В. Б. Васильев, Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе, *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2016, том 16, выпуск 3, 3–14

DOI: https://doi.org/10.17377/PAM.2016.16.301

УДК 517.95+517.983
DOI 10.17377/PAM.2016.16.301

В. Б. Васильев

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ СО СЛОЖНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ НА ГРАНИЦЕ

Рассматриваются модельные псевдодифференциальные уравнения в канонических многомерных областях. Особенности могут представлять собой объединения конусов или вырождаться в конусы меньшей размерности. Концепция волновой факторизации, использованная автором ранее, позволяет и в этих ситуациях описать картину разрешимости вышеупомянутых уравнений.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, эллиптический символ, волновая факторизация, сложная особенность, асимптотическое разложение.

Введение

Под псевдодифференциальным уравнением понимается уравнение вида

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in M, \tag{1}$$

где A — псевдодифференциальный оператор, действующий в пространствах функций, определяемых на многообразии M, u — искомая, v — заданная функции.

Если M — гладкое компактное многообразие без края, теория таких уравнений построена давно [1–4]. Под «теорией» здесь понимается описание условий фредгольмовости соответствующего псевдодифференциального оператора A. Как правило, при этом предлагается «рецепт »сведения уравнения (1) к уравнению Фредгольма, т. е. уравнению вида

$$(I + T)f = g,$$

где I — единичный, а T — компактный (вполне непрерывный) оператор в выбранном функциональном пространстве.

Если кратко, то теория строится так. С каждым оператором A связывается некоторая функция $\sigma_A(x, \xi)$ (она называется символом оператора A), определенная на кокасательном расслоении T^*M многообразия M. Строятся алгебра операторов $\mathcal{A}$, которая затем факторизуется по идеалу компактных операторов (поскольку коммутатор двух операторов из этой алгебры компактен), алгебра символов $\mathcal{S}$ и доказывается их изоморфизм. Все это напоминает обычную конкретизацию теоремы Гельфанда – Наймарка. Дальше все просто. Обратимость в алгебре символов — необнуление соответствующей функции (это условие эллиптичности) — оказывается эквивалентной фредгольмовости соответствующего псевдодифференциального оператора.

Этот синтез теории интегральных операторов типа свертки и дифференциальных операторов с частными производными произошел около полувека назад и получил название теории псевдодифференциальных операторов, построенной с привлечением кон-

ISSN 2411-3468. Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 3. С. 3–14

цепции обобщенных функций. Примерно в то же время была построена теория краевых задач для псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с гладким краем, здесь ключевую роль играло понятие факторизации символа псевдодифференциального оператора.

Принципиальным моментом при исследовании разрешимости псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладким краем является нахождение условий обратимости специальных локальных представителей. Они появляются при «замораживании коэффициентов» исходного псевдодифференциального уравнения в специальной канонической области, которая диффеоморфна окрестности особой точки (точки, в которой нарушается гладкость границы). Концепция волновой факторизации, введенная автором в 90-е годы, позволила дать полную картину разрешимости модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения в двумерном случае. Это привело к корректным постановкам краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в областях с угловыми точками.

Как выяснилось, в многомерном случае возможны серьезные продвижения. Трудности были обусловлены отсутствием общего вида распределения, сосредоточенного на поверхности конуса, в то время как в двумерном случае работала теорема об общем виде распределения, сосредоточенного в точке. Автором установлено, что для этой цели можно использовать специальный оператор, который определяется для каждой конкретной особенности и представляет собой псевдодифференциальный оператор и свертку по разным группам переменных. В терминах этого оператора можно в ряде случаев выписывать общее решение и далее предлагать различные виды граничных условий. Кроме того, серьезный интерес представляет исследование случая, когда конус вырождается в конус меньшей размерности (некоторые параметры конуса обнуляются), — это и есть «тонкая» особенность. Изучение последних ситуаций должно привести к теории краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, когда граница состоит из негладких многообразий различной размерности.

1. Простые и сложные особенности

Определение 1. Пусть

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m),\, x' = (x_1, \cdots, x_{m-1}),\, x_m > a|x'|,\, a > 0\}$$

является конусом в m-мерном пространстве. Канонической стратифицированной особенностью[1] в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ называется прямое произведение конусов $C_+^a \times C_+^b$, где $C_+^a \subset \mathbb{R}^n, C_+^b \subset \mathbb{R}^m$.

1.1. *Простые особенности*

Пример 1. Квадрант на плоскости $\mathbb{R}^2$ — это прямое произведение двух полуосей.

[1] Такая особенность должна быть отнесена к простой, поскольку с ней можно работать как с одним конусом, но по разным группам переменных. Вообще, конус C_+^a — это эталон.

Пример 2. Октант в пространстве $\mathbb{R}^3$ (это конус типа трехгранного угла) можно представить в виде прямого произведения квадранта (двумерный конус) на полупрямую (одномерный конус).

Пример 3. Конус $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > a(x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ a > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ не стратифицируется. Более того, в многомерных пространствах прямое произведение конусов не визуализируется.

Пример 4. Ребро коразмерности k в m-мерном пространстве

$$\{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x''),\ x'' \in \mathbb{R}^{m-k},\ x' = (x_1, \cdots, x_{m-k-1}),$$
$$x_{m-k-1} > a|x'''|,\ x''' = (x_1, \cdots, x_{m-k-2}),\ a > 0\}.$$

Пример 5. Вариант многогранного угла $P_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_m > \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_k |x_k|, a_k > 0\}$.

1.2. *Сложные особенности*

Пример 6. Вариант «тонкого»конуса

$$T_{m-k} = \{x \in \mathbb{R}^m : x_m > a|x''|,\ x'' = (x_1, \cdots, x_{m-k}),\ x_{m-k+1} = \cdots = x_{m-1} = 0\}.$$

Пример 7. «Букет» m-мерных конусов с общей вершиной в начале координат.

Пример 8. «Букет», составленный из конусов различной размерности.

Основной тезис автора следующий. Каждой канонической особенности соответствует своя обобщенная функция — преобразование Фурье характеристической функции конуса, и свертка с этой обобщенной функцией описывает фурье-образ оператора сужения на каноническую особенность.

2. Многообразия с негладким краем

Многообразие M размерностью m с негладким краем — это компактное топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, диффеоморфной какому-то каноническому множеству из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Если $x \in M$ — внутренняя точка многообразия, то каноническое множество — это все пространство $\mathbb{R}^m$. Если $x \in \partial M$ — точка гладкости границы, то каноническим множеством является полупространство $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \cdots, x_m),\ x_m > 0\}$. На границе ∂M могут быть выделены гладкие подмногообразия M_k — страты размерностью k, $0 \le k < (m-1)$, каждая точка которых обладает окрестностью, диффеоморфной ребру коразмерностью k (пример 4). Подмногообразия типа M_0 — это совокупность изолированных особенностей границы, окрестности которых диффеоморфны одному из канонических конусов (примеры 1–5). Это простые особенности границы ∂M. Сложная особенность появится, когда в качестве эталона будут выбраны примеры 6 – 8.

3. Локальные представители и их обратимость

Итак, рассматривается общее эллиптическое псевдодифференциальное уравнение (1) в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(M)$, где M — m-мерное гладкое компактное многообразие с негладкой границей; иными словами, его граница может иметь особенности типа конуса, ребра коразмерностью k, $1 \leq k \leq m$, и т. д., неизвестная функция u и правая часть v заданы на M.

Здесь будут приведены локальные конструкции пространств, поскольку это переносится на многообразия с помощью разбиения единицы.

По определению, пространство $H^s(C^a_+)$ состоит из обобщенных функций из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{C^a_+}$. Норма в пространстве $H^s(C^a_+)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$. Правая часть f выбирается из пространства $H_0^{s-\alpha}(C^a_+)$, которое состоит из обобщенных функций из $S'(C^a_+)$, допускающих продолжение на все пространство $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$. Норма в пространстве $H_0^{s-\alpha}(C^a_+)$ определяется формулой

$$||f||^+_{s-\alpha} = \inf ||lf||_{s-\alpha},$$

где инфимум берется по всем продолжениям l.

Далее, определяется специальный многомерный сингулярный интеграл следующей формулой:

$$(G_m u)(x) = \lim_{\tau \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{u(y', y_m)\, dy' dy_m}{(|x'-y'|^2 - a^2(x_m - y_m + i\tau)^2)^{m/2}}$$

(опущены некоторые константы, см. [16]). Здесь уместно напомнить, что этот оператор является многомерным аналогом интеграла типа Коши, а точнее, преобразования Гильберта.

Если $A(x,\xi), (x,\xi) \in T^*M$, — символ псевдодифференциального оператора A (определенный на кокасательном расслоении многообразия M, то для описания условий фредгольмовости оператора A следует описать условия обратимости всех его локальных представителей. Это утверждение известно как *локальный принцип* или *принцип замораживания коэффициентов*.

Если M — гладкое компактное многообразие (без края), локальный представитель оператора в точке — это просто оператор умножения на символ. Условия обратимости (необходимые и достаточные) такого оператора формулируются очень просто: символ не должен принимать нулевых значений (обычно при этом предполагается некоторая гладкость символа). Такие символы называют *эллиптическими*.

Для многообразия с гладкой границей нужно новое локальное определение псевдодифференциального оператора в точке гладкости границы ∂M. Если для внутренней точки $x \in M$ использовалось локальное определение

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x,\xi) u(y) e^{i(x-y)\cdot\xi} d\xi dy,$$

то для $x \in \partial M$ локальная структура оператора A определяется формулой

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x,\xi) u(y) e^{i(x-y)\cdot\xi} d\xi dy.$$

Для исследования обратимости такого оператора с символом $A(\cdot, \xi)$, не зависящим от пространственной переменной x, можно применять теорию классической краевой задачи Римана для верхней и нижней полуплоскостей [6–8] с параметром $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$. Этот этап детально описан в монографии [5]. Однако, если граница ∂M имеет хотя бы одну коническую точку, этот подход неприменим.

Коническая точка на границе — это такая точка, окрестность которой диффеоморфна конусу $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : \ x_m > a|x'|, \ x' = (x_1, \dots, x_{m-1}), \ a > 0\}$, и, следовательно, локальное определение псевдодифференциального оператора в окрестности конической точки опять требует корректировки; локальный оператор имеет вид

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{C_+^a} \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x, \xi) u(y) e^{i(x-y)\cdot\xi} \, d\xi dy. \tag{2}$$

Для исследования обратимости оператора (2) автор предложил концепцию волновой факторизации эллиптического символа в граничной особой точке (точке, в которой нарушается гладкость границы) [16; 17] и, используя это свойство, описал условия фредгольмовости для уравнения (1).

Существует много других подходов к теории краевых задач на негладких многообразиях (работы V. G. Mazya, Б. А. Пламеневского, B.-W. Schulze, R. B. Melrose, M. Taylor, V. Nistor и многих других, см., например, [13–15]).

4. Волновая факторизация

Определение 2. Символ $A(\xi)$ называется эллиптическим, если $\exists c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 \le |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \le c_2.$$

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется порядком оператора A.

Обозначим $\overset{*}{C}{}_+^a = \{\xi \in \mathbb{R}^m : a\xi_m > |\xi'|\}$, $\overset{*}{C}{}_-^a = -\overset{*}{C}{}_+^a$. Под радиальной трубчатой областью $T(\overset{*}{C}{}_+^a)$ над конусом $\overset{*}{C}{}_+^a$ понимается подмножество многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ вида $\mathbb{R}^m + i\overset{*}{C}{}_+^a$ [11; 12; 19].

Определение 3. Волновой факторизацией эллиптического символа $A(\xi)$ называется его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ определены для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^m$, кроме. возможно, точек $\{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi'|^2 = a^2\xi_m^2\}$;

2) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C}{}_+^a), T(\overset{*}{C}{}_-^a)$ соответственно, для которых справедливы оценки

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \le c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm æ},$$
$$|A_{=}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \le c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - æ)}, \ \forall \tau \in \overset{*}{C}{}_+^a .$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом волновой факторизации.

Класс символов, допускающих волновую факторизацию, достаточно богат. Отдельная глава книги [17] и статья [18] целиком посвящены этому вопросу, там приведено достаточно много примеров. Различные классы функций, аналитических в радиальных трубчатых областях над конусами, описаны в работах [11; 12; 19].

5. Многомерная задача Римана

Многомерных обобщений классической краевой задачи Римана существует несколько, два из них содержатся в [9; 10]. Еще один вариант предложен в работах автора [16–18] для описания условий нетеровости многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях, содержащих, например, конические точки, в терминах волновой факторизации символа эллиптического оператора. Он оказался очень удобен для исследования разрешимости псевдодифференциальных уравнений и краевых задач в областях с негладкой границей [20–26].

Упомянутый вариант (в простейшем виде) многомерной задачи Римана формулируется следующим образом.

Пусть C^m — выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, $A(\mathbb{R}^m)$ — подпространство из $L_2(\mathbb{R}^m)$ (интегрируемых с квадратом по Лебегу функций $u(x)$), допускающих аналитическое продолжение в радиальную трубчатую область $T(\overset{*}{C^m})$ над сопряженным конусом [11; 12]

$$\overset{*}{C^m} = \{x \in \mathbb{R}^m : (x, y) > 0, \quad \forall y \in C^m\},$$

и удовлетворяющих условию

$$\sup_{y \in \overset{*}{C^m}} \int_{\mathbb{R}^m} |u(x + iy)|^2 \, dx \leq \text{const},$$

пространство $B(\mathbb{R}^m)$ — прямое дополнение $A(\mathbb{R}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^m)$, $L_2(\mathbb{R}^m) = A(\mathbb{R}^m) \oplus B(\mathbb{R}^m)$.

Требуется найти пару функций $\Phi^+(x) \in A(\mathbb{R}^m)$, $\Phi^-(x) \in B(\mathbb{R}^m)$, которые почти всюду на $\mathbb{R}^m$ удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^+(x) = W(x)\Phi^-(x) + w(x). \tag{3}$$

Задача (3) возникает при локализации многомерного сингулярного интегрального (псевдодифференциального) уравнения в конической точке границы и решается с помощью интеграла Бохнера [11; 19].

Читатель легко обнаружит различия в постановке многомерной задачи Римана этой работы и работы В. С. Владимирова [10]: в постановке автора нет «вакуума», присутствующего в [10].

6. Структура решения и условия разрешимости

Обозначим $C = \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j$, где C_j — острые выпуклые конусы с общей вершиной в начале координат, $C_j \bigcap C_k = \varnothing$, $k \neq j$, и рассмотрим уравнение (1) в случае $M = C$.

Для каждого конуса $C_j, j = 1, \ldots, n$, определим далее специальный многомерный сингулярный интеграл с помощью ядра Бохнера [11; 19] формулой

$$(B_j u)(x) = \lim_{\tau \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} B_j(x' - y', x_m - y_m + i\tau) u(y', y_m)\, dy' dy_m.$$

Этот сингулярный интеграл возникает как преобразование Фурье произведения характеристической функции конуса и некоторой суммируемой функции и тесно связан с многомерной задачей Римана в ее простейшем варианте. Он представляет собой одно из возможных многомерных обобщений интеграла типа Коши и соответственно преобразования Гильберта.

Символом $\widetilde{H}$ будем обозначать фурье-образ пространства H.

Приведем здесь основной результат для уравнения (1), опуская детали (их можно найти в [23–26] для случая одного выпуклого конуса). Общее решение может быть сконструировано следующим образом. Обозначим $Q_n(\xi)$ многочлен в степени n, удовлетворяющий условию

$$|Q_n(\xi)| \sim (1 + |\xi|)^n,$$

обозначим $(m-1)$-мерное преобразование Фурье ($y' \to \xi'$ в смысле распределений) функции $e^{-ia|y'|\xi_m}$ посредством $E_a(\xi', \xi_m)$ и определим оператор

$$(V_a \widetilde{u})(\xi') = (E_a * \tilde{u})(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} E_a(\xi' - \eta', \xi_m) \widetilde{u}(\eta', \xi_m)\, d\eta'.$$

Обозначим $\mathcal{T}_k$ вращение пространства $\mathbb{R}^m$, переводящее конус C_k в конус $C_+^{a_k}$. Составим n вспомогательных многомерных задач Римана типа (3), предполагая, что $W(\xi) \neq 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^m$:

$$\widetilde{U}_k(\xi) = W(\xi)\widetilde{V}_k(\xi) + \widetilde{w}_k(\xi),\ k = 1, \ldots, n, \quad W(\xi) = -\frac{1}{n}\left(A(\xi) - \frac{n-1}{n}\right)^{-1},$$

с произвольно выбранными правыми частями $\widetilde{w}_k(\xi) \in \widetilde{H}^s(\mathbb{R}^m)$. Предположим, что $W(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_k с индексом æ$_k$, æ$_k - s = n_k + \delta$, $n_k \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$, и обозначим элементы волновой факторизации [17] символа $W(\xi)$ относительно конуса C_k посредством $W_{k,\neq}(\xi), W_{k,=}(\xi)$.

Теорема 1. *Общее решение уравнения* (1) *в образах Фурье выражается формулой*

$$\widetilde{u}_+(\xi) = \sum_{k=1}^{n} W_{k,\neq}^{-1}(\xi) Q_{n_k}(\xi) B_k Q_{n_k}^{-1}(\xi) W_{k,=}^{-1}(\xi) \widetilde{w}_k(\xi) + \\ + \sum_{k=1}^{n} W_{k,\neq}^{-1}(\xi) \mathcal{T}_k^{-1} V_{-a_k} F\Big(\sum_{j=1}^{n_k} c_j(x') \delta^{(j-1)}(x_m)\Big),$$

где $c_j(x') \in H^{s_j}(\mathbb{R}^{m-1})$ *— произвольные функции,* $s_j = s -$ æ$_k + j - 1/2$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$, $k = 1, \ldots, n$, lf *— произвольное продолжение* f *на* $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$.

Доказательство этой теоремы опирается на результаты автора [26] сведением к случаю полупространства путем следующих преобразований.

Обозначим T_a биекцию $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, которая переводит ∂C_+^a в гиперплоскость $x_m = 0$ и выглядит следующим образом: $t_k = x_k$, $k = 1, \ldots, m-1$, $t_m = x_m - a|x'|$.

Лемма 1. *Имеет место тождество*

$$FT_a = V_a F.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связь между преобразованием Фурье и оператором T_a устанавливается прямыми вычислениями:

$$(FT_a u)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\cdot\xi} u(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m - a|x'|)\, dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-iy'\xi'} e^{-i(y_m + a|y'|)\xi_m} u(y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m)\, dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-ia|y'|\xi_m} e^{-iy'\xi'} \hat{u}(y_1, \ldots, y_{m-1}, \xi_m)\, dy',$$

где $\hat{u}$ обозначает преобразование Фурье по последней переменной.

Если псевдодифференциальный оператор определяется формулой

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ix\xi} A(\xi) \tilde{u}(\xi)\, d\xi,$$

а прямое преобразование Фурье — формулой

$$\tilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi} u(x)\, dx,$$

то установлена следующая связь (по крайней мере формально):

$$(FT_a u)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-ia|y'|\xi_m} e^{-iy'\xi'} \hat{u}(y_1, \ldots, y_{m-1}, \xi_m)\, dy.$$

Другими словами, если обозначить $(m-1)$-мерное преобразование Фурье ($y' \to \xi'$ в смысле распределений) функции $e^{-ia|y'|\xi_m}$ символом $E_a(\xi', \xi_m)$, то последняя формула примет вид

$$(FT_a u)(\xi) = (E_a * \tilde{u})(\xi),$$

где знак $*$ обозначает свертку по первым $m-1$ переменным и оператор умножения по последней переменной ξ_m. Таким образом, V_a — это комбинация свертки и мультипликатора с ядром $E_a(\xi', \xi_m)$. □

Таким образом, чтобы описать конструкцию решения уравнения (1), нужно решить соответствующую вспомогательную задачу для каждого конуса C_k, $k = 1, \ldots, n$, отдельно, причем для специального «составного» символа потребуется волновая факторизация относительно каждого конуса C_k с индексом $æ_k$. Отметим, что этот символ $W(\xi)$ по своей структуре напоминает исходный символ $A(\xi)$. Кроме этого, вычисления, проведенные в [21], позволяют надеяться на получение содержательных результатов о разрешимости модельного уравнения (1) для случая сложных особенностей, содержащих «тонкие» конусы меньшей размерности, чем размерность пространства.

7. Асимптотические разложения для малых растворов конусов

Если рассмотреть модельное двумерное уравнение (1) в каноническом конусе $C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\}$, то его решение при наличии волновой факторизации символа $A(\xi)$ можно выписать с помощью следующего сингулярного интегрального оператора [16]:

$$(K_a u)(x) = \frac{a}{2\pi^2} \lim_{\tau\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{u(y)\,dy}{(x_1-y_1)^2 - a^2(x_2-y_2+i\tau)^2}\,.$$

Этот оператор выступает в качестве локального представителя оператора A в окрестности угловой точки многообразия. Он представляет собой свертку, и параметр a — это раствор угла α, $x_2 > a|x_1|, a = \operatorname{ctg}\alpha$.

Обобщенная функция, свертку с которой представляет собой оператор K_a, имеет вид

$$K_a(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{a}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2}.$$

Чтобы иметь представление о том, что произойдет, когда раствор угла станет малым, желательно выяснить, как ведет себя оператор K_a (распределение $K_a(\xi_1,\xi_2)$), $a^{-1} \to 0$.

На функциях φ из класса Шварца $\in S(\mathbb{R}^2)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций эта обобщенная функция определяется формулой

$$(K_a, \varphi) = \frac{a}{2\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2}\,.$$

7.1. *Нулевое приближение*

Когда $a \to +\infty$, ранее было получено следующее [21] предельное распределение:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2} = \frac{i}{2\pi} \mathcal{P}\frac{1}{\xi_1} \otimes \delta\left(\xi_2\right),$$

где обозначение $\mathcal{P}$ заимствовано из книги В. С. Владимирова [12], и $\otimes$ обозначает прямое произведение обобщенных функций. Здесь δ — это δ-функция Дирака, действующая на $\varphi \in S(\mathbb{R})$ по правилу

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0),$$

а обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ определяется формулой

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \Big) \frac{\varphi(x)\,dx}{x}.$$

7.2. *Полное разложение*

Оказалось, что можно получить асимптотическое разложение обобщенной функции $K_a(\xi_1, \xi_2)$ по «степеням»a^{-1}.

Лемма 2. *Если обобщенная функция a действует на основную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R})$ по формуле*

$$(a, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^k \varphi(\xi)\,d\xi,$$

то эта обобщенная функция a имеет следующий вид:

$$a(\xi) = \widetilde{\delta^{(k)}}(\xi),$$

здесь знак $\sim$ обозначает обратное преобразование Фурье F^{-1}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем $F\delta = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1 в смысле распределений, так что $F^{-1}\mathbf{1} = \delta$. Поскольку

$$(F(\varphi^{(k)}))(\xi) = (-1)^k \xi^k \tilde{\varphi}(\xi),$$

то, обозначая $\psi = F^{-1}\varphi$, можно записать

$$(a, \varphi) = (a, F\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^k \widetilde{\psi}(\xi) d\xi = (\mathbf{1}, \xi^k \widetilde{\psi}(\xi)) = (\mathbf{1}, FF^{-1}(\xi_k \widetilde{\psi}(\xi))) =$$
$$= (F\mathbf{1}, F^{-1}(\xi_k \widetilde{\psi}(\xi))) = (F\mathbf{1}, (-1)^k \psi^{(k)}(x)) = (\delta, (-1)^k \psi^{(k)}(x)) =$$
$$= (\delta^{(k)}, \psi) = (\delta^{(k)}, F^{-1}\varphi) = (F^{-1}\delta^{(k)}, \varphi),$$

так что мы получаем требуемое равенство. □

С помощью этой леммы и разложения основной функции в ряд Маклорена можно описать асимптотическое поведение обобщенной функции $K_a(\xi_1, \xi_2)$.

Теорема 2. *Справедлива следующая формула в смысле распределений:*

$$K_a(\xi_1, \xi_2) = \frac{i}{2\pi} \mathcal{P} \frac{1}{\xi_1} \otimes \delta(\xi_2) + \sum_{m,n} c_{m,n}(a) \widetilde{\delta^{(m)}}(\xi_1) \otimes \delta^{(n)}(\xi_2),$$

где $c_{m,n}(a) \to 0, a \to +\infty$.

Заключение

По мнению автора, сложная особенность появляется тогда, когда в качестве эталона не может выступать стандартный m-мерный выпуклый конус; либо он вырождается в «тонкую» особеннось, либо появляются «букеты» конусов, либо что-то еще. Работа со сложными особенностями находится в начальной стадии, и автор надеется, что с помощью развитых методов удастся продвинуться и в этом направлении. Разновидностей возможных сложных особенностей может быть достаточно много, однако с ними целесообразно работать с единой точки зрения.

Список литературы

1. *Mikhlin S. G., Prößdorf S.* Singular Integral Operators. Berlin: Arademie-Verlag, 1986.

2. *Treves F.* Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. N.Y.; L.: Plenum Press, 1982. Vol. 1, 2.

3. *Taylor M.* Pseudodifferential Operators. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.

4. *Hörmander L.* Analysis of Partial Differential Operators. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. Vol. 1–4.

5. *Eskin G.* Elliptic Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations. Providence: AMS, 1981.

6. *Gakhov F. D.* Boundary Value Problems. N.Y.: Dover Publications, 1981.

7. *Muskhelishvili N. I.* Singular Integral Equations. Amsterdam: North Holland, 1976.

8. *Gokhberg I., Krupnik N.* Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Integral Equations. Basel: Birkhäuser, 2010.

9. *Какичев В. А.* Краевые задачи линейного сопряжения для функций голоморфных в бицилиндрических областях // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1967. Вып. 5. С. 37–58.

10. *Владимиров В. С.* Задачи линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 807–834.

11. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

12. *Vladimiriv V. S.* Methods of the Theory of Generalized Functions. L.: Taylor & Francis, 2002.

13. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38, вып. 2 (230). С. 3–76.

14. *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.

15. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic Boundary Value Problems with Point Singularies. AMS, Mathematical Surveys and Monographs. 1997. Vol. 52.

16. *Vasil'ev V. B.* Regularization of Multidimensional Singular Integral Equations in Non-smooth domains // Trans. Moscow Math. Soc. 1998. Vol. 59. P. 65–93.

17. *Vasil'ev V. B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-smooth Domains. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Academic Publishers, 2000.

18. *Vasil'ev V. B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols // Math. Notes. 2000. Vol. 68. No. 5–6. P. 556–568.

19. *Bochner S., Martin W. T.* Several Complex Variables. Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

20. *Vasil'ev V. B.* Elliptic Equations and Boundary Value Problems in Non-smooth Domains // Pseudo Differential Operators: Analysis, Applications and Computations. Operator Theory: Advances and Applications. Basel: Birkhäuser, 2011. Vol. 213. P. 105–121.

21. *Vasil'ev V. B.* Asymptotical Analysis of singularities for Pseudo Differential Equations in Canonical Non-smooth Domains // Integral Methods in Science and Engineering. Computational and Analytic Aspects. Boston: Birkhäuser, 2011. P. 379–390.

22. *Vasil'ev V. B.* Pseudo Differential Equations on Manifolds with Non-smooth Boundaries // Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. & Stat. N.Y.: Springer, 2013. Vol. 47. P. 625–637.

23. *Vasil'ev V. B.* On the Dirichlet and Neumann Problems in Multi-dimensional Cone // Mathematica Bohemica. 2014. Vol. 139. No. 2. P. 333–340.

24. *Vasil'ev V. B.* On Certain Elliptic Problems for Pseudo Differential Equations in a Polyhedral Cone // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2014. Vol. 9. No. 2. P. 227–237.

25. *Vasil'ev V. B.* New Constructions in the Theory of Elliptic Boundary Value Problems // Integral Methods in Science and Engineering. Theoretical and Computational Advances. Basel: Birkhäuser, 2015. P. 629–641.

26. *Vasil'ev V. B.* Pseudo Differential Equations in Cones with Conjugation Points on the Boundary // Differential Equations. 2015. Vol. 51. No. 9. P. 1113–1125.

Материал поступил в редколлегию 27.12.2015

Адрес автора

ВАСИЛЬЕВ Владимир Борисович

Липецкий государственный технический университет

ул. Московская, 30, Липецк, 398600, Россия

vbv57@inbox.ru