постоянная функция невозрастающая и неубывающая (на то она и постоянная).

– Говорить о выпуклости и вогнутости постоянной не имеет смысла.

– Асимптот нет.

– Функция проходит через точку $(0, \mathrm{C})$ координатной плоскости.

2. Рассмотрим функцию, которая задается формулой y= $\sqrt[n]{x}$, где $n$ – натуральное число, большее единицы.

Приведем пример функции корень $n$-ой степени при четных значениях показателя корня $n$.

Для примера приведем рисунок с изображениями графиков функций

$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = \sqrt[8]{x}$, им соответствуют красная, черная, синяя линии, на рисунке 2.

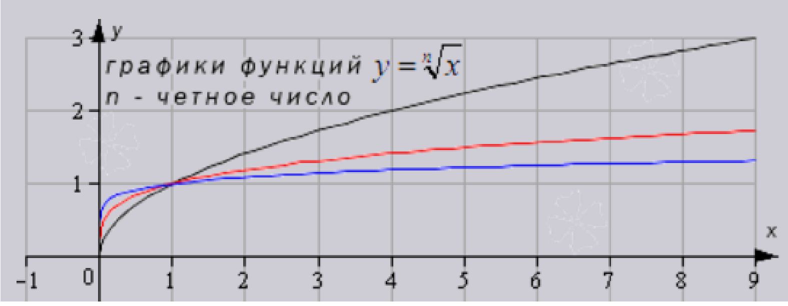



Рис. 2

Аналогичный вид имеет график функций корень четной степени при других значениях показателя.

Свойства функции корень *n-ой* степени при четных $n$.

– Область определения: множество всех неотрицательных действительных чисел $[0, +\infty)$

– При $x = 0$ функция y=$\sqrt[n]{x}$ принимает значение, равное нулю.

– Эта функция общего вида (не является четной или нечетной).

– Область значений функции: $[0, +\infty)$.

– Возрастает на всей области определения.

– Имеет выпуклость, направленную вверх, на всей области определения, точек перегиба нет.

– Асимптот нет.

– График функции корень $n$-ой степени при четных $n$ проходит через точки (0,0) и [1,1].

3. Степенная функция задается формулой вида $y = x^a$.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с четным положительным показателем степени, то есть, при $a$=2, 4, 6, ….

В качестве примера приведем графики степенных функций $y=x^2$ – черная линия, $y=x^4$ – синяя линия, $y=x^8$ – красная линия на рисунке 3. При $a=2$ имеем квадратичную функцию, графиком которой является квадратичная парабола.

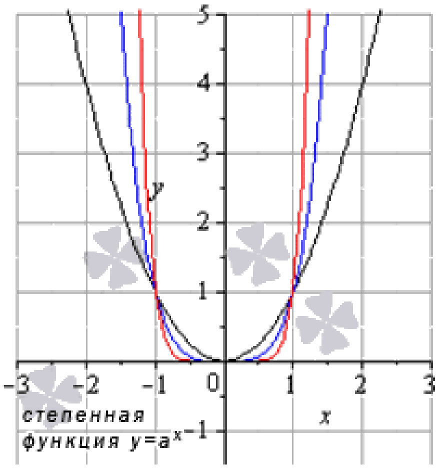



Рис. 3

Свойства степенной функции с четным положительным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in [0; +\infty)$.
- Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$ на всей области определения.
- Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(-1;1)*, *(0;0)*, *(1;1)*.

4. Одной из основных элементарных функций является показательная функция. График показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ принимает различный вид в зависимости от значений основания $a$.

Рассмотрим случай, когда основание показательной функции больше единицы, то есть, $a > 1$.

В качестве иллюстрации приведем графики показательных функций $y = (3/2)^x$– синяя линия и $y = e^x$ – красная линия на рисунке 4. При других значениях основания, больших единицы, графики показательной функции будут иметь схожий вид.

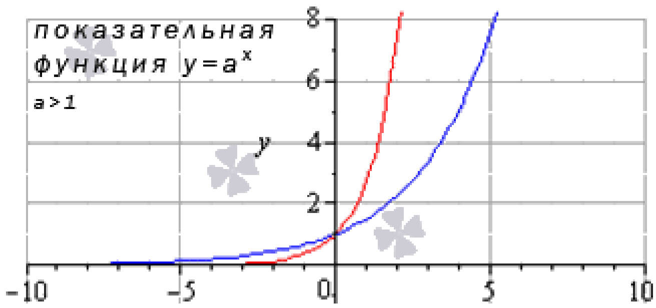



Рис. 4

Свойства показательной функции при $a > 1$.

– Область определения показательной функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

– Область значений: $y \in (0; +\infty)$.

– Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

– Показательная функция при $a > 1$ возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.

– Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.

– Точек перегиба нет.

– Горизонтальной асимптотой является прямая y = 0 при x стремящемся к минус бесконечности.

– Функция проходит через точку (0;1) [20].

5. Следующей функцией является логарифмическая функция

$$y = log_a(x), \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при $x \in (0; +\infty)$. График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания $a$.

Рассмотрим случай, когда основание логарифмической функции больше единицы ($a > 1$).

Покажем графики логарифмических функций $y = log_{\frac{3}{2}} x$– синяя линия, $y = ln\, x$ – красная линия на рисунке 5. При других значениях основания, больших единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.

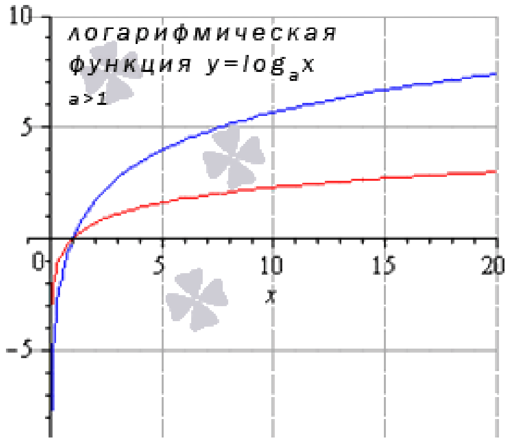



Рис. 5

Свойства логарифмической функции с основанием большим единицы.

– Область определения: $x \in (0; +\infty)$.

– Область значений логарифмической функции является все множество действительных чисел, то есть, интервал $y \in (-\infty; +\infty)$.

– Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

– Функция возрастает при $x \in (0; +\infty)$.

– Функция выпуклая при $x \in (0; +\infty)$.

– Точек перегиба нет.

– Горизонтальных асимптот нет. Вертикальная асимптота $x = 0$.

– Функция проходит через точку (1;0).

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Тригонометрическим функциям присуще понятие периодичности (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода *f(x+T)=f(x),* где *T* - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт «наименьший положительный период». Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

6. Изобразим график функции синус на рисунке 6, его называют «синусоида».

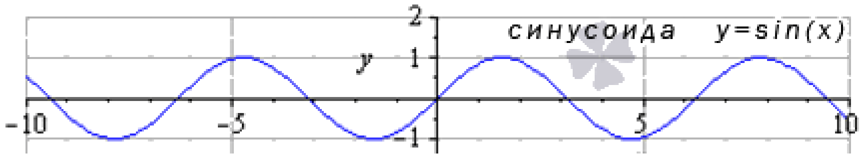



Рис. 6

Свойства функции синус $y = sinx$.

– Областью определения функции – множество всех действительных чисел $D(f)$: $R$

– Наименьший положительный период функции синуса равен $2\pi$.

– Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где k Є Z, Z – множество целых чисел.

– Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y$ Є $[1; 1]$.

– Функция синус - нечетная, так как на всей области определения $y(-x) = -y(x)$.

– Функция убывает при $x$ Є $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k$ Є $Z$, возрастает при $x$ Є $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k], k$ Є $Z$.

– Функция синус имеет локальные максимумы в точках $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 1)$, локальные минимумы в точках $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ -1)$, k Є Z.

– Функция $y = sinx$ вогнутая при $x$ Є $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k], k$ Є $Z$. выпуклая при $x$ Є $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k], k$ Є $Z$.

– Координаты точек перегиба $(\pi k; 0), k \in Z$.

– Асимптот нет.

7. График функции косинус (его называют «косинусоида») имеет вид (рис. 7):

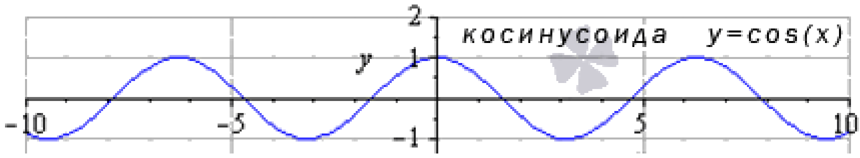



Рис. 7

Свойства функции косинус $y = cosx$.

– Область определения функции – множество действительных чисел.

– Наименьший положительный период функции $y = cosx$ равен $2\pi$.

– Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z, Z$ – множество целых чисел.

– Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y \in [-1; 1]$.

– Функция косинус - четная, так как на всей области определения $y(-x) = y(x)$.

– Функция убывает при $x \in [2\pi k;\ \pi + 2\pi k], k \in Z$, возрастает при $x \in [-\pi\ +\ 2\pi k;\ 2\pi k], k \in Z$.

– Функция $y = cosx$ имеет локальные максимумы в точках $(2\pi k; 1), k \in Z$, локальные минимумы в точках $(\pi + 2\pi k; -1), k \in Z$.

– Функция вогнутая при $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], k \in Z$, выпуклая при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in Z$.

– Координаты точек перегиба $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0), k \in Z$.

– Асимптот нет.

8. График функции тангенс (его называют «тангенсоида») имеет вид, рисунок 8:

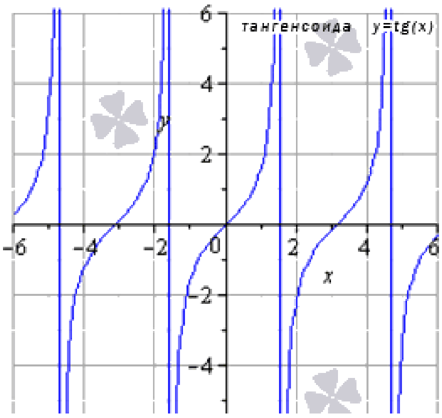



Рис. 8

Свойства функции тангенс y = tgx.

– Область определения функции тангенс: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, Z – множество целых чисел. Поведение функции $y = tgx$ на границе области определения

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi k + 0} tg(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi k - 0} tg(x) = +\infty$$

Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, являются вертикальными асимптотами.

– Наименьший положительный период функции тангенс T=π.

– Функция обращается в ноль при $x = \pi k$, где $k \in Z$, $Z$ – множество целых чисел.

– Область значений функции $y = tgx$: $y \in (-\infty; +\infty)$.

– Функция тангенс - нечетная, так как на всей области определения $y(-x) = -y(x)$.

– Функция возрастает при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in Z$.

– Функция вогнутая при $x \in [\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in Z$, выпуклая при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k], k \in Z$.

– Координаты точек перегиба $(\pi k; 0), k \in Z$.

– Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

9. Изобразим график функции котангенс (его называют «котангенсоида») рисунок 9:

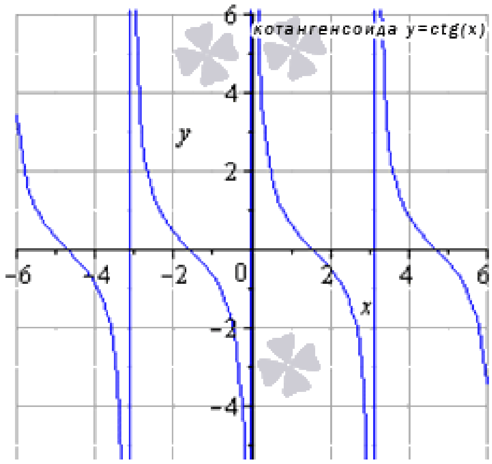



Рис. 9

Свойства функции котангенс y = ctgx.

– Область определения функции котангенс: $x \in (\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in Z$, $Z$ – множество целых чисел. Поведение на границе области определения

$$\lim_{x \to \pi \cdot k - 0} tg(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \pi \cdot k + 0} tg(x) = +\infty$$

Следовательно, прямые $x = \pi k$, где $k \in Z$ являются вертикальными асимптотами.

– Наименьший положительный период функции $y = ctgx$ равен $T = \pi$.

– Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$

– Область значений функции котангенс: $y \in (-\infty; +\infty)$.

– Функция нечетная, так как на всей области определения $y(-x) = -y(x)$;

– Функция $y = ctgx$ убывает на всей области определения.

– Функция котангенс вогнутая при $x \in \left(\pi\, k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, $k \in Z$, выпуклая при $x \in [-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k)$, $k \in Z$.

– Координаты точек перегиба $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0)$, $k \in Z$.

– Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

## 1.3 Основные методы нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Метод 1. Метод оценки.

Нам часто приходится сталкиваться с такими задачами, которые решаются с помощью применения свойств ограниченности функции. К таким примерам можно отнести задачи, содержащие *sin, cos* и т.д.

Получив допустимые значения аргумента, оценить с помощью свойств неравенств соответствующие функции [1].

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = -3\cos x + 1.$$

Решение:

Функция $t = \cos x$ изменяется от –1 до 1. Значит, $-3\cos x$ - от –3 до 3, из этого следует, что функция $y = -3\cos x + 1$ изменяется от –2 до 4. Получаем, что наименьшее значение функции равно –2, а наибольшее 4.

Ответ: $max\ y = 4, min\ y = -2$ .

Рассмотрим более сложный пример, который часто встречается в ЕГЭ в части «В».

Пример 2. Найдите наименьшее целое значение функции

$y = \frac{5}{2}\sqrt{2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1}.$

Решение:

Подкоренное выражение $t = 2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1$ упростим, то получим, что $t = -3\sin^2 x + 4$

$$-1 \le sinx \le 1$$

$$0 \le sin^2 x \le 1$$

$$0 \le 3sin^2 x \le 3$$

$$-3 \le -3sin^2 x \le 0$$

$$1 \le -3sin^2 x + 4 \le 4$$

Получаем функцию $y = \frac{5}{2}\sqrt{t}$ , $t \in [1;4]$, из этого следует, что $y \in [\frac{5}{2}; 5]$.

Ответ: наименьшее целое значение функции равно 3.

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{6}{\pi} arcsin\, x + 3.$$

Решение:

Обратная тригонометрическая функция $y = arcsin\, x$ изменяется в пределах $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-3 \leq \frac{6}{\pi}\arcsin x \leq 3$$

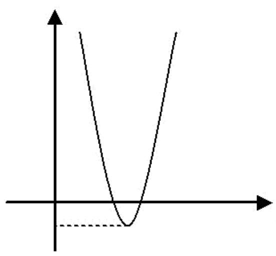
$$0 \leq \frac{6}{\pi}\arcsin x + 3 \leq 6$$

Получаем, что $y \in [0; 6]$

Ответ: $max\, y = 6,\ min\, y = 0.$

Метод 2. Метод применения свойств квадратичной функции.

Нам известно, что функция $y = ax^2 + bx + с$ изменяется в пределах $[y_0; +\infty)$, $y_{наим} = y_0, y_{наиб}$ –не существует, если $a > 0$, и если $a < 0$, то – $(-\infty; y_0]$ $y_{наиб} = y_0, y_{наим}$ – не существует, где $y_0$ – ордината вершины параболы. Это помогает при решении задач, сводящихся к квадратичной функции [7].



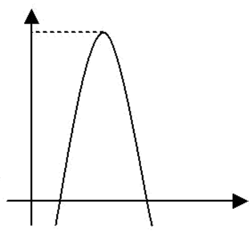


Рис. 10 Рис. 11

Пример 4. Найдите наибольшее значение функции $y = -5x^2 + x + 4$ .

Решение:

Так как –5<0, то наибольшее значение достигается в вершине параболы, то есть у = $\frac{81}{20}$.

Ответ: у = $\frac{81}{20}$

Метод 3. Метод применения свойств непрерывной функции.

Говорят, что функция *y=f(x)* возрастает на промежутке *I*, если для любых $x_1$ и $x_2$, принадлежащих *I*, из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. И функция *y=f(x)* убывает на промежутке *I*, если для любых $x_1$ и $x_2$, принадлежащих *I*, из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. Функции, возрастающие (убывающие) на промежутке I, называют монотонными на этом промежутке.

Функция *f(x)* убывает на промежутке *I* там, где *f'(x)<0* и возрастает, если *f'(x)>0.*

Если знак производной меняется с + на -, то эта точка перехода из области определения является точкой максимума. И наоборот, если знак производной меняется с – на +, то эта точка перехода из области определения является точкой минимума [4].

Пример 5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.

$y = \log_{\frac{1}{3}}(3x+6) + \frac{1}{\pi} arccosx$ на $[-1; 1]$.

Решение:

Функция $t = 3x + 6$ на отрезке $[-1; 1]$ возрастает, принимая значения от 3 (в точке $x = -1$) до 9 (в точке $x = 1$). Функция же $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ убывает, причем, если $t$ меняется от 3 до 9 (как у нас), то $\log_{\frac{1}{3}} t$ принимает значения -1 до -2.

Что касается функции $\frac{1}{\pi}\arccos x$, то она тоже убывает на отрезке $[-1; 1]$ принимая на концах отрезка значения 1 и 0.

Значит, на отрезке $[-1;1]$ функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(3x+6) + \frac{1}{\pi} arccosx$ убывает, поэтому свое наибольшее значение принимает в левом конце отрезка при $x = -1$, а наименьшее – в правом конце отрезка при $x = 1$.

Ответ: $max\, y = 0, min\, y = -2$.

Пример 6. Найдите наибольшее значение функции при $x \in [0;3]$.

$$y = 2 \cdot 3^{\frac{x^2+5}{2x+1}}$$

Решение:

Функция $y = 2 \cdot 3^{\frac{x^2+5}{2x+1}}$ монотонно возрастает, значит, наибольшее значение функции принимает при $x = 3$.

Ответ: $max\, y = 18$.

Ответ: max y= $\frac{4}{3}$.

Метод 4. Метод непосредственных вычислений.

В случае, когда область определения содержит лишь несколько значений аргумента или может быть записана с помощью конечного числа формул (например, для тригонометрических функций), множество значений функции находят путём непосредственного вычисления всех возможных значений. Затем делают вывод.

Пример 7. Найдите набольшее и наименьшее значение функции

$$y = 7 - \sqrt{6x - x^2 - 9.}$$

Решение:

Запишем данную функцию в виде $y = 7 - \sqrt{-(x-3)^2}$ и найдем $D(y){:} -(x-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0, x = 3$. Значит, функция определена при одном значении x и $y(3) = 7$. Таким образом, наименьшее и наибольшее значения равны 7.

Ответ: $max\, y = min\, y = 7$.

Пример 8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$\varphi(x) = sin^2\frac{x}{2} - \sqrt{-sin^2 3x}.$$

Решение:

$D(\varphi(x))$: $-\ sin^2 3x \geq\ 0 \Leftrightarrow sin^2 3x = 0\ \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x\ = \frac{\pi}{3}\ \cdot\ n, n\ \in\ Z$.

Область определения функции содержит лишь числа вида $\frac{\pi}{3}$ · n.

Вычисляем значения функции при $x = \frac{\pi}{3}$ · n. Учитывая, что $sin^2 3x = 0$,

имеем $\begin{cases} \varphi(x) = sin^2 \frac{x}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \cdot n, n \in Z \end{cases}$

По формуле половинного аргумента $sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-cosx}{2}$. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2}$$

Для чисел вида $x = \frac{\pi}{3} \cdot n$ подвижный радиус может занимать одно из шести положений. Но в этих положениях $cos$ принимает лишь значения 1, $\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{2}$, -1. Тогда множество значений состоит из чисел $0; 0{,}25; 0{,}75; 1$. Отсюда делаем вывод, что наименьшее значение равно $0{,}25$; а наибольшее равно 1

Ответ: $max = 1, min = 0{,}25$.

Метод 5. Графический метод.

Если функция *y=f(x)* не является непрерывной на промежутке *(a;b)*, то для отыскания ее наибольшего и наименьшего значений на этом промежутке часто поступают так: строят график функции и делают все необходимые выводы по графику. Впрочем, этот метод вполне реализуем и для непрерывных функций, но поскольку, как правило, построить график сложнее, чем использовать алгоритмы, о которых мы говорили выше, для непрерывных функций обычно предпочитают работу по указанным алгоритмам.

Пример 9. Найдите наименьшее значение функции

$y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$, где $a < b < c$.

Решение:

Чтобы построить график, есть смысл задать функцию так, чтобы не было знаков модулей. Для этого необходимо рассмотреть аналитическое выражение функции в каждом из следующих четырех возможных случаев.

1. Если $x < a$, $\quad x - a < 0, x - b < 0, x - c < 0$, значит

$|x-a| = a-x, |x-b| = b-x, |x-c| = c-x,$ и получаем

$$y = -3x + a + b + c$$

2. Если $a \le x < b$, $x - a \ge 0, x - b < 0, x - c < 0$ , значит,

$$y = -x + b + c - a$$

3. Если $b \le x < c, x = a > 0, x - b \ge 0, x - c < 0$, значит,

$$y = x - a - b + c$$

4. Если $x \ge c, x - a > 0, x - b > 0, x - c \ge 0$, значит,

$$y = 3x - a - b - c$$

Заданную функцию можно переписать в следующем виде:

$$y = \begin{cases} -3x + (a+b+c), x \le a \\ -x + (b+c-a), a \le x < b \\ x + (c-a-b), b \le x < c \\ 3x - (a+b+c), x \ge c \end{cases}$$

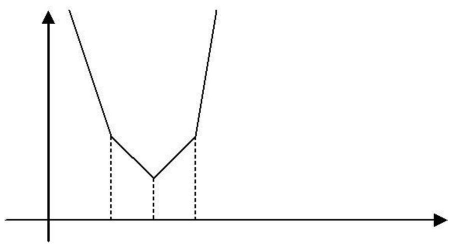


Рис. 12

Изобразив график этой функции, делаем вполне очевидный вывод: $y$ наименьшее достигается при $x = b$ и равняется $c - a$.

Метод 6. Метод производной.

На промежутке.

Наибольшим (наименьшим) значением функции *f(x)* на $I$ называется такое число $M(m)$, что существует $x_0 \in I$ такое, что $f(x_0) = M$ $(f(x_0) = m)$, $M \ge f(x)$ $(m \le f(x))$ для всех $x$ на $I$.

Наибольшее и наименьшее значение на $I$ функция может принимать либо на концах промежутка, либо в критических точках.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего на $[a;b]$ значений функции, непрерывной на $[a;b]$.

1. Найдите $f(a)$ и $f(b)$ – значение функции на концах промежутка.

2. Найдите критические точки функции внутри промежутка $(a; b)$.

3. Найдите значение функции в критических точках.

4. Из всех найденных значений выберите наибольшее и наименьшее числа, они и будут наибольшим и наименьшим значением функции на $[a; b]$ [1].

Пример 10. $f(x) = 8x^2 - x^4$ при $x$ $[-1; 3]$

Решение:

Найдем значения функции на концах промежутка.

$f(-1) = 7$

$f(3) = -9$

Найдем критические точки функции внутри промежутка $(-1; 3)$

$f'(x) = 16x - 4x^3$

$f'(x) = 0$

$x = 0$

$x = 2$

$x = -2,\ -2 \notin [-1; 3]$

Найдем значения функции в критических точках.

$f(0) = 0$

$f(2) = 16$

Выберем наибольшее и наименьшее.

$$max\{7; -9; 0; 16\} = 16 \Rightarrow max\, f\,(x) = 16$$

$$min\{7; -9; 0; 16\} = -9 \Rightarrow min\, f\,(x) = -9$$

Если непрерывная функция имеет на промежутке $I$ единственную точку экстремума и этот экстремум максимум (минимум), то в этой точке достигается наибольшее (наименьшее) значение функции.

Пример 11. $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x, \quad x \in [0; \pi]$

Решение: Найдем значение функции на концах промежутка.

$$f(0) = \sqrt{3}$$

$$f(\pi) = -\sqrt{3}$$

Найдем критические точки функции внутри промежутка.

$$f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

При $k$=*0* $x$ удовлетворяет условию.

Найдем значение функции в критической точке. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$

Выберем наибольшее и наименьшее.

$$\max f(x) = 2$$

$$\min f(x) = -\sqrt{3}$$

В условиях многих задач явно не формируется, что требуется найти наибольшее и наименьшее значение. К таким задачам, например, относятся задачи, связанные с нахождением множества значений функций.

На интервале.

Нужно выяснить, как ведет себя функция $y=f(x)$ при приближении аргумента $x$ к концам промежутка. Иными словами нужно вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ эти значения заменят нам значения функции на концах промежутка и, в сравнении со значениями функции в критических точках, лежащие внутри рассматриваемого промежутка, позволят сделать правильные выводы о наличии у функции наибольшего или наименьшего значений на рассматриваемом промежутке.

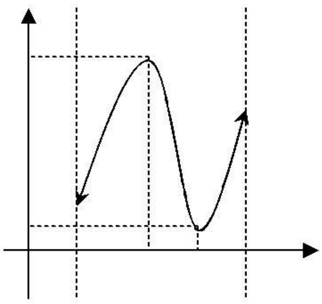


Рис. 13

Пример 12. Найти наименьшее и наибольшее (если они есть) значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x$ на интервале $(0; 8)$.

Решение:

1. Имеем $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

2. $f'(x)$ существует при любых $x$, найдем точки, в которых $f(x) = 0$.

Имеем $3x^2 - 18x + 15 = 0$, откуда $x_1 = 1, x_2 = 5$. Обе точки принадлежат заданному интервалу.

3. $f(1) = 7, f(5) = -25$

4. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x^3 - 9x^2 + 15x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 8} f(x) = \lim\limits_{x \to 8}(x^3 - 9x^2 + 15x) = 56$

Рекомендуется использовать следующую запись:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | $\to 0$ | $\to 8$ | 1 | 5 |
| y | $\to 0$ | $\to 56$ | 7 | -25 |

Сравнивая значения в критических точках $(7 \text{ и } -25)$ с пределами функции на концах промежутка $(0 \text{ и } 56)$, делаем вывод: $min\ y = -25$.

# 2 МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

## 2.1 Анализ содержания школьных учебников на наличие задач о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции

В соответствии с Государственным образовательным стандартом умения и навыки обучающихся должны соответствовать следующим требованиям:

– Вычислять производные и первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;

– Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простейших рациональных функций с использованием аппарата математического анализа;

– Вычислять в простейших случаях площади с использованием первообразной;

– Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения;

– Применять аппарат математического анализа к решению задач.

Отталкиваясь от требований Госстандарта можно сделать вывод о том, что обучающие должны владеть базовыми навыками математического моделирования и в частности, должны уметь использовать математический аппарат для решения задач на отыскания наибольших и наименьших значений различных величин при заданных условиях. Таким образом, реализуется практическая направленность обучения математике, и осуществляются межпредметные взаимосвязи с другими различными дисциплинами. Первоначально обучающиеся должны владеть универсальным методом решения задачи на оптимизацию, методом, включающим в себя построение некоторой функции и отыскание ее экстремумов с помощью производной.

Разберем, как данную тему вводят авторы учебников по «Алгебре и началам анализа» для 10-11 классов Мордкович А.Г., Колмогоров А.Н., Башмаков М.И. и др.

1. Для начала рассмотрим, как эта тема представлена в серии учебниках под редакцией А.Г. Мордковича ([17]- [21], [23], [24]).

С задачами на экстремум в 7 классе сталкиваются первый раз при изучении координатной прямой. Ученикам доводится решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего числа на взятом промежутке, нахождение наибольших и наименьших значений функций на отрезке. Приведем пример одной задачи:

Укажите наибольшее число, принадлежащее промежутку:

а) [-15;-11]; б) [5;7); в)[5;7];

В теме «Линейная функция» в 7 классе Мордкович А.Г. вводит само понятие наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Он рассматривает линейную функцию, например: $y = \frac{1}{2}x + 4$ на отрезке [0;6]. [17].

Соответствующий отрезок графика выделен на чертеже. Отмечается, что самая большая ордината у точек, принадлежащих выделенной части, равна 7 – это и есть наибольшее значение заданной линейной функции на отрезке. Позже отмечается, что самая маленькая ордината у точек, принадлежащих выделенной на рисунке части прямой, равна 4 – это и есть наименьшее значение линейной функции на отрезке $[0; 6]$

В 8 и 9 классах обучающиеся при изучении квадратичной функции (8 класс) и при изучении темы «Неравенства» (9 класс) продолжают сталкиваться с задачами на нахождение наибольшего и наименьшего значения. На данном этапе ученикам встречаются такие задачи как нахождение наименьшего числа удовлетворяющего системы уравнений, и нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке [18], [19].

Продемонстрируем несколько примеров:

(8 класс). Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 6$. С помощью графика найдите:

а) значения y при x = 4; 7; 16;

б) значения x, если y = 0; 1; 3;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [0; 4];

г) при каких значениях x график функции расположен выше прямой

y = 1; ниже прямой y = 1.

(8 класс) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^2+2$:

а) на отрезке [0; 4];

б) на луче [3; +∞);

в) на отрезке [1; 9];

г) на полуинтервале (2; 9].

(8 класс) Постройте график функции $y = (x-4)^2$. С помощью графика найдите:

а) значения y при x = -3; 1; 6;

б) значения x если y = 3; -1; -6;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [-3; -1];

(9 класс) Решите двойное неравенство $0 < 1 + 4x < 17$ и укажите наименьшее и наибольшее целые числа, которые являются его решениями.

(9 класс) Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее системе неравенств:

$$\begin{cases} 3 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} < \frac{7+8x}{2} \\ 7(3x-5) + 4(17-x) > 18 - \frac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$$

В учебниках для 10 класса Мордкович уже отводит для данной темы целый параграф, под заголовком «Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин» и разбивает он его на 2 пункта:

– Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке;

– Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин [20].

В первом пункте параграфа автор рассматривает нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, и подмечает, что производная применяется в тех случаях, если графически или с помощью рассуждений отыскать наибольшее и наименьшее значение функции невозможно. Затем автор говорит о теоремах из курса математического анализа, которые приводятся без доказательств:

– Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего и наименьшего значения.

– Наибольшего и наименьшего значения непрерывная функция может достигать, как и на концах отрезка, так и внутри него.

– Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Затем в этом пункте показан алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1. Найти производную.

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка.

3.Вычислить значения функции в точках, отобранных на втором шаге, и на концах отрезка; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет наименьшее значение) и наибольшее (это будет наибольшее значение).

Так же в первом пункте автор рассказывает о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции на интервале, и приводит следующую теорему:

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке I и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если $x = x_0$ - точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ - точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$;

После теоремы  разобран пример:

Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ на луче $[0; +\infty)$.

Второй пункт параграфа посвящен текстовым задачам, в которых необходимо найти наименьшее или наибольшее значение какой-либо величины. Это так называемые задачи на оптимизацию (от латинского слова optimum – «наилучший»). В более простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которой зависит от другой, причем надо найти такое значение второй величины, при которой первая принимает свое наибольшее или наименьшее (наилучшее в данных условиях) значение. При решении задач на оптимизацию Мордкович А.Г. рассматривает схему из трех этапов математического моделирования:

1. Составление математической модели;

2. Работа с моделью;

3. Ответ на вопрос задачи;

Приведем примеры задач:

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на указанном отрезке: $y = x^2 + 4x - 3$ на [0;2].

2. Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200м. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

3. Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

4. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

5. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на a м, а верхняя точка постамента - на b м. На каком расстоянии от памятника должен стоять человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

В данных примерах есть необходимость использование производной. Но у Мордковича А.Г. также есть ряд задач, в которых нужно найти наибольшее и наименьшее значение заданной функции без использования производной [23], [24].

Так же имеются задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке:

1) y = $x^2 + 2$ на (0;4]; 2) y = $x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ на (-5;1].

2. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс», под ред. Колмогорова А.Н. [12]

Колмогоров А.Н. в отличие от Мордковича А.Г., рассматриваемую тему не разбивает на подпункты. В учебниках она описана как «Наименьшее или наибольшее значение функции». В учебнике под ред. Колмогорова А.Н. также описано, что в курсе математического анализа доказывается следующая теорема Вейерштрасса: непрерывная на отрезке функция принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Это означает, что существуют точки отрезка, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Затем автор учебника рассказывает о том, как найти наибольшее или наименьшее значения функции. Однако определённого алгоритма нахождения наибольшего или наименьшего значений функции, например как у Мордковича А.Г. у него нет. Объясняя метод поиска наибольших и наименьших значений функции на отрезке в начале пункта, автор отмечает, что данный метод можно применить к решению разнообразных прикладных задач. Далее в учебнике он приводит схему решения таких задач, называемую методом математического моделирования:

Задача «переводится» на язык функции. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию *f(x);*

Средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;

Выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Приведём примеры задач из данного учебника:

1) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

y =$x^2(6-x)$ на промежутках [-3;-2] и [1;5]

2) Сравните наибольшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ на промежутке $P_1$ и наименьшее её значение на промежутке $P_2$:

$$P_1 = [-4; 0],\ P_2 = [3; 4]$$

3) Материальная точка движется по прямой согласно закону s(t)=$12t - 3t^3$, где s(t) - путь в метрах и t - время в секундах. В какой момент времени из промежутка [4;10] скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой скорости?

4) Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

5) Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.

6) Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки желает достигнуть села B, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от A (участок AB берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?

7) Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Подводя итог анализа учебника «Алгебра и начала анализа 10-11 класс», под ред. Колмогорова А.Н. можно выделить, что автор предлагает обучающимся знакомство с рядом теорем, в основе которых лежит дифференциальное исчисление. В общеобразовательных классах такие теоремы учащимся не предлагаются для изучения.

Также можно отметить, то, что учебник Колмогорова более насыщен различными задачами на нахождение наибольшего и наименьшего значения функций, чем например учебник Мордковича А.Г.

3. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс», Башмаков М.И. [2]

В школьном учебнике Башмакова М.И. рассматриваемая тема описывается в разделе «применение производной» в пункте под названием «Задачи на максимум и минимум». Можно выделить, то, что в учебнике Башмакова М. И. теории нет как таковой. В начале пункта автор показывает, практическое применение темы в повседневной жизни, что большую часть своих стараний человек тратит на поиск лучшего решения проблемы, которая возникает перед ним. Далее автор приводит алгоритм для нахождения наибольшего и наименьшего значения, когда функция задана на отрезке и имеет производную во всех точках отрезка:

1.Найти критические точки;

2.Вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка;

3.Из найденных значений найти наибольшее и наименьшее.

Позже автор учебника рассматривает ряд графиков, разобрав которые, обучающимся предлагается самостоятельно подумать над тем, что происходит с наибольшим и наименьшим значениями этих функций. Затем в учебнике рассматривается ряд задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений. Если сравнивать учебник Башмакова М.И. с учебниками Мордковича А.Г., Колмогорова А.Н. то можно увидеть что в отличие от остальных Башмаков М.И. не дает конкретной схемы решения прикладных задач. И это, конечно же, усложняет процесс усвоения данной темы.

Необходимо так же отметить, что предлагаемые Башмаковом М.И. задачи на данную тему крайне сложные, и решить их сможет, к сожалению не каждый ученик. Еще один нюанс в том, что проверить правильность решения задачи не удастся, так как ответы к данному пункту не приведены.

Примеры задач:

1) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке $y = 7x^3 - 15x^2 + 36x - 13$ на $[-\frac{1}{2}; 3]$.

2) Найдите наименьший член последовательности: $a_n = n^2 - 7n + 1$

3) Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь цилиндр. Если его объём равен V?

4) Найдите число, которое, если сложить со своим квадратом, даст наименьшую сумму.

5) Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью $v$ км/ч, составляет $(90 + 0{,}4v^2)$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км путь была наименьшей?

6) На странице книги печатный текст должен занимать 150 см$^2$. Верхнее и нижнее поля страницы по 3 см, правое и левое - по 2 см. если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

4. Ш.А. Алимов «Алгебра и начала анализа 10-11 классов». [1]

Изучение производной вводится во II полугодии 11 класса в главе: «Применение производной к исследованию функций. Наибольшее и наименьше значение функции». Сначала автор знакомит учащихся с тем, что задачи, в которых требуется найти наибольшее и наименьшее значение из всех тех значений, которые функция принимает на отрезке $[a, b]$. Дает правило для нахождения наибольшего и наименьшего значения. Приводит несколько примеров задач. В итоге поясняет, что на отрезке нужно сравнить значение функции в точках экстремума и на концах отрезка.

Далее знакомит с нахождением наибольшего или наименьшего значений на интервале. Поясняя, что функция $f\ (x)$ имеет на заданном интервале только одну стационарную точку; либо точку максимума или точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f\ (x)$ принимает наибольшее значение на заданном интервале, а в точке минимума – наименьшее значение на данном интервале.

При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции автор считает полезно использовать следующее утверждение: «Если значения функции $y = f\ (x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $y = (\ f\ (x))^n$, где $n$ – натуральное число, принимает наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

5. Н.Я. Виленкин «Алгебра и математический анализ 10 класса». [4],[5].

Тема «Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке» описана в 5 главе учебника под названием «Производная и ее приложение».

Учащиеся начинают изучать тему «Производная» во II полугодии.

При изучении приложения производной автор рассказывает, что с помощью производной можно исследовать, где функция возрастает, где убывает, где достигает наибольшего или наименьшего значений и т.д.

Позже в учебнике во втором пункте параграфа с темой «Отыскание наибольших и наименьших значений функции на отрезке» приведена теорема: Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то среди ее значений на этом отрезке есть наибольшее и наименьшее. Доказательство данной теоремы автор представил в виде серии задач. После теоремы приведены примеры:

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ на отрезке [-2;2].

Также в учебнике приводится ряд примеров текстовых задач:

2. Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить куском проволоки, имеющим длину $2p$?

3. В сопротивлении материалов доказывают, что сопротивление изгибу балки прямоугольного сечения, пропорционально ее ширине x и квадрату ее

высоты $y: P = kxy^2$. Какое сечение должна иметь балка наибольшего сопротивления изгибу, вырезанная из цилиндрического бревна радиусом R?

Далее автор рассказывает, что отыскание наибольших и наименьших значений функций применяется при решении многих задач физики. Например, в положении равновесия потенциальная энергия системы достигает экстремального значения, причем в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна.

Подводя итог данного пункта, автор замечет, что задачи на наибольшее и наименьшее значения решаются по следующему плану:

1. Выбирают одну из переменных (независимую переменную) и выражают через нее ту переменную, для которой ищет наибольшее или наименьшее значение

2. Находят промежуток изменения независимой переменной.

3. Находят производную полученной в п.1 функции.

4. Приравнивают производную нулю и находят корни получившегося уравнения.

5. Находят точки, в которых функция не имеет производной.

6. Вычисляют значения функции на концах промежутка изменения независимой переменной и в точках, найденных в п. 4 и 5. а потом выбирают из них наибольшее (соответственно наименьшее).

Приведем примеры задач из данного учебника:

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке [0;4]

2. Требуется огородить участок земли, примыкающий одной стороной к морю, с помощью $a$ метров проволоки. Какую форму должен иметь участок, чтобы площадь его была наибольшей?

3.Если батарея с электродвижущей силой $E$ и внутренним сопротивлением $r$ замкнута проводником с сопротивлением $R$, то мощность тока $W$ выражается формулой $W = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}$. При каком значении $R$ мощность будет наибольшей?

## 2.2 Методика изучения темы «Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции» в курсе алгебры и начал анализа

Рассмотрим методику, которая опирается на комплекс учебников по «Алгебре и началам анализа» А.Г. Мордковича. К моменту изучения данной темы учащиеся уже накопили некоторый опыт отыскания наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего они использовали для этого график функции. Поэтому в начале изучения темы учащимся лучше предложить построить несколько графиков функции и по ним определить наибольшее и наименьшее значения функции [20], [24].

Например, функции могут быть такими:

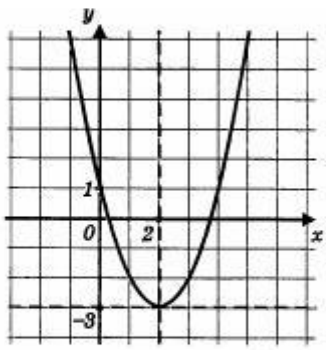



Рис. 14

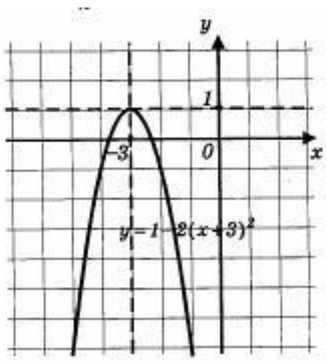



Рис. 15

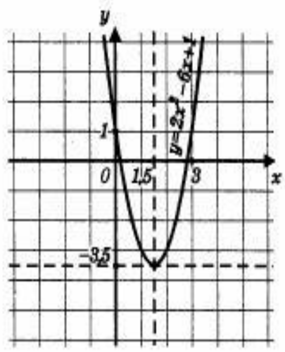



Рис. 16

Довольно легко можно определить, что наименьшее значение на рисунке 14 будет равняться $y_{наим} = -3$, наибольшее значение не существует. На рисунке 15 наибольшее значение равняется 1, а наименьшее значение не существует. На рисунке 16 наименьшее значение равняется -3,5; а наибольшее значение не существует.

Далее можно несколько усложнить задачу и попросить найти наибольшее и наименьшее значения функции, не прибегая к построению графика. Так как обучение строится конкретно-индуктивным методом, мы должны подвести учащихся к следующему правилу:

Если известно, что на отрезке $[a, b]$ функция *f(x)* монотонна, то наибольшее и наименьшее значение этой функции принимается в концах отрезка, а именно, если *f(x)* - возрастающая функция, то *f(a)* - наименьшее значение и *f(b)* - наибольшее значение функции *f(x)*; если же если *f(x)* - убывающая функция, то *f(a)* - наибольшее значение и *f(b)* - наименьшее значение функции *f(x)*.

Для этого вначале целесообразно рассмотреть конкретные примеры, с помощью которых учащиеся выйдут на это правило и смогут самостоятельно сформулировать его. Например, можно рассмотреть такую функцию как $y = 2x^2$ для $x \in [0,1]$ (см. рис. 16). Выясняем, как ведет себя функция на отрезке: она непрерывная и возрастающая. Далее делаются выводы о том, что - наименьшее значения функции $y = 0$ , $y = 2$ - наибольшее значение функции. Целесообразно рассмотреть ещё ряд аналогичных примеров для лучшего понимания.

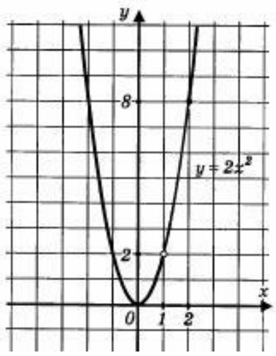



Рис. 17

Приведя, таким образом, ряд примеров, мы подводим учащихся к тому, что наибольшее и наименьшее значение функция непрерывная на указанном отрезке может достичь в стационарных, критических точках, входящих в отрезок, а так же на концах отрезка. Далее вместе с учащимися составляется алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, и этот алгоритм закрепляется на примерах подобных следующим.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x^2$ на отрезках: а) $[0; 2]$ б) $[-2; -1]$

Решение:

а) Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке [0;2].

Замечаем, что $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{наиб} = 8$ (достигается при $x = 2$).

б) Построим график функции $y=2x^2$ и выделим его часть на отрезке

[-2;-1].

Замечаем, что $y_{наим} = 2$ (достигается при $x = -1$), а $y_{наиб} = 8$ (достигается при $x = -2$) (см Рис. 18 и 19).

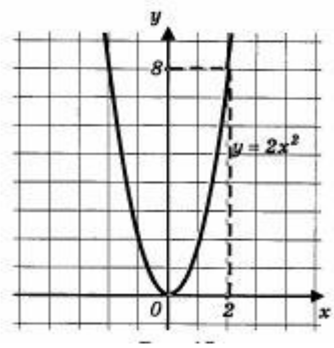



Рис. 18

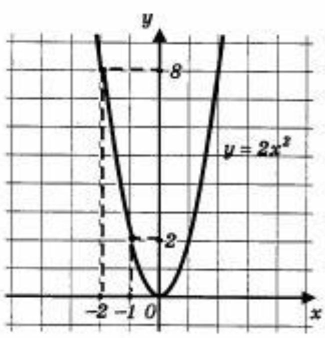



Рис. 19

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = f(x), \text{где} \quad f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, \text{если} - 4 \le x \le 0; \\ 4 - x^2, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Решение: Сначала построим параболу $y = (x+2)^2$ и выделим её часть на отрезке $[-4{,}0]$. Затем построим параболу $y = 4 - x^2$ и выделим её часть на открытом луче $(0, +\infty)$. Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат – получим график функции $y = f(x)$

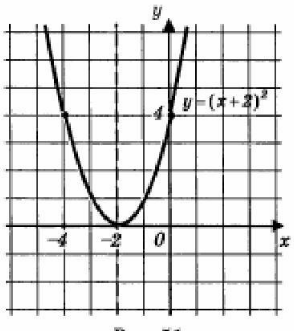



Рис. 20

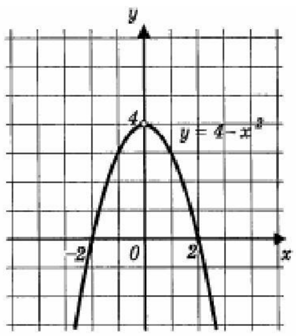



Рис. 21

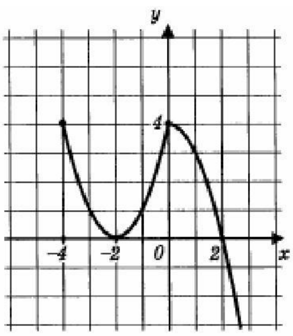



Рис. 22

Из рисунках 20, 21, 22 видим, что $y_{наим}$ - не существует; $y_{наиб} = 4$ (достигается при $x = -4$ и при $x = 0$).

# 3 РАЗРАБОТКА ФАКУЛЬТАТИВА ДЛЯ 11 КЛАССА НА ТЕМУ «ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ»

## 3.1 Цели и задачи факультатива

Преподавание факультатива строится как углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач, требующих высокой логической и операционной культуры, развивающих научно-теоретическое и алгоритмическое мышление учащихся. Факультативные занятия дают возможность шире и глубже изучать программный материал, задачи повышенной трудности, больше рассматривать теоретический материал и работать над ликвидацией пробелов знаний учащихся, и внедрять принцип опережения.

Данная программа ориентирована на учащихся 11 класса, проявляющих повышенный интерес к такому предмету, как алгебра. Психологические исследования показывают, что ребенок в подростковом периоде в состоянии оценить свои специальные способности и наклонности.

Работа с функциями и их графиками в школьном курсе ведется, но не в том объеме, который необходим при сдаче ЕГЭ и при поступлении, особенно в технические вузы. На экзаменах часто встречаются задания, где требуются знания по решению нестандартных задач.

Учителю данный курс поможет наиболее качественно подготовить учащихся к математическим олимпиадам, к сдаче ЕГЭ, так как он включает в себя задачи из Открытого банка заданий для подготовки к ЕГЭ по математики, экзаменов при поступлении в вузы.

Факультатив рассчитан на 1 час в неделю. Всего 17 часов.

Факультатив разработан на основе того, что обучающиеся уже должны знать понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса, должны знать тригонометрические функции и их свойства и построения графиков, также они должны уметь определять вид функции по графику, знать какие функции возрастающие, какие убывающие, находить экстремумы функции. Ученикам необходимо владеть понятием производной функции, физическом и геометрическом смысле производной, производные тригонометрических функций, в совершенстве знать таблицу производных, уметь применять ее на практике; Формулы и правила дифференцирования; Понятие степенная функция, свойства степенных функций; Понятие логарифма, свойства логарифмов и логарифмической функции. Формулы дифференцирование показательной и логарифмической функций. Также обучающему нужно знать признаки возрастания и убывания функции. Уметь применять производную к исследованию функции. Находить наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке, по алгоритму.

**Цель данного курса:** Восполнить некоторые содержательные пробелы основного школьного курса по теме «Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции»;

**Задачи:**

– Закрепить основы знания нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

– Закрепить знания о применении производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке.

– Расширить представления о нахождении наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функций.

– Сформировать умение решать практические задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

– Подготовить к сдаче ЕГЭ;

Основные формы организации учебных занятий: лекция, беседа, практическая работа, тестовые задания в сочетании с индивидуальной и групповой формами учебной деятельности. Основной тип занятий =

комбинированный. Занятия строятся с учётом индивидуальных особенностей обучающихся, их темпа восприятия и уровня усвоения материала.

Учебно-тематическое планирование:

| № | Темы занятий | Часы | Форма реализации |
|---|---|---|---|
| 1. | Подготовительный этап постановка цели, проверка владения базовыми навыками. Диагностирующая контрольная работа. | 2 | Контрольная работа |
| 2. | Применение производной к исследованию функции. | 1 | Лекция, практикум |
| 3. | Применение производной к исследованию функции. | 1 | Беседа, практикум |
| 4. | Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. | 1 | Лекция, практикум |
| 5. | Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. | 2 | Беседа, практикум |
| 6. | Нахождение набольшего и наименьшего значений функции (без применения производной). | 2 | Беседа, практикум |
| 7. | Повторение пройденного материала. Промежуточная контрольная работа. | 2 | Контрольная работа |
| 8. | Нахождение наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функций. | 2 | Практикум |
| 9. | Решение практических задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. | 2 | Беседа, практикум |
| 10. | Обобщающее занятие. Итоговая контрольная | 2 | Контрольная |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | работа. | | работа |

В результате изучения на факультативе учащиеся научатся:

– Применять полученные математические знания в решении жизненных задач;

– Определять тип задачи, знать особенности методики её решения, используя при этом разные способы;

– Определять свойства функции по ее графику; применять графические представления при решении уравнений;

– Применять производную к исследованию функции. Пользуясь планом, исследовать функцию и построить её график;

– Исследовать функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций;

– Уметь находить наибольшее и наименьшее значение тригонометрических функций;

– Закрепить навык индивидуальной работы, работы в группах и парах сменного состава;

Критерии оценивания работ учащихся:

Отметка «5» ставится, если работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок;

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета в рисунках, чертежах

Отметка «3» ставится, если допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

## 3.1 Методическая разработка занятий факультатива

Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Тема занятия: Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Цели занятия:

– Обучающая: показать основные приемы нахождения наибольшего и наименьшего значений на промежутке.

– Развивающая: развить нестандартное мышление через умение находить пути решения в зависимости от условия задачи, воспитать культуру соблюдения всех этапов алгоритма.

– Воспитательная: воспитать терпение, упорство в достижении цели.

В ходе изучения теоретического материала были рассмотрены вопросы:

1) Нахождение наибольшего и наименьшего значений с помощью производной

2) Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1. найти производную $f'(x)$ функции,
2. найти стационарные и критические точки, расположенные внутри отрезка,
3. вычислить значения функции в выбранных точках,
4. вычислить значения функции на концах отрезка,
5. из полученных значений выбрать наименьшее и наибольшее значения.

Упражнения.

Задание 1.

Дано: $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in [0; 2]$. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке.

Решение: Найдем производную $y' = 3x^2 - 18x + 15$**.** Найдем критические точки $3(x^2 - 6x + 5) = 0$, отсюда $x_1 = 1$ , $x_2 = 5$ – критические точки. Из них выбираем те, которые принадлежат данному отрезку: $x_1 = 1$. Сравниваем значения функции в точках x=0, x=1, x=2.

Для этого найдем:

$y(0) = -3;$

$y(1) = 1 - 9 + 15 - 3 = 16 - 12 = 4;$

$y(2) = 8 - 36 + 30 - 3 = 38 - 39 = -1;$

Ответ: $\boldsymbol{y}_{\text{наиб}} = y(1) = 4$ , $\boldsymbol{y}_{\text{наим}} = y(0) = -3$ .

Задание 2.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 17$ на отрезке $[-3; 3]$

Задание 3.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 23$ на отрезке $[8; 13]$

Задания для самостоятельного решения.

1. $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4].
2. $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке [– 2; 0]
3. $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке [ 1; 4 ]
4. $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке [ -3; 3 ]
5. $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке [-10; 1 ]

Задание 4.

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4{,}5; 0]$

Решение: область определения функции $x \in (-5; +\infty)$

Найдем производную заданной функции

$$y' = (\ln(x+5)^5 - 5x)' = \frac{1}{(x+5)^5} \cdot ((x+5)^5)' - 5 = \frac{1}{(x+5)^5} \cdot 5 \cdot (x+5)^4 - 5$$

$$= \frac{5}{x+5} - 5$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$\frac{5}{x+5} - 5 = 0$

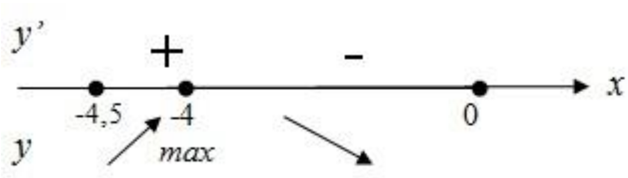
$\frac{1}{x+5} - 1 = 0$

$\frac{1}{x+5} = 1$

$x + 5 = 1$

$x = -4$ принадлежит $[-4{,}5; 0]$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:




В точке $x = -4$ заданная функция имеет максимум, являющийся её наибольшим значением на заданном отрезке.

Найдём это наибольшее значение:

$$y(-4) = \ln(-4+5)^5 - 5 \cdot (-4) = \ln 1 + 20 = 20$$

Ответ: 20

Задание 5.

Найдите наименьшее значение функции $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} - 5\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 2$ на отрезке $[-2; 1]$

Решение: Найдем производную заданной функции

$y' = 2e^{2x} - 5e^x = e^x(2e^x - 5).$

Найдем критические точки (т.е. внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует) принадлежащие отрезку $[-2; 1]$:

$e^x(2e^x-5)=0$

$e^x>0;\ 2e^x-5=0$

$e^x=\dfrac{5}{2}$

$x=\ln\frac{5}{2}\in[-2;1]$

Найдем значения функции в точке $x=\ln\frac{5}{2}$, и на концах отрезка:

$y(-2)=e^{2\cdot(-2)}-5e^{-2}-2=\dfrac{1}{e^4}-\dfrac{5}{e^2}-2\approx-2{,}65836$

$y(1)=e^{2\cdot 1}-5e^1-2=e^2-5e-2\approx-8{,}202353$

$y(\ln\dfrac{5}{2})=e^{2\cdot\ln\frac{5}{2}}-5e^{\ln\frac{5}{2}}-2=e^{\ln\frac{25}{4}}-5\cdot\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{2}-2=\dfrac{25-50-8}{4}$

$=\dfrac{-33}{4}=-8\dfrac{1}{4}=-8{,}25$

Ответ: $y_{\text{наим}}=-8{,}25$

Задание 6.

Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{27+6x-x^2}$

Задание 7.

Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-8x+80}$

Задание 8.

Найдите наименьшее значение функции $y=e^{2x}-8e^x+9$ на отрезке $[0;2]$

## Нахождение наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функции.

Тема занятия: Нахождение наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функции.

Цели занятия:

– Образовательные: показать основные приемы нахождения наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функции;

– Развивающие: способствовать развитию умений анализировать, устанавливать связи, причины и следствия; предвидеть возможные ошибки и способы их устранения; способствовать повышению концентрации внимания, развитию памяти и речи.

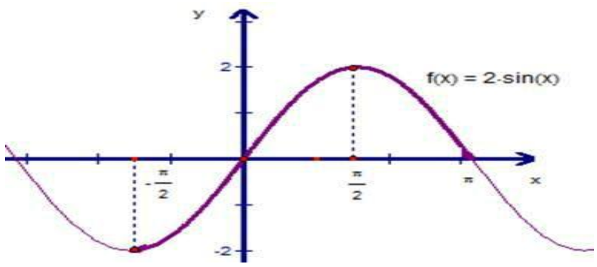
– Воспитательные: - способствовать развитию интереса к предмету «Математика»;

Решение задач

Задание 1.

Дано $y = 2sinx\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке.

Решение: Построим график этой функции.




Если аргумент меняется на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то функция возрастает от -2 до 2. Если аргумент возрастает от $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, то функция убывает от 2 до 0.

Найдем производную $y' = \ 2cosx$

$2\,cos\,x\ =\ 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$ Если $n = 0$, то $x\ =\ \frac{\pi}{2}$ и это значение принадлежит заданному отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Если $n = -1$, то $x\ =\ -\frac{\pi}{2}$ . Легко проверить, если $n$ принимает другие значения, соответствующие стационарные точки выходят за пределы заданного отрезка. Сравним значения функции на концах отрезка и отобранных точках, в которых производная равна нулю. Найдем:

$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;\ \ y(\pi) = 0$

Ответ: $\boldsymbol{y}_{\text{наиб}} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ , $\boldsymbol{y}_{\text{наим}} = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$ .

Итак, ответ получен. Производную в данном случае можно использовать, можно не использовать, применить свойства функции, которые были изучены ранее. Так бывает не всегда, иногда применение производной – это единственный метод, который позволяет решать подобные задачи.

Задание 2. Найдите наибольшее значение функции

$y = 59x - 56sinx + 42$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Решение. Заметим, что областью определения данной функции является множество всех действительных чисел $R$ и отрезок $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ в ней содержится полностью.

Найдём критические точки, принадлежащие данному отрезку. Для этого найдём производную функции $y' = (59x - 56sinx + 42)' = 59 - 56cosx$.

Решаем уравнение $59 - 56cosx = 0$, или $59 = 56cosx$, $cosx = \frac{59}{56} > 1$. Уравнение корней не имеет, так как $-1 \leq cosx \leq 1$.

Так как критических точек у функции нет, значит, она ведёт себя монотонно, возрастает или убывает на всей области определения. Найдём значение производной в точке ноль, $y'(0) = 59 - 56cos0 = 59 - 56 = 3 > 0$, функция возрастает. Наибольшее значение она принимает в правом конце отрезка, то есть в точке 0.

$y(0) = 59 \cdot 0 - 56sin0 + 42 = 42$.

Ответ: 42.

Задание 3. Найдите наибольшее значение функции $y = 25x - 25tgx + 41$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Решение. Заметим, что областью определения данной функции является множество всех действительных чисел R, кроме точек $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k- любое целое число, отрезок $[0; \frac{\pi}{4}]$ в ней содержится полностью. Найдем критические точки, принадлежащие данному отрезку. Для этого найдем производную функции $y' = (25x - 25tgx + 41)' = 25 - \frac{25}{cos^2x}$.

Решаем уравнение $25 - \frac{25}{cos^2x} = 0$, после деления обеих частей неравенства на 25 получим $1 - \frac{1}{cos^2x} = 0$. Отсюда $\cos^2 x = 1$, отсюда $\cos x = 1$

или $\cos x = -1$. Решения этих уравнений $x = 2\pi k$ или $x = \pi + 2\pi n$, где k,n- любое целое число. Из всех этих решений только один корень 0 принадлежит данному отрезку $[0; \frac{\pi}{4}]$

Но он совпадает с крайней точкой отрезка. Это говорит о том, что функция на отрезке ведет себя монотонно, возрастает или убывает. Найдем значения производной в точке $\frac{\pi}{6}$ , $y(\frac{\pi}{6}) = 25 - \frac{25}{cos^2\frac{\pi}{6}} = 25 - \frac{25}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 25 - \frac{25\cdot 4}{3} < 0$, функция убывает. Наибольшее значение она принимает в левом конце отрезка, то есть в точке 0.

$y(0) = 25\cdot 0 - 25tg0 + 41 = 41$

Ответ: 41

Задания для самостоятельной работы.

1)Найдите наименьшее значение функции $y = 20x - 20tgx - 36$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; 0]$.

2)Найдите наибольшее значение функции $y = 31x - 31tgx + 13$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$.

3)Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7tgx + 13$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; 0]$.

Задание 4.

Найдите наибольшее значение функции $y = 12cosx + 6\sqrt{3}\cdot x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

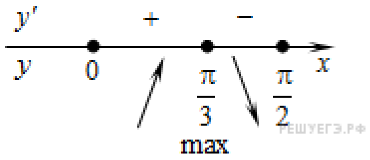
Решение:

Найдем производную заданной функции : $y' = -12sinx + 6\sqrt{3}$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} -12sinx + 6\sqrt{3} = 0 \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:




В точке $x = \frac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

Ответ: 12

### 3.3 Апробация методических материалов по теме «Задачи на отыскание набольшего и наименьшего значений функции в школьном курсе математики»

В период с 6.02.2017 по 19.04.2017 была проведена апробация факультативных занятий на тему «Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции» в МБОУ Лицее №10 г. Белгорода в 11 классах. Для проведения апробации были задействованы 2 класса. Количество посещаемых факультатив 12 человек.

Апробация проходила следующим образом:

Разработали программу факультативного курса на тему: «Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции» для учащихся 11 класса.

Факультативные занятия были разработаны на основе анализа математической, методической, психолого-педагогической и учебной литературы.

На первом занятии проводилась диагностирующая контрольная работа, которую нужно было решить в течении 1 часа, в работе было предложено 3 задания.

*Контрольная работа № 1 по алгебре и началам анализа для 11 класса по теме «Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке »*

| Вариант _1_ | Вариант _2_ |
|---|---|
| 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке [a;b], используя график функции.<br>a) $y = x + 3, x \in [-2; 1]$<br>b) $y = x^2 + 2,\ x\ \in [-1; 1]$<br>2. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2+100}{x}, x \in [4; 21]$<br>3. Найти наибольшее и наименьшее | 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке [a;b], используя график функции.<br>a) $y = 2 - x,\ x \in [-2; 1]$<br>b) $y = x^2 - 2,\ x\ \in [0; 1]$<br>2. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2+25}{x}, x \in [1; 10]$<br>3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке |

| | |
|---|---|
| значение функции на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$. $y = sinx$ | $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$. $y = sinx$ |

Результаты диагностирующей контрольной работы №1 показали, что не все учащиеся владеют методами нахождения наибольшего и наименьшего значения функции. С первой задачей большинство учащихся справились. Затруднения у школьников вызвали вторая и третья, так как в третьей нужно использовать свойства тригонометрической функции.

Во время проведения факультативных занятий была проведена еще одна контрольная работа №2, для проверки эффективности занятий и усвоения материала.

*Контрольная работа №2 по алгебре и началам анализа для 11-ого класса по теме «Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке».*

| Вариант _1_ | Вариант _2_ |
|---|---|
| 1. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке [3; 6].<br>2. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке [-4;-1]<br>3. a) Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$<br>b) Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$ | 1. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке [2; 7].<br>2. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{4}{x} + 14$ на отрезке [-11;-0,5]<br>3. a) Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{168 - 22x - x^2}$<br>b) Найдите точку максимума функции $y = \log_3(11 + 4x - x^2) - 2$ |

Контрольная работа №2 показала, что результаты решения заданий учащимися улучшились по сравнению с первой контрольной работой. Так, в качественном отношении количество «четверок» и «пятерок» увеличилось, а количество «двоек» уменьшилось.

Задания были составлены примерно такого же содержания, что и в первой контрольной, кроме третьего задания. Таким образом, проведённые мною занятия по нахождению наибольшего и наименьшего значений функции способствовали обобщению и систематизации знаний школьников.

На заключительном занятии была проведена еще одна контрольная работа №3, для проверки закрепления материала.

*Контрольная работа №3 по алгебре и началам анализа 11-ого класса «Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции»*

| Вариант _1_ | Вариант _2_ |
|---|---|
| 1. Найдите наибольшее значение функции на промежутке:<br>а) $y = e^{2x} - 6e^{x} + 3$ на отрезке [1;2]<br>b) $y = 3x - \ln{(x+5)^3}$ на отрезке [-4,5;0]<br>2. Найти наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.<br>$y = 62cosx + 65x + 45$<br>3. Каковы должны быть стороны прямоугольника, периметр которого равен 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей? | 1. Найдите наибольшее значение функции на промежутке:<br>а) $y = e^{2x} - 4e^{x} + 6$ на отрезке [0;3]<br>b) $y = 3x - \ln{(x+3)^3}$ на отрезке [-2,5;0]<br>2. Найти наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.<br>$y = 9cosx + 14x + 7$<br>3. Периметр прямоугольника равен 56 см. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы площадь была наибольшей? |

Результаты контрольной работы №3 показали, что почти все учащиеся владеют алгоритмом нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. С первой задачей большинство учащихся справились. Школьники затрудняются со второй задачей. Для решения текстовой задачи необходимо знать понятия из геометрии: периметр, площадь многоугольников, построение моделей ситуаций в текстовых задачах и т.д.

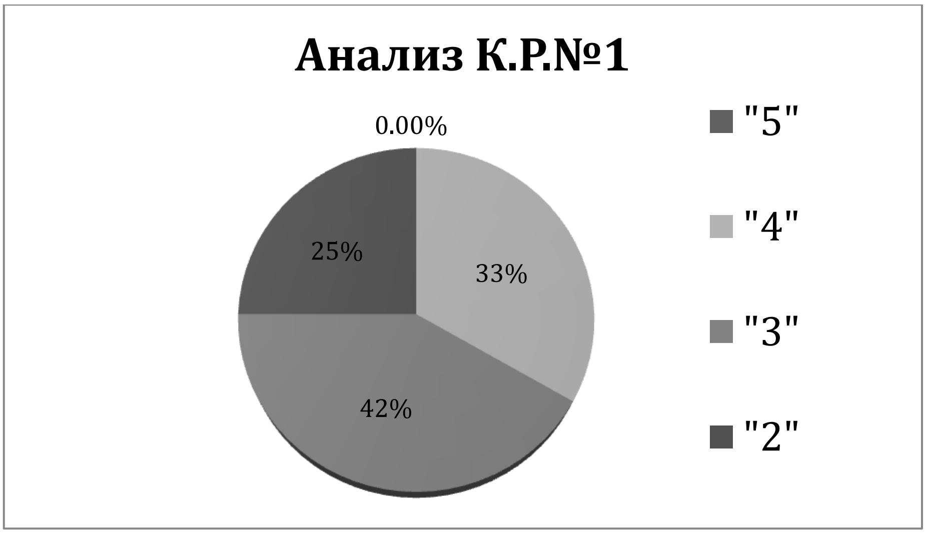
Оценки за контрольную работу оказались лучше, чем предыдущие. Поэтому можно сделать вывод, что материал был доступен и хорошо усвоен. Изучение темы вызвало интерес у учащихся.

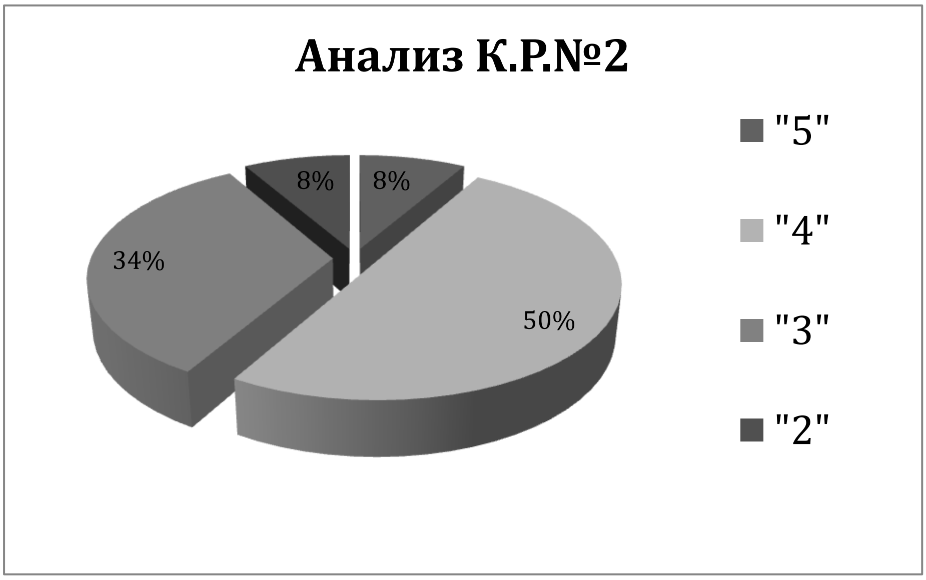
| № | Ф.И. | К.Р.№1 | К.Р.№2 | К.Р.№3 |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Белобородова Ирина | 4 | 4 | 5 |
| 2. | Василева Валерия | 3 | 4 | 4 |
| 3. | Веселова Анастасия | 2 | 2 | 2 |
| 4. | Андреев Александр | 3 | 4 | 4 |
| 5. | Гаврилова Виктория | 4 | 4 | 5 |
| 6. | Ильин Владислав | 2 | 3 | 3 |
| 7. | Гринякин Дмитрий | 4 | 4 | 4 |
| 8. | Кубрак Данила | 3 | 3 | 3 |
| 9. | Линькова Маргарита | 4 | 5 | 5 |
| 10. | Потапенко Елизавета | 2 | 3 | 3 |
| 11. | Подмоков Никита | 3 | 4 | 4 |
| 12. | Багрова Наталья | 3 | 3 | 4 |

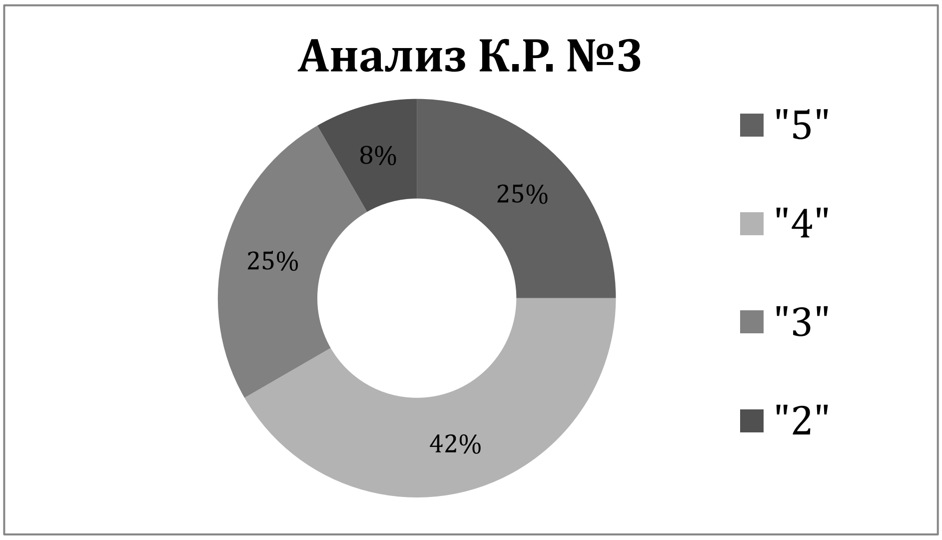
Оценки распределились следующим образом:

| К.Р. №1 | К.Р.№2 | К.Р.№3 |
|---|---|---|
| «5»- 0 учащихся;<br>«4»- 4 учащихся;<br>«3»- 5 учащихся;<br>«2»- 3 учащихся; | «5»- 1 учащийся<br>«4»- 6 учащихся;<br>«3»- 4 учащихся<br>«2»- 1 учащийся; | «5»- 3 учащихся;<br>«4»- 5 учащихся;<br>«3»- 3 учащихся;<br>«2»- 1 учащийся; |

Приведем анализ контрольных работ в виде диаграмм.



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понятие функции является центральным в математическом образовании. От того, насколько полно и всесторонне школьник усвоит это понятие, зависит его дальнейшая адаптация в математической деятельности.

В школьном курсе алгебры и начала анализа в учебниках для общеобразовательных классов по теме «Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции» недостаточно задач для формирования у школьников умения находить наибольшее и наименьшее значения функции. Исключение составляют учебники и задачники по алгебре, по алгебре и началам анализа для классов с углубленным изучением математики (А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская и др.) С другой стороны, материал рассматриваемой темы часто используется не только в математике, но и в физике, химии и т.д., усиливая прикладной характер этой темы.

Содержание материала «Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции» позволяет проводить систематизацию знаний и умений учащихся по данной теме, основываясь на целях и задачах факультатива. Это является одним из аспектов подготовки школьников к успешной сдаче ЕГЭ по математике.

Использование разработанного факультатива позволяет создать содержательные условия применения учащимися знаний по нахождению наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке с помощью производной, выработать у учащихся навыки решения задач на применение производной. Осуществление такой учебной деятельности предполагает отработку навыка учащимися алгоритма нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, способствует развитию аналитического мышления, обобщению знаний школьников и повышению их качества, что подтверждает гипотезу данной работы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Алимов Ш. А. Алгебра и начала анализа: учебное пос. для 10-11 кл. ср. шк. / Ш.А. Алимов. – М.: Просвещение, 2009. – 320 с.
2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа 10-11 кл. / М.И. Башмаков. – М.: Просвещение, 2005. – 352 с.
3. Блох А. Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. институтов по физ.- мат. спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др. Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
4. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ 10 кл. / Н. Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 2009. – 288 с.
5. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса (учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2006. – 335 с.
6. Виленкин Н. Я. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 9 кл. с углубл. изучением математики / Н.Я. Виленкин, Г. С. Сурвилло и др. Под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 2001. – 84 с.
7. Галицкий М. Л. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изучением математики / М. Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л. И. Звавич. – М.: Просвещение, 2005. – 271 с.
8. Галицкий М.Л. Углубленное изучение алгебры и математического анализа / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбурд.–М.: Просвещение, 1997. – 347 с.
9. Глейзер Г.И. История математики в школе. 9-10 классы (пособие для учителей) / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 363 с.
10. Звавич Л.И. Алгебра и начала анализа. 8-11 кл.: Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики (дидактические материалы) / Л. И. Звавич, Л.Я. Шляпочник, М.В. Чинкина. – М.: Дрофа, 2002. – 343 с.

11. Карп А. П. Сборник задач по алгебре и началам анализа: учеб. пособие для 10-11 кл. с углубл. изуч. Математики / А. П. Карп. – М.: Просвещение, 2006. – 175 с.

12. Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала математического анализа: Учебн.пос. для 10-11 кл. ср. шк. / А. Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 2010. – 377 с.

13. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.

14. Методика преподавания математике в средней школе. Учеб. пособие для студентов физ.- мат. фак. пед. Институтов / Ю. М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

15. Макарычев Ю. Н. Алгебра: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н.Макарычев, Н. Г. Миндюк и др. Под ред. С.А.Теляковского. – М.: Просвещение, 2003. – 272 с.

16. Мерзляк А. Г. Алгебраический тренажер / А. Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – К.: А.С.К., 2007. – 277 с.

17. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.:Мнемозина, 2009. – 158 с.

18. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.:Мнемозина, 2010. – 239 с.

19. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.:Мнемозина, 2010. – 210 с.

20. Мордкович А. Г., Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч. 1:Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2011. – 294 с.

21. Мордкович А. Г., Алгебра. 7 кл.: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2009. – 195 с.

22. Мордкович А. Г., Алгебра. 8 кл.: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2010. – 239 с.

23. Мордкович А. Г., Алгебра. 9 кл.: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

24. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч. 2:Задачник для общеобразоват. Учреждений. – М.: Мнемозина, 2011. – 239 с.

25. Пойя Д. Как решить задачу / Д. Пойя. – М.: Либроком, 2010. – 208 с.

26. Саакян С.М., Гольдман А.М., Денисов Д.В. Задачи по алгебре и началам анализа (пособие для учащихся 10-11 классов общеобразов. учреждений) / С. М. Саакян, А. М. Гольдман, Д.В. Денисов. – М.: Просвещение, 2003. – 284 с.

27. Саранцев Г. И. Методика преподавания математике в школе / Г. И. Саранцев – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

28. Темербекова А.А. Методика преподавания математике / А. А. Темербекова. – М.: ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

29. Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. / Е.Н. Турецкий Д. М. Фридман. – М.: Просвещение, 1989. – 181 с.

30. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л. М. Фридман. – М.: Просвещение, 2003. – 160 с.

31. Цукарь А.Я. Схематизация и моделирование при решении текстовых задач / А.Я. Цукарь // Математика в школе, 1998. – №5

32. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы – М.:Наука, 1989. – 574 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

**Применение производной к исследованию функции.**

Цели занятия:

Обучающие:

– обеспечить усвоение основных понятий ранее изученных тем;

– научить применять таблицу производных при исследовании функций и построении графиков;

– организовать деятельность учащихся по самостоятельному применению знаний в разнообразных ситуациях.

Развивающие:

– развитие познавательного интереса к дисциплине;

– развитие внимания, логического мышления.

Воспитывающие:

– формирование навыков по применению знаний, полученных на занятии в жизни;

– воспитание мотивов учения, положительного отношения к знаниям.

План занятия:

1. Актуализация знаний

2. Изучение теоретического материала.

3. Закрепление материала.

В ходе изучения теоретического материала были рассмотрены вопросы:

1) Определение возрастающей (убывающей) функции.

2) Теорема о возрастании (убывании) функции.

3) Точка минимума (максимума) функции.

4) Стационарные и критические точки производной.

5) Достаточные условия экстремума функции.

6) Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

Упражнения:

Задание 1. Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$.

Задание 2. Найдите промежутки монотонности функции

$$y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+1.$$

Задание 3. Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$.

Задание 4. Найти экстремумы функции $y=-2x^3-3x^2+12x-4$.

Задание 5. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

а) $y=x^3+3x^2$; б) $y=\frac{1}{3}x^3-4x$.

Задание 6. Дан закон прямолинейного движения точки

$s=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1$ (t - в секундах, s - в метрах). Найдите максимальную скорость движения этой точки.

**Нахождение набольшего и наименьшего значений функции (без применения производной).**

Цели занятия:

Обучающие:

— сформировать умение решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции без применения производной

— продолжить работу по формированию умения проводить исследования непрерывной функции на монотонность и экстремумы.

Развивающие:

— содействовать развитию у школьников умений использовать научные методы познания (наблюдение, анализ, синтез, сравнения);

— создать условия для развития у школьников умений решать задачи, поставленные на уроке.

Воспитывающие:

— обеспечить развитие у школьников умения ставить цель и планировать свою деятельность

В ходе изучения теоретического материала были рассмотрены вопросы:

1) Монотонность (логарифмической, показательной, иррациональной) функции.

2) Свойства параболы, координаты вершины параболы

3) Примеры нахождения наибольшего и наименьшего значений логарифмической, показательной, иррациональной функции.

План занятия:

1. Актуализация знаний

2. Изучение теоретического материала.

3. Закрепление

Упражнения:

Задание 1: Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 20x + 104}$.

Задание 2: Найдите наименьшее значение функции $y = 5^{x^2 - 24x + 148}$

Задание 3: Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 185}$

Задание 4: $\log_3(x^2 + 24x + 147) + 2$

Задание 5: Найдите точку максимума функции

$y = \log_7(-2 - 12x - x^2) + 10$

Задание 6: Найдите наименьшее значение функции

$y = \log_9(x^2 - 10x + 754) + 3$

**Решение практических задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.**

Цели занятия:

Образовательные:

— Рассмотреть применение метода поиска наибольших и наименьших значений функции к решению разнообразных прикладных задач;

Развивающие:

— развивать гибкость мышления, творческое отношение к изучаемому предмету;

— Развивать независимость математического мышления в ходе задач;

Воспитывающие:

— Привлечь внимание учащихся к необходимости самостоятельных действий при решении определенных практических проблем;

План занятия:

1. Актуализация опорных знаний

2. Изучение теоретического материала

3. Закрепление материала

В ходе изучения теоретического материала были рассмотрены вопросы:

1) Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

2) Этапы математического моделирования, применяемые при решении прикладных задач.

Упражнения:

Задание 1. Периметр прямоугольника равен 60 см. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы площадь была наибольшей?

Задание 2. Забором, длина которого 120 м, надо огородить огород наибольшей площади (рис 1.). Найдите размеры огорода.

Рис. 1

Задание 3. Из куска железа в форме прямоугольного треугольника с катетами *2 м* и *4 м* необходимо вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетами треугольника.

Задание 3. Необходимо изготовить открытый резервуар цилиндрической формы, объем которого равен $64\pi$ дм$^3$. При каких размерах резервуара (радиусу основания и высоте) на его изготовление тратится наименьшее количество металла?

Задание 4. Найдите, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Задание 5. Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5×8 (дм). В четырех его углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?

Задание 6. Каковы должны быть размеры открытого сверху цилиндрического сосуда вместимостью V, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?