

УДК 519.6, 537.84

## МЕТОД РАСЧЕТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

© 2012 г. Э.Б. Кулумбаев, Т.Б. Никуличева

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
г.Белгород; kulumbaev@bsu.edu.ru, nikulicheva@bsu.edu.ru

Предложен метод расчета собственного магнитного поля в магнитогидродинамических моделях электрической дуги, основанный на решении уравнения для индукции магнитного поля. При апробации в двумерном случае показана более высокая вычислительная эффективность метода по сравнению с другими известными методами расчета индукции магнитного поля по закону Био – Савара и через векторный потенциал. Метод допускает обобщение на трехмерный случай, более эффективное, чем метод векторного потенциала.

Ключевые слова: математическое моделирование, электрическая дуга, МГД модель, магнитное поле.

### METHOD OF CALCULATION OF THE MAGNETIC FIELD IN MAGNETOHYDRODYNAMIC MODELS OF THE ELECTRIC ARC

*E.B. Kulumbaev, T.B. Nikulicheva*

Belgorod State National Research University, Belgorod city

The computing method of self-induced magnetic field in magnetohydrodynamic models of the electric arc, based on the equation for an induction of a magnetic field is proposed. At testing in a two-dimensional case higher computing efficiency of a method in comparison with other known computing methods of an induction under the law of Biot–Savart and through vector potential is shown. The method permits generalization on a three-dimensional case which is more effective than the method of vector potential.

Key words: mathematical modelling, electric arc, MHD model, magnetic field.

#### 1. Введение

При математическом описании электродуговых потоков плазмы широко используются магнитогидродинамические (МГД) модели [1–3], основанные на представлениях механики, термодинамики и электродинамики сплошной среды, формализованных в виде самосогласованной системы уравнений движения (модель течения), плазменного состояния (модель плазмы) и Максвелла (электродинамическая модель). Независимо от принятых приближений при формулировке этих моделей для сильноточных электрических дуг атмосферного давления существенным является взаимодействие электрического тока с порождаемым им же (собственным) магнитным полем, лежащее в основе механизма ускорения и нагрева газа электрической дугой [4]. Поэтому корректная формули-

ровка и эффективная реализация электродинамической модели актуальна при математическом моделировании таких электрических дуг.

Математическому моделированию процессов, протекающих в различных МГД системах, посвящено большое число работ. Значительные успехи достигнуты, например, в развитии моделирования электродинамических ускорителей проводящих тел [5]. В отличие от “истинного” МГД объекта, требующего квазистационарного описания электромагнитного поля, для стационарной электрической дуги приемлемым является более простое приближение потенциального электрического поля [1–3]. В этом случае взаимосвязь электрического и магнитного полей опосредована (ввиду отсутствия “порождения” одного поля другим) и обусловлена только самосогласованным характером протекающих при горении дуги процессов массо- тепло- и токопереноса. Анализ работ, посвященных моделированию стационарных электрических дуг в таком приближении (см., например, недавно опубликованные работы [6–7]) показывает, что в двух- и трехмерной постановках электрическое поле определяется методом скалярного потенциала, а магнитное поле рассчитывается через векторный потенциал. В [7] сравнением методов вычисления магнитного поля, создаваемого двумерным осесимметричным распределением электрического тока, показано, что наиболее точная и эффективная методика расчета такого магнитного поля состоит в решении уравнения для векторного потенциала с граничными условиями, рассчитанными по закону Био – Савара, вместо часто используемых (например, в [6]), но мало обоснованных, однородных условий (для векторного потенциала или его производной по нормали) на границах расчетной области. Следует отметить, что указанные работы не содержат сведений о соответствии полученных численных решений для векторного потенциала кулоновской калибровке, хотя возможность потери свойства бездивергентности векторного поля при его численном определении показана в значительно более ранних работах по МГД моделированию (см., например, [8]).

Цель данной работы – предложить и апробировать в двумерном случае метод непосредственного расчета индукции собственного магнитного поля (без введения векторного потенциала) в плоскопараллельных МГД моделях электрической дуги.

## 2. Электродинамическая модель электрической дуги

Ограничимся классом задач, в которых электрическая дуга рассматривается как стационарный процесс протекания заданной величины электрического тока в газе с нелинейными (зависящими от температуры) теплофизическими и переносными свойствами в некоторой ограниченной области пространства. Для этого на двух частях границ области задаются условия втекания и вытекания заданной величины электрического тока, а влиянием внешней электрической цепи на электрическую дугу пренебрегается в силу безындукционности электромагнитных процессов в стационарном случае, расположения и удаленности замыкающих токовый контур участков. Магнитное и тепловое действия протекающего тока, а также возможный внешний к рассматриваемой области пространства подвод или отвод газа, инициируют совместное протекание процессов массо-, тепло- и токопереноса, установившаяся самосогласованная картина которых подлежит определению на основе МГД модели.

Назначение электродинамической модели электрической дуги состоит в определении пространственных распределений стационарного электрического тока, характери-

зуемого вектором плотности электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , и порождаемого им же магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Эти величины определяют “источниковые” члены в МГД уравнениях:  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  – объемную плотность амперовой силы в уравнении движения и  $j^2 / \sigma$  – мощность джоулева тепловыделения в уравнении баланса энергии, где  $\sigma$  – электропроводность плазмы.

В основе электродинамической модели стационарной электрической дуги лежат уравнения Максвелла, формально распадающиеся в стационарном случае на две пары уравнений:

потенциальности и Кулона для электрического поля:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e / \varepsilon_0 \quad (1)$$

и Ампера и соленоидальности для магнитного поля:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля;  $\rho_e$  – плотность заряда;  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Для электрической дуги эти пары не независимы и связаны уравнением состояния – законом Ома, который в простейшем случае записывается в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3)$$

Формальным дифференциальным следствием уравнения Ампера является уравнение непрерывности электрического тока:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4)$$

**2.1. Электрическая модель.** Наиболее эффективный способ описания трехмерной электрической структуры дуги основан на введении скалярного потенциала  $\varphi$ . Из условия потенциальности стационарного электрического поля (1) следует, что напряженность электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Это представление поля и закон Ома (3) после подстановки в уравнение непрерывности (4) дают уравнение для скалярного потенциала в виде

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \varphi = 0. \quad (5)$$

Эффективность метода скалярного потенциала состоит в понижении размерности рассчитываемого поля: вместо векторного поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  рассчитывается скалярное поле  $\varphi(\mathbf{r})$ . В этом смысле более эффективным, правда только в двумерном случае, является метод функции электрического тока (см., например, [2] для осесимметричной дуги), не упомянутый в [7]. Введением функции электрического тока, однозначно связанной с индукцией магнитного поля, уравнение непрерывности (4) удовлетворяется тождественно, а уравнение для функции электрического тока следует из условия потенциальности электрического поля.

Отметим, что оставшееся уравнение Кулона (1) определяет объемную плотность  $\rho_e = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$  заряда, распределение которого и обеспечивает поле  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  при заданной электропроводности  $\sigma(\mathbf{r})$ .

**2.2. Электромагнитная модель.** Электромагнитная модель определяет индукцию магнитного поля по поставляемому электрической моделью распределению тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , занимающему ограниченную область пространства. Поэтому наиболее логичным является способ расчета  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  на основе интегральной формы решения системы уравнений (2) в виде закона Био – Савара:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор объемного элемента тока  $\mathbf{j}dV'$ .

Однако этот способ расчета магнитного поля требует больших затрат машинного времени – более 90% от общего времени вычислений по данным [7]. Альтернативный метод расчета  $\mathbf{B}$  состоит в сведении рассматриваемой проблемы к дифференциальной задаче для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ . Из условия соленоидальности магнитного поля следует представление  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , а из уравнения Максвелла – Ампера с учетом кулоновской калибровки  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  – уравнение для векторного потенциала в виде:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (7)$$

Дифференцирование по пространственным координатам решения этого уравнения с соответствующими граничными условиями позволяет найти  $\mathbf{B}$ .

В отличие от метода скалярного потенциала введение векторного потенциала не понижает размерности рассчитываемого поля. Поэтому его введение имеет смысл только способа “переформулировки” рассматриваемой проблемы расчета  $\mathbf{B}$ , позволяющей отказаться от использования интегрального представления (6) и перейти к более “удобной и экономичной” дифференциальной задаче (7). Однако подобная “переформулировка” может быть достигнута и непосредственно для искомого поля  $\mathbf{B}$  без введения векторного потенциала. Для этого следует взять ротор уравнения Максвелла–Ампера, тождественные преобразования которого с учетом соленоидальности приводят к уравнению для индукции магнитного поля:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j}, \quad (8)$$

которое и предлагается использовать для расчета  $\mathbf{B}$ .

Для обеспечения бездивергентности магнитного поля (8) можно воспользоваться, например, методом [8], применение которого сводится к коррекции численного решения  $\mathbf{B}'$  (уравнения (8) в нашем случае) по формуле  $\mathbf{B} = \mathbf{B}' - \nabla \chi$ , где  $\chi$  удовлетворяет уравнению Пуассона  $\nabla^2 \chi = \nabla \cdot \mathbf{B}'$ .

### 3. Описание метода

Рассмотрим предлагаемый метод расчета индукции магнитного поля в двумерной

плоскопараллельной МГД модели стационарной электрической дуги, основанной на уравнениях непрерывности, Навье – Стокса (модель течения), баланса энергии в равновесной плазме (модель плазмы), (5) для скалярного потенциала (электрическая модель) и (8) для индукции магнитного поля (электромагнитная модель). Структура МГД уравнений позволяет представить их в обобщенном виде относительно скалярной функции  $\Phi = \{1, v_1, v_2, h, \varphi, B_3\}$ :

$$\nabla \cdot (\rho_\Phi \mathbf{v}\Phi) = \nabla \cdot (\Gamma_\Phi \nabla \Phi) + S_\Phi, \quad (9)$$

Вид нелинейных коэффициентов  $\rho_\Phi$ ,  $\Gamma_\Phi$ ,  $S_\Phi$  устанавливается из соответствия (9) МГД уравнениям и приведен в табл. 1.

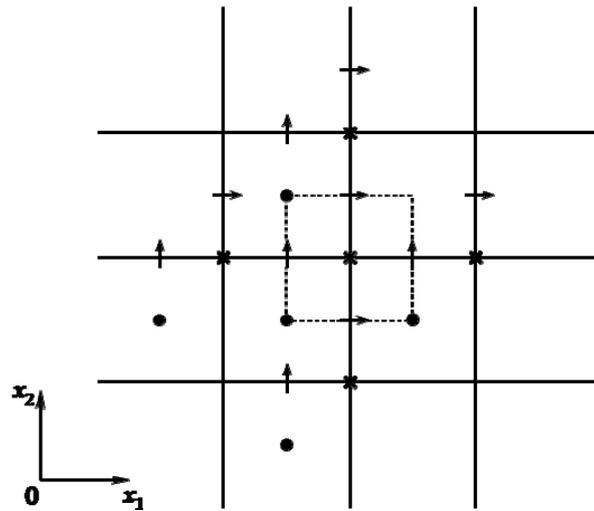
**Таблица 1.** Коэффициенты МГД уравнений.

$\Phi$	$\rho_\Phi$	$\Gamma_\Phi$	$S_\Phi$
1	$\rho$	0	0
$v_1$	$\rho$	$\eta$	$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( p + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \eta \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + j_2 B_3$
$v_2$	$\rho$	$\eta$	$-\frac{\partial}{\partial x_2} \left( p + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \eta \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - j_1 B_3 + (\rho_0 - \rho)g$
$h$	$\rho$	$\lambda / C_p$	$(j_1^2 + j_2^2) / \sigma - \psi$
$\varphi$	0	$\sigma$	0
$B_3$	0	1	$\mu_0 (\nabla \times \mathbf{j})_3$

Здесь  $\mathbf{v}(v_1, v_2, 0)$  – скорость;  $p$  – давление;  $h(T)$  – энтальпия;  $T$  – температура;  $\mathbf{j}(j_1, j_2, 0)$  – плотность электрического тока;  $\mathbf{B}(0, 0, B_3)$  – индукция магнитного поля;  $\mathbf{g}(0, -g, 0)$  – ускорение свободного падения;  $\rho, \lambda, \eta, \psi, C_p$  – плотность, теплопроводность, вязкость, излучательная способность и удельная теплоемкость плазмы при постоянном давлении соответственно;  $\rho_0$  – плотность холодного газа;  $x_1, x_2, x_3$  – декартовы координаты.

Отметим, что в рассматриваемом случае двумерного распределения тока предлагаемый способ расчета  $\mathbf{B}$  обладает достоинством метода функции электрического тока, состоящем в понижении размерности искомого поля – вычислении одного скалярного поля  $B_3$  вместо двух полей  $A_1$  и  $A_2$  – компонент векторного потенциала, и автоматически удовлетворяет условию соленоидальности (2) магнитного поля.

Обобщенное уравнение (9) дискретизируется методом контрольного объема на обеспечивающих второй порядок точности аппроксимации пятиточечных шаблонах (рис. 1) по методике, подробно описанной в [9].



**Рис.1.** Пятиточечные шаблоны узлов для основных зависимых переменных  $p, h, \varphi$  (•);  $v_1$  (→);  $v_2$  (↑);  $B_3$  (×) на сетке двумерных контрольных объемов (сплошные линии). Пунктирная линия – граница контрольного объема для  $B_3$ .

Прямоугольная равномерная сетка основных контрольных объемов (ОКО) “покрывает” всю расчетную область. В центрах ОКО выбираются узловые точки для зависимых переменных  $p, h, \varphi$ . Для компонент скорости  $v_1$  и  $v_2$  используются смещенные контрольные объемы так, что узлы (→) и (↑) для них лежат на гранях ОКО. Как и в [9], на гранях ОКО для плотностей “конвективно-диффузионных” потоков зависимых переменных используется экспоненциальная аппроксимация с сеточным числом Пекле, а коэффициенты переноса вычисляются как гармонически средние их значений в соседних узлах (•) [9]. Поле давления рассчитывается методом коррекции SIMPLER [9]. Поскольку  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  и  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ , то компоненты напряженности электрического поля и плотности электрического тока естественно вычислять в тех же узлах (→) и (↑), что и соответствующие компоненты скорости. Это обстоятельство и структура “источникового” члена  $S_{B_3} \sim (\nabla \times \mathbf{j})_3$  (табл.1) однозначно определяют выбор контрольных объемов (один из них изображен пунктиром на рис.1) и соответствующих им узловых точек (×) в вершинах ОКО для  $B_3$ . Тогда проинтегрированный “источниковый” член  $S_{B_3}$  по контрольному объему в соответствии с теоремой Стокса сводится к легко вычисляемой циркуляции  $\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}$  по границе контрольного объема для  $B_3$ .

Численное решение дискретных аналогов дифференциальных уравнений проводится итеративно с применением нижней релаксацией.

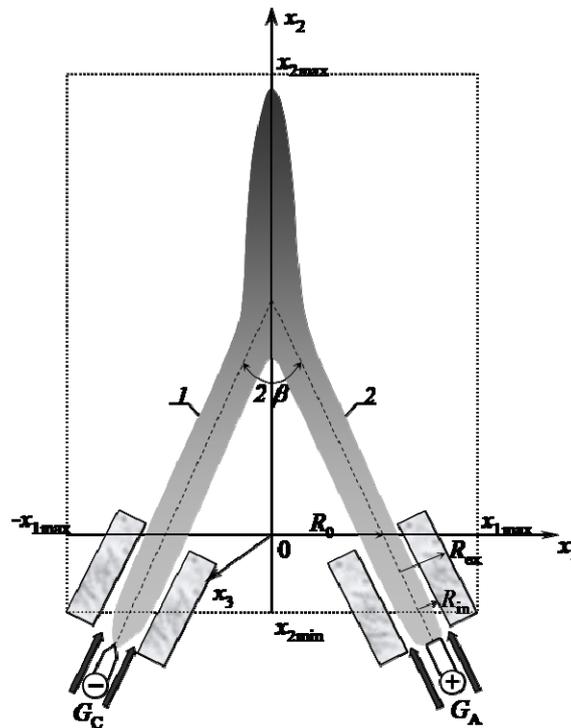
#### 4. Пример расчета

Проводится расчет характеристик плоскопараллельной двухструйной дуги, концы которой находятся в продуваемых плазмообразующим газом каналах катодного и анодного насадков, расположенных под углом  $2\beta$  друг к другу (рис.2). При вытекании из электродных насадков в атмосферу того же газа в результате взаимодействия плазмен-

ных струй друг с другом формируется структура общего потока плазмы и происходит замыкание токопроводящего канала двухструйной дуги.

Система МГД уравнений (9) дополняется граничными условиями для зависимых переменных на контуре расчетной области. Распределения характеристик на границах расчетной области внутри электродных насадков определяются по заданным значениям силы тока и расхода газа из условия однородности потока в поперечном к его оси направлении; на стенках насадков для скорости используются условия прилипания и непроницаемости, а для температуры – условие сопряжения с заданной температурой стенок; на свободных границах используются условия нормального втекания холодного или вытекания нагретого газа при фиксированном атмосферном давлении. В соответствии с рекомендациями [7] граничные значения  $B_3$  вычисляются в соответствии с законом Био – Савара (6), который после интегрирования по  $x_3 \in (-\infty, +\infty)$  записывается в виде

$$B_3(x_1, x_2) = \frac{\mu_0}{2\pi} \iint_{x_1 x_2} \frac{(x_2 - x'_2) j_1 - (x_1 - x'_1) j_2}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} dx'_1 dx'_2. \quad (10)$$



**Рис.2.** Схема расчетной области плоскопараллельной двухструйной дуги: 1 – катодная и 2 – анодная токовые струи плазмы;  $2\beta$  – угол и  $2R_0$  – расстояние между осями электродных насадков с размерами  $R_{in}$ ,  $R_{ex}$ ;  $G_C$ ,  $G_A$  – расходы плазмообразующего газа.

Геометрия насадков соответствует экспериментальным данным [10]:  $R_{in} = 2.5$  мм;  $R_{ex} = 10$  мм;  $R_0 = 15$  мм;  $2\beta = 60^\circ$ . Величины погонных расходов полагаются равными и рассчитываются по экспериментальному из [10] значению  $G = 0.06$  г/с расхода газа через каждое сопло из условия однородности  $\partial/\partial x_3 = 0$ :  $G_C = G_A = G / (2R_{in}) = 0.012$  г/(с·мм). Величина погонной силы тока  $I = 4$  А/мм. Размеры расчетной области:  $x_{1max} = 5$  см;  $x_{2min} = -4$  см;  $x_{2max} = 20$  см (рис.2) устанавливаются в результате апостериорной оценки малости влияния границ на численное решение.

Термодинамические свойства и коэффициенты переноса аргона в зависимости от температуры при атмосферном давлении берутся из тех же источников, что и в [2].

Расчет показывает (рис.3), что в результате взаимодействия плазменных струй друг с другом формируется сложная газодинамическая, температурная и электромагнитная структура двухструйной дуги.

Картина течения обусловлена, в основном, газодинамическим соударением и электромагнитным отталкиванием токовых струй. При “отключении” амперовых сил реализуется взаимное растекание одной струи на другой (рис. 3а), возникающее в неоднородном поле давления газодинамического соударения. Конвективно-кондуктивный теплоперенос и джоулево тепловыделение формируют соответствующее распределение температуры (рис.3а), неоднородность которого, в свою очередь, определяет картину непрерывных линий электрического тока (рис.3б).

Электромагнитное взаимодействие токовых струй качественно изменяет картину течения. Отталкивание токовых струй амперовыми силами (рис.3е) ослабляет эффект газодинамического соударения: область повышенного давления смещается вверх с уменьшением величины максимального давления. В результате исчезает взаимное растекание одной струи на другой (рис.3с). Оба струйных потока, разворачиваясь областью повышенного давления, движутся только в положительном направлении  $x_2$  и оказываются разделенными спутным потоком газа, подсосываемого с межсопловой границы  $x_2 = x_{2min}$  и огибающего сформировавшийся перед областью повышенного давления тороидальный вихрь. Возвратному течению способствует и амперова сила (рис.3е). В окрестности нижней границы зоны перетекания электрического тока на оси  $x_1 = 0$ , в “отрицательной яме” силы давления притормаживают возвратное течение спутного газа в тороидальном вихре. Движение и ускорение спутного газа, обогнувшего вихрь и прогретого горячими струями, является практически квазиодномерным и обусловлено совместным действием электромагнитной силы, антиградиента давления и архимедовой силы. В окрестности верхней границы зоны перетекания тока электромагнитная сила становится притормаживающей за счет пинч-эффекта, обусловленного тем, что в этой области в результирующем магнитном поле аддитивный вклад элементов перетекающего между струями тока становится доминирующим по сравнению с вкладом элементов тока в струях. Отметим, что пинч-эффект наблюдается вдоль всего токового канала (рис.3е).

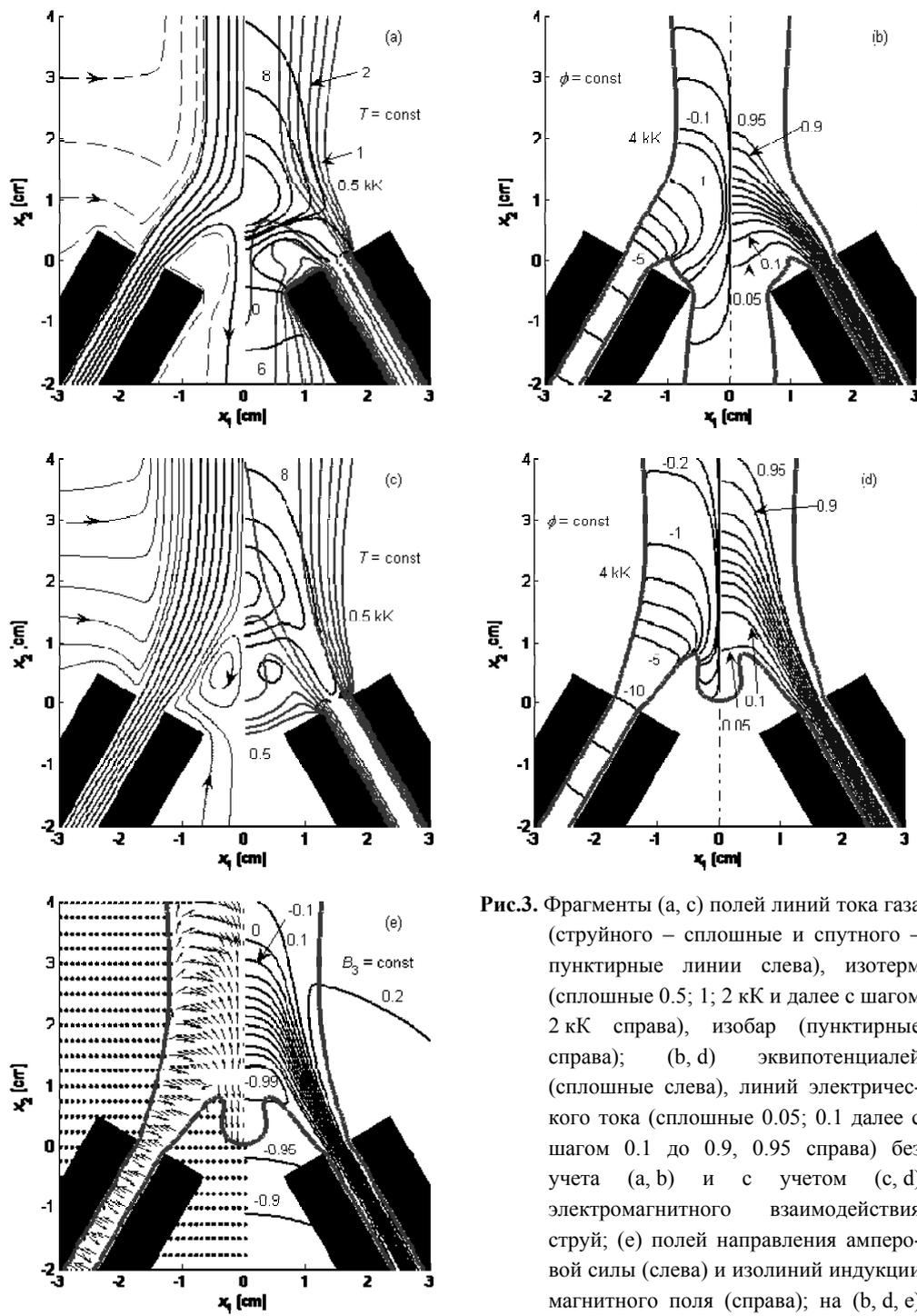


Рис.3. Фрагменты (а, с) полей линий тока газа (струйного – сплошные и спутного – пунктирные линии слева), изотерм (сплошные 0.5; 1; 2 кК и далее с шагом 2 кК справа), изобар (пунктирные справа); (b, d) эквипотенциалей (сплошные слева), линий электрического тока (сплошные 0.05; 0.1 далее с шагом 0.1 до 0.9, 0.95 справа) без учета (а, b) и с учетом (с, d) электромагнитного взаимодействия струй; (e) полей направления амперовой силы (слева) и изолиний индукции магнитного поля (справа); на (b, d, e) пунктирные слева и справа – граница области проводимости.

### 5. Эффективность метода

Сравнение вычислительных эффективностей предлагаемого расчета индукции магнитного поля и расчета по формуле Био – Савара (10) производится по отношению соответствующих времен вычисления  $B_3$ , поскольку оба метода дают практически совпадающее магнитное поле (погрешности одинаковы). Получено, что на сетке  $200 \times 480$  это отношение составляет  $\approx 1:60$  или  $\approx 1:15$ , если индукция рассчитывается по (10) только в узлах с ненулевой электропроводностью (для вычисления электромагнитной силы). Отметим также, что доля вычисления  $B_3$  от времени одной итерации МГД уравнений составляет  $\sim 30$  и  $\sim 95\%$  (или  $\sim 80\%$  в случае указанного частичного вычисления  $B_3$ ) для методов (8) и (10) соответственно.

### 6. Выводы

1. Предложен метод непосредственного расчета индукции собственного магнитного поля без введения векторного потенциала в МГД моделях электрической дуги.
2. Для двумерного распределения с двумя тангенциальными компонентами плотности тока и одной нормальной компонентой магнитной индукции размерность рассчитываемого поля ниже, чем в методе векторного потенциала.
3. Апробация в двумерном случае показала более высокую эффективность метода расчета индукции собственного магнитного поля по сравнению с вычислением по закону Био – Савара.

### 7. Заключение

Предложенный в работе метод расчета магнитного поля в МГД моделях электрических дуг обобщается

– на неравномерную сетку, которая для минимизации потери точности аппроксимации должна быть квазиравномерной как для граней ОКО, так и для их “центров” – узлов [11];

– на трехмерный случай, при котором все компоненты индукции определяются в вершинах ОКО, а соответствующие им циркуляции плотности электрического тока – как средние по соседним ОКО.

Ясно, что обобщение предлагаемого метода для расчета трехмерного магнитного поля стационарной электрической дуги ни в чем не уступает широко используемому методу векторного потенциала, имея очевидное преимущество непосредственного вычисления индукции магнитного поля.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория термической электродуговой плазмы / Ред. Жуков М.Ф. – Новосибирск: Наука СО, 1987, т. 1, 574 с.
2. Теория столба электрической дуги / Ред. Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др. – Новосибирск: Наука СО, 1990, 376 с.
3. Low temperature plasmas: fundamentals, technologies and techniques / ed. by Hippler R. et al. – Weinheim: Wiley-VCH, 2008, v. 1, 409 p.
4. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. – М.: ИЛ, 1961, 370 с.

5. *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. – М.: Наука, Физматлит, 1995, 320 с.
6. *Murphy A.B.* A self-consistent three-dimensional model of the arc, electrode and weld pool in gas-metal arc welding // J. Phys. D: Appl. Phys, 2011, v. 44, 194009, 11 p.
7. *Freton P., Gonzales J.J., Masquere M., Reichert F.* Magnetic field approaches in dc thermal plasma modeling // J. Phys. D: Appl. Phys, 2011, v. 44, 345202, 16 p.
8. *Brackbill J.U., Barnes D.C.* The Effect of nonzero  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations // J. Comput. Phys., 1980, v. 35, p. 426–430.
9. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984, 152 с.
10. *Жеенбаев Ж., Энгельит В.С.* Двухструйный плазмотрон. – Фрунзе: Ин-т физики и математики АН Кирг. ССР, 1983, 199 с.
11. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – СПб.: BHV, 2011, 592 с.

Поступила в редакцию 10.02.2012.