ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА СУММОЙ ТРЕХ СЛАГАЕМЫХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 01.03.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001309
Деденевой Яны Петровны

Научный руководитель
к. ф.-м. н.
Шевцова М.В.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В развитии математики существует общая закономерность: новые направления математики рождаются в недрах старых. Так и теория чисел, изучающая свойства целых и рациональных чисел, а также и любых других чисел, выросла из арифметики. [7, с.48]

Самой древней математической деятельностью был счет. Счет был необходим, чтобы следить за поголовьем скота и вести торговлю. Некоторые первобытные племена подсчитывали количество предметов, сопоставляя им различные части тела, главным образом пальцы рук и ног. Первыми существенными успехами в арифметике стало изобретение четырех основных действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Дальнейшее развитие математики началось примерно в 3000 до н.э. благодаря вавилонянам и египтянам. [5, с.95]

Математиков давно интересует вопрос о представлении любого числа в виде суммы некоторого количества простых. Одной из задач занялся более двухсот лет тому назад член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах. Он перепробовал очень много чисел, пытаясь разложить их на сумму простых. И пришёл к убеждению, что любое число, большее семи, представляет сумму трех простых, об этом и сообщил в письме Эйлеру. Оно является доказанным и называется тернарной проблей Гольдбаха. Так же существует более сильная гипотеза, в которой утверждается, что каждое четное число больше двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел. Она является недоказанной и называется бинарной проблемой Гольдбаха. [2, с.34]

Актуальность исследования состоит в обоснованности вопроса решения классической проблемы Гольдбаха с дополнительными условиями, теми же методами.

Объектом исследования является вариант проблемы Гольдбаха: задача о числе решения уравнения с дополнительными коэффициентами.

Цель работы состоит в получении асимптотической формулы для числа решений уравнения $N = n\mathrm{p}_1 + m\mathrm{p}_2 + k\mathrm{p}_3$ при фиксированных натуральных числах m, n, k.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд **задач**:

– изучить литературу по проблеме исследования;

– изучить доказательство тернарной проблемы Гольдбаха;

– применить изученные методы к решению аналогичной задачи с дополнительными условиями.

Выпускная квалификационная работа изложена на 49 страницах, состоит из введения, заключения, двух разделов и списка использованной литературы.

Введение содержит общие сведения о работе, актуальность выбранной темы, объект, цель и задачи.

Первая глава имеет вспомогательный характер. В ней изложено решение тернарной проблемы Гольдбаха.

Во второй главе проводится решение поставленной задачи данной работы.

В заключении отражены общие выводы по работе и достигнутые результаты.

ГЛАВА 1. ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

1.1 Вспомогательные утверждения

Количество представлений натурального числа N выразим суммою трех простых чисел.

Лемма 1.

Пусть J(N) – число решений в простых числах p_1, p_2, p_3 *уравнения*

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

Тогда

$$J(N) = \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha, \qquad (1.1)$$

Где

$$S(\alpha) = \sum_{p\leq N} e^{2\pi i\alpha p}. \quad [12, \text{с}. 158]$$

Доказательство:

Если m – целое отличное от нуля число, то

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m} d\alpha = \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{2\pi i m} \Big|_0^1 = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha = \begin{cases} 1, \text{если } m = 0, \\ 0, \text{если } m - \text{целое число}, m \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$J(N) = \sum_{p_1,p_2,p_3 \leq N} e^{2\pi i\alpha}(p_1 + p_2 + p_3 - N)d\alpha = \int_0^1 (S(\alpha))^3 e^{-2\pi i\alpha N}dx. \blacksquare$$

Существо кругового метода Харди–Литтлвуда–Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова состоит в том, что в *J(N)* выделяется предполагаемый главный член асимптотической формулы для величины *J(N)* при *N*→∞. Для этого интервал интегрирования *[0,1)* в (1.1) разбивается несократимым рациональными дробями (дроби Фарея) на непересекающиеся интервалы; сумма интегралов по интервалам, отвечающим дробям с малыми знаменателями, и дает предполагаемый главный член. А с большими знаменателями дает остаточный член. Нам нужна будет лемма о приближении действительных чисел рациональными. [5, с.132]

Лемма 2.

Пусть $\tau \geq 1, \alpha$ *−вещественное число, тогда существует целые взаимно простые числа* a *и* q, $1 \leq q \leq \tau$*, такие, что*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Доказательство:

Можно считать $0 \leq \alpha \leq 1$. Рассмотрим при *m = 0, 1, ..., [τ]* числа$\{\alpha m\}$. Они лежат на промежутке *[0,1)*, следовательно найдутся значения *m*, m=m_1, m=m_2, такие, что

$$\{\alpha m_1\} - \{\alpha m_2\} = \frac{\theta}{\tau}, \quad |\theta| \le 1$$

или

$$\alpha(m_1 - m_2) - [\alpha m_1] + [\alpha m_2] = \frac{\theta}{\tau},$$

где

$$1 \le |\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2| \le [\tau] \le \tau.$$

Отсюда следует утверждение леммы. [19, с.245]■

1.2 Круговой метод в проблеме Гольбаха

Предварительно преобразовав *J(N)*,для величины *J(N)* выделим предполагаемый главный член асимптотической формулы. В последующих рассуждениях будем считать $N \ge N_0$ –достаточно большое фиксированное положительное число.

Пусть A и B – два положительных числа.

$$L = \ln N, \ \ \tau = N \cdot L^{-B}, \ \ Q = L^A, \ \ x\tau = 1.$$

В силу периодичности подынтегральной функции в (1.1) по α, имеем

$$J(N) = \int_{-x}^{1-x} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \qquad (1.2)$$

По Лемме 2 каждое α из промежутка *[-x , 1-x]* представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \;\; 1 \le q \le \tau, \;\; (a, q) = 1, \;\; |z| = \frac{1}{q\tau}. \qquad (1.3)$$

$0 \le a \le q - 1$, причем $a = 0$ при $q = 1$. Через E_1 обозначим те α, для которых в представлении (1.3) $q \le Q$, через E_2 обозначим оставшиеся α. Множество E_1 состоит из пересекающихся отрезков. Действительно, E_1 состоит из отрезков $E(a, q)$ вида

$$\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau} \le \alpha \le \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\,, \;\; \le \alpha \le q\,,$$
$$(a, q) = 1, \qquad q = 1, 2, \dots, |Q|.$$

Если $E(a, q)$ и $E(a_1, q_1)$ не пересекаются.

Обозначая через J_1 интеграл по множеству E_1, а через J_2- интеграл по множеству E_2, т.е.

$$J_1 = J_1(N) = \int\limits_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} dx,$$
$$J_2 = J_2(N) = \int\limits_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} dx,$$

будем иметь

$$J = J_1 + J_2$$

Лемма 3.

Пусть α имеет вид (3) и $\alpha \in E_1$. Тогда

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} M(z) + O\left(Ne^{-c\sqrt{L}}\right),$$

Где

$$M(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{e^{2\pi izn}}{log\, n} = \int_{3}^{N} \frac{e^{2\pi izu}}{log\, u} du + O(1).$$

Доказательство:

При любом n из промежутка $\sqrt{N} < n \leq N$ по следствию 2 теоремы 6 имеем

$$\pi(n; q, l) = \frac{Li\, n}{\varphi(q)} + O\left(ne^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Поэтому

$$S(\alpha) = S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{\sqrt{N} < p \leq N} e^{2\pi i \frac{ap}{q}} e^{2\pi izp} + O\left(\sqrt{N}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{al}{q}} T(l) + O(\sqrt{N}), \qquad (1.4)$$

где

$$T(l) = \sum_{\substack{p = l (mod\ q) \\ \sqrt{N} < p \leq N}} e^{2\pi izp} = \sum_{\sqrt{N} < p \leq N} \left(\pi(n; q, l) - \pi(n-1; q, l)\right) e^{2\pi izn}.$$

К последней сумме применим преобразование Абеля, полагая

$$c_n = \pi(n;q,l) - \pi(n-1;q,l), \qquad f(u) = e^{2\pi i z u}.$$

Для *C(u)* воспользуемся асимптотической формулой

$$C(u) = \sum_{\sqrt{N}<n\le u} c_n = \frac{1}{\varphi(k)} Li\, u + O\left(ue^{-c_1\sqrt{L}}\right),$$

при $n \geq 3$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{e^{2\pi i z u}}{\log u} du = \frac{e^{2\pi i z n}}{\log n} + O(|z|) + O(\frac{1}{n\, log^2 n}),$$

Из (1.4) получим утверждение леммы. ■ [3, с.107]

Замечание.

Постоянная в знаке *O* не эффективна, так как мы существенно пользовались следствием 2 теоремы 6.

Лемма 4.

Для величины J_1 *справедлива следующая формула:*

$$J_1 = \sigma x + O(N^2 L^{-A-1}) + O(N^2 L^{-2B+2A}),$$

где

$$\sigma = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma(q); \quad \gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

$$x = \int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz; \quad M(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{e^{2\pi i z n}}{log\, n}.$$

<u>Доказательство:</u>

По определению

$$J_1 = \int_{E_1} S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha = \sum_{q\le Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} I(a,q)\ ,$$

где

$$I(a,q) = \int_{-1/p\tau}^{+1/p\tau} S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}dz.$$

По лемме 3 в этой формуле

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}M(z) + O\left(Ne^{-c\sqrt{L}}\right);$$

Отсюда

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}M^3(z) + O\left(N^3e^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Тем самым для I(a, q) находим

$$I(a,q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\int_{-1/p\tau}^{+1/p\tau} M^3(z)e^{-2\pi izN}dz + O\left(N^2L^Bq^{-1}e^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Интеграл в последней формуле заменим близким к нему интегралом $\varkappa$. Имеем

$$\int_{-1/p\tau}^{+1/p\tau} M^3(z)e^{-2\pi izN}dz = \int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z)e^{-2\pi izN}dz + R = \varkappa + R,$$

где

$$|R| \le 2\int_{+1/q\tau}^{+0,5} |M(z)|^3 dz.$$

Оценим $|M(z)|$ при $0 < |z| \le ½$. Проинтегрируем один раз по частям

$$\int_3^N \frac{e^{2\pi izu}}{\log u}du = \frac{1}{2\pi iz}\frac{e^{2\pi izu}}{\log u}\Bigg|_3^N - \frac{1}{2\pi iz}\int_3^N e^{2\pi izu}d\frac{1}{\log u};$$

$$|M(z)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Поэтому

$$|R| \ll \int_{+1/q\tau}^{+0,5} \frac{dz}{z^3} \ll q^2\tau^2 \ll N^2L^{-2B+2A}.$$

Получаем

$$I(a,q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\varkappa + O\left(\frac{1}{\varphi^3(q)}N^3L^{-2B+2A}\right);$$

$$J_1 = \varkappa\sum_{q\le Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}} + O(N^2L^{-2B+2A});$$

Двойную сумму в последнем равенстве преобразуем так же, как раньше преобразовали по z. Имеем

$$\sum_{q\le Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}-R_1=\sigma-R_1,$$

где

$$|R_1|<\left|\sum_{q>Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\right|\le\sum_{q>Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\ll\int_Q^{\infty}\frac{(\log\log u)^2}{u^2}du\ll L^{-A+1}.$$

Следовательно,

$$J_1=\sigma\varkappa+O(\varkappa L^{-A+1})+O(N^2L^{-2B+2A}).$$

Наконец,

$$|\varkappa|=\left|\int_{-0.5}^{+0.5}M^3(z)e^{-2\pi izN}dz\right|\le N\int_{-0.5}^{+0.5}|M(z)|^2dz=N\sum_{3\le n\le N}\frac{1}{log^2n}\ll N^2L^{-2}.$$

Окончательная формула:

$$J_1=\sigma\varkappa+O(N^2L^{-A-1})+O(N^2L^{-2B+2A})\qquad\blacksquare\ [12,\text{с.}\,160]$$

Исследуем более подробно величины $\varkappa$ и σ.

Лемма 5.

Имеет место равенство

$$\varkappa = \varkappa(N) = \frac{N^2}{2log^3N} + O\left(\frac{N^2}{log^4N}\right).$$

<u>Доказательство:</u>

Пусть

$$M_0(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{e^{2\pi izn}}{\log N}.$$

Тогда

$$|M(z) - M_0(z)| \leq \sum_{n=3}^{N} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N}\right) \leq \int_{2}^{N} \left(\frac{1}{\log u} - \frac{1}{\log N}\right) du = O\left(\frac{N}{log^2N}\right)$$

Пологая, далее,

$$\varkappa = \varkappa_0(N) = \int_{-0.5}^{+0.5} M_0^3(z)e^{2\pi izN}dz,$$

находим

$$|\varkappa - \varkappa_0(N)| \ll \frac{N}{log^2N} \int_{-0.5}^{+0..5} (|M(z)|^2 + |M(z_0)|^2)dz \ll \frac{N^2}{log^4N}.$$

Следовательно,

$$\varkappa = \varkappa_0 + \left(\frac{N^2}{log^4 N}\right) = \frac{1}{log^3 N} I_0(N) + O\left(\frac{N^2}{log^4 N}\right),$$

$I_0(N) -$ число решений уравнения

$$n_1 + n_2 + n_3 = N, \quad 3 \leq n_1, n_2, n_3 \leq N - 6.$$

При фиксированном $n_3, 3 \leq n_3 \leq N - 6$, уравнение

$$n_1 + n_2 = N - n_3, \quad 3 \leq n_1, \qquad n_2 \leq N - 6$$

имеет $N - n_3 - 5$ решений;
поэтому

$$I_0(N) = \sum_{n_3=\varepsilon}^{N-6} (N - n_3 - 5) = \frac{N^2}{2} + O(N).$$

Итак,

$$(N) = \frac{N^2}{2log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{log^4 N}\right) \qquad \blacksquare \ [11, \text{с}. 48]$$

Лемма 6.

Имеет место равенство

$$\sigma = \sigma(N) = \prod_{p \backslash N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \times N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

<u>Доказательство:</u>

$$T(q) = \sum_{\substack{a=-1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

Покажем, что q–мультипликативная функция.

Пусть $q = q_1 q_2, (q_1, q_2) = 1,$ тогда

$$T(q_1 q_2) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q_1 q_2} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i \frac{a_2 q_1 + a_1 q_2}{q_1 q_2} N} = T(q_1) T(q_2).$$

Отсюда следует мультипликативность $T(q)$ и $\gamma(q)$. Так как

$$|\gamma(q)| \leq \frac{1}{\varphi^2(q)},$$

то

$$\prod_{p \leq X} (1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \cdots)$$

$$= \sum_{q \leq X} \gamma(q) + O\left(\sum_{q > X} \frac{1}{\varphi^2(q)} \right) = \sum_{q \leq X} \gamma(q) + O\left(\frac{\log \log X}{X} \right).$$

Переходя к пределу $X \to +\infty$, найдем

$$\sigma = \prod_{p} (1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \cdots).$$

Из определения $\gamma(p)$ получаем

$$\gamma(p) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)^2}, \text{если } p\backslash N; \\ \dfrac{1}{(p-1)^3}, \text{если } p \times N; \end{cases}$$

$$\gamma(p^r) = 0, \text{если } r \geq 2.$$

Таким образом,

$$\sigma = \prod_{p\backslash N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\times N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^3}\right) =$$

$$= \prod_{p}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\backslash N}\left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right) \qquad \blacksquare\ [15, \text{с}. 201]$$

Доказательства лемм дали нам основной результат этого пункта.

Теорема 1.

Для J_1 справедлива асимптотическая формула

$$J_1 = J_1(N) = \frac{N^2}{2(\log N)^3}\sigma + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$\sigma = \sigma(N) = \prod_{p\backslash N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\times N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right). \qquad \blacksquare\ [12, \text{с}. 162]$$

Замечания $[12, \text{с}. 163]$**:**

1. В данной теореме постоянная в знаке *O* неэффективна, так как применялось следствие 2 теоремы 6;

2. Далее в пункте 3 будет получена асимптотическая формула для J_1 с эффективной постоянной в знаке *O;*

3. При нечетном N ввиду очевидных неравенств

$$\prod_{p\backslash N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}, \qquad \prod_{p\times N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right) > 2$$

находим

$$\sigma(N) > 1.$$

Для получения асимптотической формулы для $J=J(N)$, надо оценить J_2, а для этого нужна оценка $|S(\alpha)|$ при α, принадлежащих множеству E_2.

1.3 Линейные тригонометрические суммы с простыми числами

Далее будем доказывать теорему И.М.Виноградова об оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами. Асимптотической формулой для числа представлений нечетного N суммою трех простых чисел, будет являться следствие этой теоремы и теоремы 1.

Теорема 2.

Пусть

$$H = e^{0.5\sqrt{\log N}}, \alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},$$
$$(a,q)=1, \qquad |\theta| \le 1, \qquad 1 < q \le N;$$
$$S = S(\alpha) = \sum_{p\le N} e^{2\pi i\alpha p}.$$

Тогда

$$S \ll N(\log N)^3\,\Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

<u>Доказательство:</u>

Возьмем

$$P = \prod_{p \le \sqrt{N}} p;$$

Найдем, воспользовавшись свойством функции Мёбиуса

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{N} e^{2\pi i\alpha n} = \sum_{d \backslash P} \mu(d) S(d),$$

$$S(d) = \sum_{0 < m \le N d^{-1}} e^{2\pi i\alpha m d}.$$

Отсюда

$$S = S_0 - S_1 + O\left(\sqrt{N}\right), \tag{1.5}$$

где

$$S_0 = \sum_{d_0 m \le N} \sum e^{2\pi i\alpha m d_0}, \;\; \mu(d_0) = +1,$$

$$S_1 = \sum_{m d_1 \le N} \sum e^{2\pi i\alpha m d_1}, \;\; \mu(d_1) = -1.$$

Суммы S_0 и S_1 оцениваются одинаково. Оценим S_0. Отрезок $0 < m \leq N$ разобьем на $\ll \log N$ отрезков вида $M < m \leq M', M' \leq 2M$ и рассмотрим сумму

$$S(M) = \sum_{md_0 \leq N} \sum e^{2\pi i\alpha m d_0}. \tag{1.6}$$

Если $M \geq H$, то найдем применив лемму 5

$$S(M) = \sum_{d_0 \leq NM^{-1}} \sum_{M < m \leq min\left(M', \frac{N}{d_0}\right)} e^{2\pi i\alpha m d_0} \ll \sum_{d_0 \leq NM^{-1}} min\left(\frac{N}{d_0}, \frac{1}{\|\alpha d_0\|}\right) \leq$$
$$\leq \sum_{d_0 \leq NM^{-1}} min\left(\frac{N}{n}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) \leq$$
$$\leq \sum_{0 < n \leq 0.5q} + \sum_{0.5q < n \leq 1.5q} + \ldots + \sum_{(r-0.5)q < n \leq (r+0.5)q}, \tag{1.7}$$

где $r \leq NM^{-1}q^{-1}$. Пусть k-наименьший неотрицательный вычет числа an по модулю q при $1 \leq n < q$; тогда

$$\|an\| = \left\|\frac{an}{q} + \frac{\theta n}{q^2}\right\| = \left\|\frac{k + 0.5\theta_1}{q}\right\|, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

возьмем

$$u = \begin{cases} k, & \text{если } k \leq 0.5q; \\ q - k, & \text{если } k > 0.5q, \end{cases}$$

найдем

$$\|\alpha n\| \geq \frac{u-0.5}{q}.$$

Следовательно, первое слагаемое в (1.7)

$$\leq \sum_{0<u\leq 0.5q} \frac{1}{u-0.5} \ll q \log q.$$

К остальным слагаемым в (1.7) применяя лемму 6, получим:

$$S(M) \ll q \log + \sum_{l=1}^{r} \left(\frac{N}{(l-0.5)q} + q \log q \right) \ll$$
$$\ll q \log + Nq^{-1} \log N$$
$$+ NM^{-1} \log q \ll N(\log N) \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + \frac{1}{H} \right). (1.8)$$

Пусть теперь $M<H$. Сумму $S(M)$ представим в виде

$$S(M) = \sum_{M<m\leq M\prime} \sum_{d_0\leq Nm^{-1}} e^{2\pi\alpha m d_0}.$$

Буквой δ_k обозначаем каждое d_0 имеющее ровно k простых сомножителей, превосходящих H^2. Если k_0–максимальное значение k для $d_0 \leq N,$ то $2^{k_0} \leq N$, т.е. $k_0 \ll \log N$.

Имеем

$$S(M) = \sum_{k=0}^{k_0} S_k(M),$$

$$S_k(M) = \sum_{M<m\le M'} \sum_{\delta_k \le Nm^{-1}} e^{2\pi\alpha m\delta^k}.$$

Оценим $S_0(M)$. Пусть -число простых сомножителей $\delta_0, \delta_0 > NM^{-1}H^{-1}$; тогда

$$H^{2\varkappa} > NH^{-2}; \quad (2\varkappa + 2)0.5\sqrt{\log N} > \log N;$$
$$\varkappa > \sqrt{\log N} - 1, \;\; \tau(\delta_0) > 2^{\sqrt{\log N} - 1}.$$

Применяя тривиальное неравенство, получаем

$$\sum_{n\le x} \tau(n) = \sum_{n\le x} \left[\frac{x}{n}\right] \ll xlogx,$$

имеем

$$S_0(M) \ll \sum_{M<m\le M'} \left(\sum_{\delta_0 \le NM^{-1}H^{-1}} 1 + \sum_{NM^{-1}H^{-1}<\delta_0\le Nm^{-1}} \frac{\tau(\delta_0)}{2^{\sqrt{\log N}}} \right) \ll$$
$$\ll M\left(\frac{N}{MH} + \frac{Nlog\, N}{M\cdot 2^{\sqrt{\log N}}}\right) \ll \frac{N}{H}.$$

Оценим $S_k(M),\; k > 0$. Сравним $S_k(M)$ с суммой

$$T_k = \sum_{M<m\le M'} \sum_{pt\le Nm^{-1}} e^{2\pi i\alpha mpt},$$

где p принимает простые числа интервала $H^2 < p \le \sqrt{N}$, а t принимает значения d_1, имеющие ровно *k-1*простых сомножителей, превосходящих H^2. Пусть *k-1* членов *c(p,t)=p* сумма T_k имеет

$$\ll \sum_{M<m\leq M'} \sum_{H^2<p\leq\sqrt{N}} \frac{NM^{-1}}{p^2} \ll \frac{N}{H}.$$

Остальные члены суммы T_k такие же, что и члены суммы $S_k(M)$. Каждый член суммы $S_k(M)$ входит в T_k ровно k раз. Поэтому

$$S_k(M) = \frac{1}{k} T_k + O\left(\frac{N}{kH}\right).$$

Последние равенство справедливо и при $k=1$. Оценим T_k. Обозначим $mp=u$; интервал

$$MH^2 < u \leq M'\sqrt{N}$$

разобьем на $\ll \log N$ интервалов $U < u \leq U', U < U' \leq 2U,$ и пусть

$$T_k(U) = \sum_{U<u\leq U'}{}' \sum_{ut\leq N} e^{2\pi i\alpha ut}.$$

Применим лемму 6

$$|T_k(U)|^2 \leq U \sum_{u=U+1}^{2U} \left| \sum_{ut\leq N} e^{2\pi i\alpha ut} \right|^2 U =$$

$$= \sum_{t_1\leq NU^{-1}} \sum_{t_2\leq NU^{-1}} \sum_{U<u\leq min\left(2U,\frac{N}{t_1},\frac{N}{t_2}\right)} e^{2\pi i\alpha u(t_1-t_2)} \ll$$

$$\ll U \sum_{t_1\leq NU^{-1}} \sum_{t_2\leq NU^{-1}} min\left(U, \frac{1}{\|\alpha(t_1-t_2)\|}\right) \ll U\frac{N}{U}\left(\frac{N}{U_q+1}\right)(U+qlog\ q) \ll$$

$$\ll N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{U}{N}+\frac{1}{U}+\frac{q}{N}\right) \times \log N \ll N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{H^2}\right)\log N;$$

$$|T_k(U)| \ll N\sqrt{\log N}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right);$$

$$|T_k| \ll N(\log N)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right).$$

Отсюда и из (1.8)

$$S(M) \ll |S_0(M)| + \sum_{k=1}^{h_0}\left(\frac{1}{k}|T_k| + \frac{N}{kH}\right) \ll N(\log N)^{\frac{3}{2}}(\log\log N)\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right);$$

$$S \ll N(\log N)^3\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right) \qquad \blacksquare \quad [12, \text{с}. 164]$$

Теорема 3.

Для числа J(N) представлений нечетного N суммою простых трех чисел справедлива следующая асимптотическая формула:

$$J(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

$$\sigma(N) = \prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\backslash N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right) > 1\,. \quad (1.9)$$

<u>Доказательство:</u>

Из Леммы 1, формул пункта 1.2 и теоремы 1 при *A=15* имеем

$$J(N) = J_1(N) + J_2(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(lpg\ N)^3} + J_2(N) + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$J_2(N) = \int\limits_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha.$$

По определению множества E_2 для $\alpha \in E_2$ выполняется равенство

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1,$$
$$|\theta| \leq 1, \ \ (\log N)^{15} < q < N(\log N)^{-20};$$

по теореме 2

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-4}, \ \ \alpha \in E_2.$$

Поэтому

$$J_2(N) \ll \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int\limits_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2 (\log N)^{-5}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.■ [5, с. 62]

Следствие (проблема Гольдбаха).

Существует такое N_0, что каждое нечетное $N > N_0$ есть сумма трех простых чисел.

В силу значения к теореме 1 постоянная в знаке O в формуле (1.9) неэффективна, следовательно и постоянная N_0 неэффективна. Далее мы получим эффективную асимптотическую формулу для $J(N)$, тем самым и постоянная N_0 в следствии станет эффективной.

1.4 Эффективная теорема

Получим нетривиальную оценку тригонометрической суммы с простыми числами, когда знаменатель рационального приближения α мал.

Лемма 7.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ *−достаточно малое постоянное число,*

$$\tau \geq N e^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}},\;\; N_1 \geq N e^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}},$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + z;\;\; (a,q) = 1,\;\; 0 < q \leq e^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}}, |z| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Тогда

$$S(\alpha) = \sum_{N-N_1<p\leq N} e^{2\pi i\alpha p} \ll \frac{N_1 \log\log q}{\sqrt{q}\log N}.$$

<u>Доказательство:</u>

По теореме 6

$$\pi(n;q,l) = \frac{Li\, n}{\varphi(q)} - E_1\frac{x_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^n \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du + O(n\, e^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}}), \qquad \sqrt{N} \leq n \leq N.$$

Повторим первую часть доказательства теоремы 1 – преобразование

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right)$$

$$S(\alpha) = S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} T(l) e^{2\pi i\frac{a}{q}l} + O(\sqrt{N}),$$

$$T(l)=\sum_{N-N_1\le n\le N}\big(t(n)-t(n-1)\big)e^{2\pi i\tau n}+O\left(Ne^{-c_1\sqrt{\log N}}\right)+$$

$$+O(N^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}|z|)$$

где

$$t(n)=\frac{Li\,n}{\varphi(q)}-E_1\frac{x_1(l)}{\varphi(q)}\int\limits_{n-1}^{n}\frac{du}{\log u}\ e^{2\pi i\tau n}-$$

$$-\frac{E_1}{\varphi(q)}\left(\sum_{l=1}^{q}x_1(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}n}\right)\sum_{N-N_1\le n\le N}\left(\int\limits_{n-1}^{n}\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du\right)e^{2\pi izn}+O\left(qNe^{-c_1\sqrt{\log N}}\right)$$

$$+O\left(qN^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}|z|\right).\qquad(1.10)$$

Так как x_1 −некоторый действительный характер по модулю q, то

$$\left|\sum_{l=1}^{q}x_1(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\right|^2=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{m=1\\(m,q)=1}}^{q}\left|\sum_{l=1}^{q}x_1(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\right|^2\le$$

$$\le\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{m=1}^{q}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q}x_1(l)x_1(n)e^{2\pi i\frac{m}{q}(l-n)}\le q.$$

Перейдем к неравенствам в (1.10)

$$S(\alpha)\ll\frac{Li\,N-Li(N-N_1)}{\varphi(q)}+\frac{\sqrt{q}\big(Li\,N-Li(N-N_1)\big)}{\varphi(q)}+$$

$$+qNe^{-c_1\sqrt{\log N}}+qN^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}|z|\ll\frac{N_1}{\log N}\cdot\frac{\log\log q}{\sqrt{q}}.\ \blacksquare\ [11,\text{с}.\,92]$$

Теорема 4.

Для числа J(N) представлений нечетного N суммою трех простых чисел справедлива следующая асимптотическая формула:

$$J(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right),$$

где

$$\sigma(N)=\prod_{p}(1+\frac{1}{(p-1)^3}\prod_{p\backslash N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)$$

и постоянная в знаке O–эффективная.

Доказательство:

Возьмем $\tau=N(\log N)^{-20}$; по лемме 2 для $\alpha\in\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\qquad 1\le q\le\tau,\qquad (a,q)=1,\qquad |z|\le\frac{1}{q\tau}.\quad (1.11)$$

E_1 определяет те α, для которых $q\le(\log N)^3$, а E_2–множество остальных α. Как и было,

$$J=J_1+J_2,$$

где

$$J_1=\int\limits_{E_1}S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,\ J_2=\int\limits_{E_2}S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha.$$

Оценим J_2. Если в (1.11)

$$q \geq (\log N)^{29},$$

то по теореме 2

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-7};$$

если же $(\log N)^3 < q \leq (\log N)^{20}$, то по лемме 7

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-2.5}(\log\log N).$$

Поэтому

$$J_2 \ll \max_{\alpha\in E_2}|S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2(\log N)^{-3.5}(\log\log N).$$

Вычислим J_1. Рассмотрим множество всех q, не превосходящих *y,*

$$y = \frac{\log N}{e^{(\log\log N)^2}};$$

по следствию 3 теоремы 6 при $\sqrt{N} \leq x \leq N,$ за исключением «особых» модулей q, кратных некоторому q_0,

$$q_0 \geq c\ log^2 y(\log\log y)^{-8} \geq c\ log^2 y(\log\log y)^{-12},$$

для остальных справедлива асимптотическая формула

$$\pi(x; q, l) = \frac{Li\ x}{\varphi(q)} + O\left(xe^{-c_1(\log\log x)^2}\right).$$

Интеграл J_1 представим в виде суммы двух интегралов

$$J_1 = J_1' + J_2'',$$

где интегрирования в J_1' ведется по таким α, у которых в представлении (1.11) $q \leq (\log N)^3$ принадлежат множеству «особых» модулей. Повторим доказательство теоремы 1 для неособых модулей

$$J_1' = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{\leq (\log N)^3}{}' \gamma(q) + O\left(\frac{N^2}{log^4 N}\right), \quad (1.12)$$

где суммирование в последней сумме ведется по q, не принадлежащим к «особым» модулям,

$$\gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}.$$

Оценим J''. Возьмем $D = [(\log N)^{30}],\ A = ND^{-1}$. Тогда

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{s=1}^{D} \sum_{(s-1)A < p \leq sA} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right) p} =$$

$$= \sum_{s=1}^{D} \sum_{(s-1)A < p \leq sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} \cdot e^{2\pi i z s A} + O(|z| A N) =$$

$$= \sum_{s=1}^{D} e^{2\pi i z s A} \sum_{(s-1)A < p \leq sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} + O(N q^{-1} (\log N)^{-10});$$

отсюда

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N} = \sum_{s_1,s_2,s_3=1}^{D} e^{2\pi i z A(S_1+S_2+S_3-D)}W(s_1,s_2,s_3) +$$

$$+O\left(\left|S\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2 Nq^{-1}(\log N)^{-10}\right) + O(N^3q^{-3}(\log N)^{-30}),$$

где

$$W(s_1,s_2,s_3) = \sum_{(s_1-1)A<p_1\le s_1A}\ \sum_{(s_2-1)A<p_2\le s_2A}\ \sum_{(s_3-1)A<p\le s_3A} e^{2\pi i\frac{a}{q}(p_1+p_2+p_3-N)}.$$

Для J_1'' получаем оценку

$$J_1'' \ll \sum_{q\le(\log N)^3}\ \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left(\frac{1}{q\tau}\sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=1\\S_1+S_2+S_3=D}}^{D}|W(s_1,s_2,s_3)|\right) + N^2(\log N)^{-10}.$$

Для оценки $|\,W(s_1,s_2,s_3)|$ применяем лемму 7; находим

$$|\,W(s_1,s_2,s_3)| \ll \left(\frac{Alog\log N}{\sqrt{q}\log N}\right)^3.$$

Число решений уравнения

$$S_1+S_2+S_3-D=\lambda$$

не превосходит $D^2, \lambda \ll D$.

Поэтому

$$J_1'' \ll \sum_{q\le(\log N)^3}{}'' \left(\frac{1}{\tau}D^2\frac{A^3(\log\log N)^3}{q^{\frac{3}{2}}(\log N)^3}+\frac{q}{A}D^2\frac{A^3(\log\log N)^3}{q^{\frac{3}{2}}(\log N)^3}\right)+$$

$$+N^2(\log N)^{-10} \ll N^2(\log N)^{-10}+\frac{N^2(\log\log N)^4}{(\log N)^3}\sum_{q\le(\log N)^3}\frac{1}{\sqrt{q}},$$

суммирование в последней сумме ведется по «особым» q. Поэтому

$$\sum_{q\le(\log N)^3}\frac{1}{\sqrt{q}} \ll \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{m\le(\log N)(\log\log N)^{22}}\frac{1}{\sqrt{m}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{q_0}}\sqrt{\log N}\,(\log\log N)^6 \ll \frac{(\log\log N)^{12}}{\sqrt{\log N}}.$$

Окончательно получаем

$$J_1'' \ll \frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}. \quad (1.13)$$

Из определения $\gamma(q)$ и «особых» модулей q следует

$$\sum_{q\le(\log N)^3}{}''\gamma(q) \ll \sum_{q\le(\log N)^3}{}''\frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \sum_{q\le(\log N)^3}{}''\frac{(\log\log q)^2}{q^2} \ll$$

$$\ll q_0^{-2}(\log\log\log N)^2 \ll (\log N)^{-4}\,(\log\log N)^{25};$$

из (1.13) и последней оценки находим

$$J_1'' = \frac{N^2}{2(\log N)^3}\sum_{q\le(\log N)^3}{}''\gamma(q)+O\left(\frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}\right).$$

Объединим, получившиеся выражения для J_1'' с (1.12). И получаем асимптотическую формулу для J_1, а следовательно, и для J:

$$J_1 = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q \le (\log N)^3} \gamma(q) + O\left(\frac{N^2 (\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}\right) =$$

$$= \sigma(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right);$$

$$J = \sigma(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right). \ \blacksquare \ [12, \text{с.} \ 170]$$

ГЛАВА 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Лемма 1.

Пусть J(N) – число решений в простых числах $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ *уравнения*

$$N = n\mathrm{p}_1 + m\mathrm{p}_2 + k\mathrm{p}_3.$$

Тогда

$$J(N) = \int_0^1 S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha, \qquad (2.1)$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{p\le N} e^{2\pi i\alpha p}.$$

<u>Доказательство:</u>

Если m – целое отличное от нуля число, то

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha = \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{2\pi i m}\Big|_0^1 = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha = \begin{cases} 1, \text{если } m = 0, \\ 0, \text{если } m - \text{целое число}, m \neq 0. \end{cases}$$

Получаем

$$J(N)=\sum_{p_1,p_2,p_3\le\frac{N}{mnk}} e^{2\pi i\alpha}\left(p_1\;+\;p_2+p_3-\frac{N}{mnk}\right)d\alpha=\int_0^1 (S(\alpha))^3 e^{-\frac{2\pi i\alpha N}{nmk}}dx.\ \blacksquare$$

Существо кругового метода Харди–Литтлвуда–Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова состоит в том, что в *J(N)* выделяется предполагаемый главный член асимптотической формулы для величины *J(N)* при *N*→∞. Для этого интервал интегрирования *[0,1)* в (1.1) разбивается несократимым рациональными дробями (дроби Фарея) на непересекающиеся интервалы; сумма интегралов по интервалам, отвечающим дробям с малыми знаменателями, и дает предполагаемый главный член. А с большими знаменателями дает остаточный член. Нам нужна будет лемма о приближении действительных чисел рациональными. [12, с. 162]

Лемма 2.

Пусть $\tau\ge1,\alpha$ *−вещественное число, тогда существует целые взаимно простые числа* a *и* q, $1\le q\le\tau$, *такие, что*

$$\left|\propto-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q\tau}.$$

<u>Доказательство:</u>

Не ограничивая общности, можно считать $0\le\alpha\le1$. Рассмотрим при *m = 0, 1, ..., [*τ*]* числа$\{\alpha m\}$. Они лежат на промежутке *[0,1),* следовательно найдутся значения *m*, m=m_1, m=m_2, такие, что

$$\{\alpha m_1\}-\{\alpha m_2\}=\frac{\theta}{\tau},\quad |\theta|\le1$$

или

$$\alpha(m_1-m_2)-[\alpha m_1]+[\alpha m_2]=\frac{\theta}{\tau},$$

где $1 \le |m_1-m_2| \le [\tau] \le \tau$. Отсюда следует утверждение леммы.■

Применяя круговой метод, в котором:

$$J(N)=\int_{-x}^{1-x} S^3(\alpha)e^{-\frac{2\pi i\alpha N}{mnk}}d\alpha, \tag{2.2}$$

Каждое α из промежутка *[-x , 1-x]* по лемме 2, представимо в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\;\; 1\le q\le\tau,\;\; (a,q)=1,\;\; |z|=\frac{1}{q\tau}. \tag{2.3}$$

В этом представлении $0\le a\le q-1$, причем a = 0 лишь при $q = 1$. E_1 те α, для которых в представлении (2.3) $q \le Q$, а E_2 оставшиеся α. Множество E_1 состоит из пересекающихся отрезков. Действительно, E_1 состоит из отрезков *E(a, q)* вида

$$\frac{a}{q}-\frac{1}{q\tau}\le\alpha\le\frac{a}{q}+\frac{1}{q\tau}\,,\;\;\le\alpha\le q\,,$$
$$(a,q)=1,\qquad q=1,2,\dots,|Q|.$$

Если E(a, q) и $E(a_1,q_1)$ не пересекаются.

Обозначим через J_1 интеграл по множеству E_1, а через J_2–интеграл по множеству E_2, т.е.

$$J_1=J_1(N)=\int\limits_{E_1} S^3(\alpha)e^{-\frac{2\pi i\alpha N}{mnk}}dx,$$

$$J_2 = J_2(N) = \int\limits_{E_2} S^3(\alpha) e^{-\frac{2\pi i\alpha N}{nmk}} dx,$$

имеем

$$J = J_1 + J_2$$

Наша цель в этом параграфе – получение асимптотической формулы для величины J_1. Нам нужна будет

Лемма 3.

Пусть α имеет вид (3) и $\alpha \epsilon E_1$. Тогда

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} M(z) + O\left(Ne^{-c\sqrt{L}}\right),$$

где

$$M(z) = \sum_{n=3}^{\frac{N}{nmk}} \frac{e^{2\pi izn}}{\log n} = \int\limits_3^{\frac{N}{nmk}} \frac{e^{2\pi izu}}{\log u} du + O(1).$$

Доказательство:

При любом n из промежутка $\sqrt{N} < n \leq N$ по следствию 2 теоремы 6 имеем

$$\pi(n; q, l) = \frac{Li\, n}{\varphi(q)} + O\left(ne^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Поэтому

$$S(\alpha) = S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{\sqrt{\frac{N}{nmk}} < p \le \frac{N}{nmk}} e^{2\pi i \frac{ap}{q}} e^{2\pi i z p} + O\left(\sqrt{N}\right)$$

$$= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{al}{q}} T(l) + O(\sqrt{N}), \qquad (2.4)$$

где

$$T(l) = \sum_{\substack{p = l (mod\ q) \\ \sqrt{\frac{N}{nmk}} < p \le \frac{N}{nmk}}} e^{2\pi i z p} = \sum_{\sqrt{\frac{N}{nmk}} < p \le \frac{N}{nmk}} \left(\pi(n; q, l) - \pi(n-1; q, l)\right) e^{2\pi i z n}.$$

Применяя к последней сумме преобразование Абеля, полагая

$$c_n = \pi(n; q, l) - \pi(n-1; q, l), \qquad f(u) = e^{2\pi i z u}.$$

Воспользуемся асимптотической формулой для *C(u)*,

$$C(u) = \sum_{\sqrt{\frac{N}{nmk}} < s \le u} c_s = \frac{1}{\varphi(k)} Li\, u + O\left(u e^{-c_1 \sqrt{L}}\right),$$

и тем, что при $n \geq 3$

$$\int_{s-1}^{s} \frac{e^{2\pi i z u}}{\log u} du = \frac{e^{2\pi i z s}}{\log s} + O(|z|) + O\left(\frac{1}{s\, log^2 s}\right),$$

Из (4) получим утверждение леммы. ■

Замечание:

Постоянная в знаке O не эффективна, так как мы существенно пользовались следствием 2 теоремы 6.

Лемма 4.

Не ограничивая общности, можно считать (n,m)=1. Для величины I справедлива следующая формула:

$$I = \frac{I_0(N)}{ln^3 N}\sigma + O\left(\frac{N^2}{ln^{3.4} N}\right),$$

где $I_0(N)$ число решений в натуральных числах x,y,z уравнения

$$nx + my + kz = N,$$

$$\sigma = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma(q); \quad \gamma(q) = \frac{x_n(q) x_m(q) x_k(q) \overline{x_N(q)}}{\varphi^3(q)},$$

$$x_\tau(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{ar}{q}}$$

<u>Доказательство:</u>

По определению

$$J_1 = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i(m+n+k-N)} d\alpha = \sum_{q \le Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a,q)\,,$$

где

$$I(a,q) = \int_{-1/p\tau}^{+1/p\tau} S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)\frac{N}{mnk}} dz.$$

По лемме 3 в этой формуле

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}M(z)+O\left(Ne^{-c\sqrt{L}}\right);$$

отсюда

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}M^3(z)+O\left(N^3e^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Тем самым для $I(a, q)$ находим

$$I(a,q)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}e^{-2\pi i\frac{a}{q}\frac{N}{mnk}}\int_{-1/p\tau}^{+1/p\tau}M^3(z)e^{-2\pi iz\frac{N}{mnk}}dz+O\left(N^2L^Bq^{-1}e^{-c\sqrt{L}}\right).$$

Интеграл в последней формуле заменим близким к нему интегралом $\varkappa$. Имеем

$$\int_{-1/p\tau}^{+1/p\tau}M^3(z)e^{-2\pi iz\frac{N}{mnk}}dz=\int_{-0,5}^{+0,5}M^3(z)e^{-2\pi iz\frac{N}{mnk}}dz+R=\varkappa_n\varkappa_m\varkappa_k\overline{\varkappa_N}+R,$$

где

$$|R|\leq 2\int_{+1/q\tau}^{+0,5}|M(z)|^3dz.$$

$$|R|\ll\int_{+1/q\tau}^{+0,5}\frac{dz}{z^3}\ll q^2\tau^2\ll N^2L^{-2B+2A}.$$

Итак, получаем

$$I(a,q)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}e^{-2\pi i\frac{a}{q}\frac{N}{mnk}}\varkappa+O\left(\frac{1}{\varphi^3(q)}N^3L^{-2B+2A}\right);$$

$$J_1=\varkappa\sum_{q\le Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}\frac{N}{mnk}}+O(N^2L^{-2B+2A});$$

Двойную сумму в последнем равенстве преобразуем, как преобразовали по z. Имеем

$$\sum_{q\le Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}\frac{N}{mnk}}=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}\frac{N}{mnk}}-R_1=\sigma-R_1,$$

где

$$|R_1|<\left|\sum_{q>Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}\frac{N}{mnk}}\right|\le\sum_{q>Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}$$

$$\ll\int_Q^{\infty}\frac{(\log\log u)^2}{u^2}du\ll L^{-A+1}.$$

Следовательно,

$$J_1=\sigma\varkappa_n\varkappa_m\varkappa_k\overline{\varkappa_N}+O(\varkappa_n\varkappa_m\varkappa_k\overline{\varkappa_N}L^{-A+1})+O(N^2L^{-2B+2A}).$$

Наконец,

$$|\varkappa_{ij}| = \left| \int_{-0.5}^{+0.5} M^3(z) e^{-2\pi i z \frac{N}{mnk}} dz \right| \leq \frac{N}{mnk} \int_{-0.5}^{+0.5} |M(z)|^2 dz$$

$$= \frac{N}{mnk} \sum_{3 \leq n \leq N} \frac{1}{log^2 n} \ll N^2 L^{-2}.$$

Таким образом, получили окончательную формулу:

$$J_1 = \sigma \varkappa_n \varkappa_m \varkappa_k \overline{\varkappa_N} + O(N^2 L^{-A-1}) + O(N^2 L^{-2B+2A})$$ ■

Исследуем более подробно величины $\varkappa$ и σ.

Лемма 5.

Имеет место равенство

$$\varkappa = \varkappa\left(\frac{N}{mnk}\right) = \frac{N^2}{2log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{log^4 N}\right).$$

Оценивая каждую $\varkappa$ по лемме 5, мы получим аналитическую оценку для $\varkappa$, учитывая условия задачи для $\gamma(q)$ получим аналогичную оценку.

Лемма 6.

Имеет место равенство

$$\sigma = \sigma(N) = \prod_{p \backslash \frac{N}{mkN}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \times \frac{N}{mkN}} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Доказательство:

$$T(q) = \sum_{\substack{a=-1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

Сумма T(q), является мультипликативной функцией q.

Пусть

$$q = q_1q_2, (q_1, q_2) = 1.$$

Тогда

$$T(q_1q_2) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q_1q_2} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} = \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i\frac{a_2q_1+a_1q_2}{q_1q_2}N} = T(q_1)T(q_2).$$

Отсюда следует мультипликативность $T(q)$ и $\gamma(q)$. Так как

$$|\gamma(q)| \leq \frac{1}{\varphi^2(q)},$$

то

$$\prod_{p\leq X}(1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \cdots) =$$

$$= \sum_{q\leq X}\gamma(q) + O\left(\sum_{q>X}\frac{1}{\varphi^2(q)}\right) = \sum_{q\leq X}\gamma(q) + O\left(\frac{\log\log X}{X}\right).$$

Переходим к пределу $X \to +\infty$ и находим, что

$$\sigma = \prod_{p}(1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \cdots).$$

Из определения $\gamma(p)$ получаем

$$\gamma(p) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)^2}, \text{если } p \backslash N; \\ \dfrac{1}{(p-1)^3}, \text{если } p \times N; \end{cases}$$

$$\gamma(p^r) = 0, \text{если } r \geq 2.$$

Таким образом,

$$\sigma = \prod_{p \backslash \frac{N}{mkN}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \times \frac{N}{mkN}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^3}\right) =$$

$$= \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \backslash \frac{N}{mkN}} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right) \qquad \blacksquare$$

Из доказанных лемм следует основной результат этого пункта.

Теорема 1.

Для J_1 справедлива асимптотическая формула

$$J_1 = J_1(N) = \frac{N^2}{2(log\, N)^3} \sigma + O\left(\frac{N^2}{(log\, N)^4}\right),$$

где

$$\sigma = \sigma(N) = \prod_{p \backslash \frac{N}{mkN}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \times \frac{N}{mkN}} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right). \qquad \blacksquare$$

Замечания:

1. Постоянная в знаке O в данной теореме неэффективна, так как применяли следствие 2 теоремы 6;

2. Далее будет получена асимптотическая формула для J_1 с эффективной постоянной в знаке *O;*

3. При нечетном $\frac{N}{mkN}$ ввиду очевидных неравенств

$$\prod_{p\setminus\frac{N}{mkN}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)>\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{6}{\pi^2},\qquad \prod_{p\times\frac{N}{mkN}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)>2$$

находим

$$\sigma(N)>1.$$

Чтобы получить асимптотическую формулу для *J=J(N),* надо оценить J_2, а для этого нужна оценка $|S(\alpha)|$ при α, принадлежащих множеству E_2.

Теорема 3 (Основная).

Для числа J(N) представлений нечетного N суммою простых трех чисел справедлива следующая асимптотическая формула:

$$J(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

$$\sigma(N)=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\setminus\frac{N}{mkN}}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)>1\,. \quad (1.9)$$

<u>Доказательство:</u>

Из Леммы 1, формул пункта 1.2 и теоремы 1 при *A=15* имеем

$$J(N)=J_1(N)+J_2(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(log\,N)^3}+J_2(N)+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$+J_2(N)=\int_{E_2}S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha.$$

По определению множества E_2 для $\alpha \in E_2$ выполняется равенство

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1,$$
$$|\theta| \le 1, \ \ (\log N)^{15} < q < N(\log N)^{-20};$$

по теореме 2

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-4}, \ \ \alpha \in E_2.$$

Поэтому

$$J_2(N) \ll \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2(\log N)^{-5}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. ■

Теорема 4.

Для числа J(N) представлений нечетного N суммою трех простых чисел с дополнительными коэффициентами m, n, k справедлива следующая асимптотическая формула:

$$J(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right),$$

где

$$\sigma(N) = \prod_p (1 + \frac{1}{(p-1)^3} \prod_{p \backslash \frac{N}{mnk}} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right)$$

и постоянная в знаке O–эффективная. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в процессе подготовки работы был выполнен ряд задач:

– проведен подробный анализ литературы по проблеме Гольдбаха, краткий обзор исследований, связанных с темой работы, изучены основные теоретические положения, необходимые при исследовании данной проблемы;

– в работе была рассмотрена проблема Гольдбаха, согласно которой любое нечётное число, начиная с 7, можно представить в виде суммы трёх простых чисел;

– на основании изученного теоретического материала было получено решение асимптотической формулы для числа решений уравнения

$$N = n\mathrm{p}_1 + m\mathrm{p}_2 + k\mathrm{p}_3$$

при фиксированных натуральных чисел *m, n, k.*

– был изучен круговой метод Харди–Литтлвуда–Рамануджана, на основании которого выделяется предполагаемый главный член асимптотической формулы для величины $J(N)$ при $N\to\infty$.

В ходе работы были рассмотрены линейные тригонометрические суммы с простыми числами и в результате их оценки получена асимптотическая формула с остаточным членом, где постоянная неэффективна.

Далее, эффективная теорема позволила нам улучшить остаточный член асимптотической формулы и решить поставленную задачу в окончательном варианте.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андронов, И.К. Математика действительных и комплексных чисел. – М.: Просвещение, 1998. – 158 с.
2. Бухштаб, А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1994. – 384 с.
3. Вейль, Г. Алгебраическая теория чисел. – М.: Гос. изд. иностр. литературы, 2004. – 226 с.
4. Вейль, А. Основы теории чисел. – М.: Мир, 2000. – 408с.
5. Виноградов, И.М. Основы теории чисел: учебное пособие. – М.: Лань, 2009. – 176 с.
6. Гашков, С.Б. Алгоритм Евклида, цепные дроби, числа Фибоначчи и квадрирование прямоугольников. – Математическое просвещение, 2002. – 115 с.
7. Гельфонд, А.О., Линник Ю.В. Элементарные методы аналитической теории чисел. – М.: Физматгиз, 1998. – 272 с.
8. Грибанов, Б.У. Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. – М.: Просвещение, 2007. – 144 с.
9. Делоне, Б.Н. Петербургская школа теории чисел. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 2010. – 422 с.
10. Дадаян, А.А., Новик И.А. Алгебра и начала анализа. – М.: Просвещение, 1997. – 528 с.
11. Егоров, Д.Ф. Элементы теории чисел. – М.: Наука, 1998. – 358 с.
12. Карацуба, А.Л. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 2003. – 237 с.
13. Колосов, В.А. Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. – М.: Гелиос АРВ, 2001. – 256 с.
14. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 2005. – 560 с.
15. Михелович, Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1996. – 260 с.

16. Нестеренко, Ю.В. Теория чисел. – М.: Наука, 2011. – 236 с.
17. Ожигова, Е.П. Развитие теории чисел в России. – М.: Наука, 1999. – 358 с.
18. Олейник, В. Методы получения простых чисел – текущее состояние и перспективы. – Кишинев: Evrica, 1999. – 126 с.
19. Прахар, К. П. Распределение простых чисел. – М.: Мир, 2003. – 512 с.
20. Стюарт, И. Величайшие математические задачи. – М.: Альпина нон-фикшн, 2016. – 460 с.
21. Титчмарш, Е.К. Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 2013. – 409 с.