В. М. Московкин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИРОДНЫМИ СИСТЕМАМИ

Среди крупных достижений современной науки, получивших наибольшую популярность в научных и инженерных кругах, особое место занимает математическая теория оптимального управления, созданная в конце 50 — начале 60-х годов этого столетия коллективом советских ученых во главе с академиком Л. С. Понтрягиным [3]. Именно в широком использовании этой теории нам видится будущий прогресс в теоретической и прикладной географии и, в частности, в геоморфологии, так как задачи, связанные с охраной и управлением окружающей среды, становятся все более актуальными в связи со все более углубляющимся процессом ее изменения в результате хозяйственной деятельности человека.

Возможность использования этой теории в управлении экзогенными процессами высказывалась нами на XXIV Международном географическом конгрессе. Это потребует определенного уровня формализации, состоящего в построении моделей динамических систем для изучаемых процессов с учетом управляющих факторов. Ввиду того, что при внешнем воздействии, происходящем с постоянной интенсивностью, эволюция геосистем развивается в направлении достижения динамического равновесия благодаря наличию отрицательных обратных связей, целесообразно поставить задачу оптимального быстродействия в смысле перевода геосистемы из начального состояния в состояние динамического равновесия за наикратчайшее время [4]. Такие задачи практически могут быть поставлены, в основном, для быстропротекающих и хорошо поддающихся управлению геоморфологических процессов. В качестве таких процессов могут рассматриваться береговые, русловые и некоторые склоновые процессы.

В настоящее время имеется возможность математически поставить некоторый класс задач оптимального управления для береговой системы: клиф — пляж. Такие задачи актуальны в связи с интенсивным вовлечением прибрежной зоны морей и других водоемов в хозяйственную деятельность человека, следствием чего является нарушение естественно сложившегося литодинамического равновесия в ней.

В основу модели целесообразно положить уравнение баланса материала в основании клифа. Такие уравнения, мало отличающиеся друг от друга, были предложены в работах [1 и др.]. Для анализа процесса разрушения морских берегов (абразии) при отсутствии вдольберегового потока наносов рассмотрим уравнение (1) баланса пляжеобразующего материала в виде

$$\frac{dW}{dt}=af(W)H-KW, \qquad (1)$$

где W — объем материала на пляже на единицу его длины, м³/м; $f(W)$ — скорость отступания клифа, как функция объема материала, м/год; H — высота клифа, м; a — доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег; K — коэффициент истираемости материала (наносов), 1/год; t — время, год.

Вводя в правую часть уравнения (1) аддитивно некоторый управляющий фактор $(\xi(t))$, можно поставить задачу о переводе системы клиф—пляж в динамическое равновесие (стационарное состояние) за наикратчайшее время. В данном случае этот фактор в зависимости от своего знака представляет собой интенсивность искусственной отсыпки материала на пляж или его изъятия оттуда.

Продифференцировав уравнение (1) во времени с учетом управляющего фактора $\xi(t)$, придем к системе уравнений (динамической системе второго порядка)

$$\frac{dV}{dt}=a\frac{df}{dW}VH-KV+U(t), \qquad (2)$$

$$\frac{dW}{dt}=V,$$

где $U(t)$ — новый управляющий фактор, связанный со старым зависимостью $U(t)=d\xi/dt\,|U|\leqslant\beta$ — некоторая положительная постоянная с размерностью м²/год² (условие ограниченности управляющего фактора следует из технических соображений).

Ставится задача оптимального быстродействия: перевести динамическую систему (2) из начального состояния (W_0, V_0) в точку $(W_{ст}, 0)$ за наименьшее время, где $W_{ст}$ — стационарная точка уравнения (1), находящаяся из решения уравнения $af(W)H-kW=0$.

В качестве функции $f(W)$ предложен ряд нелинейных зависимостей легкоразрушаемых и прочных пород [1]. Ниже рассмотрим случай линейной функции [2, 4]:

$$f(W)=\gamma(W_{max}-W), \qquad (3)$$

где γ — некоторый коэффициент, (м·год)⁻¹; W_{max} — максимальный объем материала на пляже, при котором абразия исчезает, или некоторое другое значение W, необходимое для линейной аппроксимации участка нелинейной функции $f(W)$.

Для приведения поставленной задачи оптимального управления к классической сделаем замену переменных в системе уравнений (2): $W'=(W-W_{\text{ст}})/\beta$, $V'=V/\beta$, $U'=U/\beta$, тогда она с учетом выражения (3) $\left(\frac{df}{dW}=-\gamma\right)$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV'}{dt} &= -AV'+U', \\ \frac{dW'}{dt} &= V', \quad |U'|\leqslant 1, \end{aligned} \tag{4}$$

где $A=aH\gamma+k$.

Задача в новых переменных формулируется теперь как перевод динамической системы (4) из точки $((W_0-W_{\text{ст}}/\beta, V_0/\beta)$ в точку (0, 0), которая является началом координат фазовой плоскости (W', V').

Согласно общей теории оптимального управления для линейных систем (принцип максимума Понтрягина) показано, что существует единственный синтез оптимальных управлений, который строится на основе решения системы уравнений (4) при $U'=1$ и $U'=-1$, причем U' имеет не более двух интервалов постоянства. Под синтезом оптимальных управлений понимается траектория точки на фазовой плоскости, идущей из заданного состояния в начало координат, движение по которой осуществляется за наименьшее время.

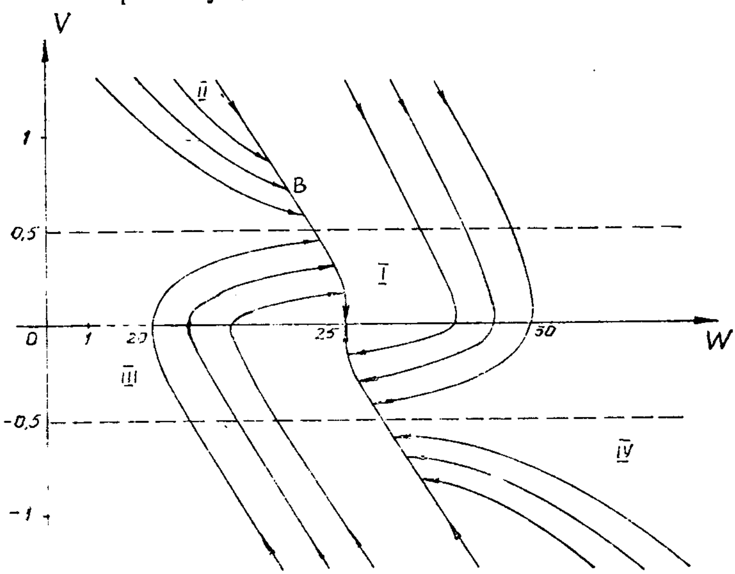

Рис. 1. Полный расчетный синтез оптимальных управлений

На рис. 1 приведен полный синтез оптимальных управлений при $A=0{,}2$ год$^{-1}$ ($k=0{,}1$ год$^{-1}$, $a=0{,}3$, $H=100$ м, $\gamma=1/300$ (м·год)$^{-1}$, $W_{max}=50$ м^2, $W_{ст}=25$ м^2, $\beta=0{,}1$ м^2/год^2 в первоначальных переменных W, V. Параметры k, a, H соответствуют условиям Новороссийского геологического района [1]. Этот синтез достаточно чувствителен к изменению комплексного параметра A и является симметричным относительно стационарной точки ($W_{ст}$, 0).

В практических целях в рассматриваемой линейной постановке задачи V_0 должна выбираться в зависимости от W_0 по уравнению (1). С учетом функции (3) получим

$$V_0=A(W_{ст}-W_0). \tag{5}$$

Ниже приведем только окончательные расчетные выражения для области II ($V>\frac{\beta}{A}$, (см. рис. 1); (эти выражения для других областей имеют сходный вид) с учетом выражения (5):

1. Уравнение траектории точки, движущейся из начального состояния (W_0, V_0) в точку переключения B (см. рис. 1), являющееся решением динамической системы (4) при $U'=1$, имеет вид:

$$W=\frac{\beta}{A^2}\ln\left[\frac{A^2(W_{ст}-W_0)-\beta}{AV-\beta}\right]-\frac{V}{A}+W_{ст}, \tag{6}$$

где $V\neq\frac{\beta}{A}$ $W_{ст}=\left(\frac{A-k}{A}\right)W_{max}$.

2. Уравнение траектории точки, движущейся из точки переключения в конечное (стационарное) состояние (уравнении линии переключения), являющееся решением динамической системы (4) при $U'=-1$, имеет вид

$$W=\frac{\beta}{A^2}\ln\left(1+\frac{AV}{\beta}\right)-\frac{V}{A}+W_{ст}, \tag{7}$$

где $V\neq-\frac{\beta}{A}$.

3. Координаты точки переключения $B(W_в, V_в)$:

$$V_в=\sqrt{\beta(W_{ст}-W_0)}; \tag{8}$$

$W_в$— находится из уравнения (7) при подстановке в него выражения (8).

4. Оптимальное (минимальное) время перехода из начального состояния в конечное:

$$T=\frac{2}{A}\ln\left(1+A\sqrt{\frac{W_{ст}-W_0}{\beta}}\right) \tag{9}$$

при этом время перехода из начальной точки в точку переключения равняется времени перехода из точки переключения в конечную точку.

Выражения (7—9) для области III не изменяются. Показано, что асимптоты $V=\pm\frac{\beta}{A}$ являются фазовыми траекториями полного синтеза оптимальных управлений, то есть исследуемая динамическая система управляема во всем прямоугольнике $0<W<W_{max}$, $|V|<\text{const}$ фазовой плоскости (W, V). Оптимальное время T для случая, когда начальная точка лежит на прямой $V=-\frac{\beta}{A}$, равняется:

$$T=\frac{1}{A}(2\ln 2-1)+A(W_0-W_{ст})/\beta. \qquad (10)$$

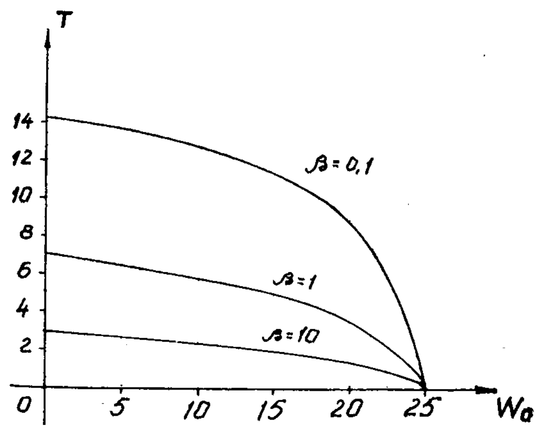

Рис. 2. Зависимости оптимального времени T от β и W_0

По формуле (9) проведены расчеты при разных $W_0\leqslant W_{ст}=25$ м^2, $A=0,2$ год$^{-1}$ и трех значениях управляющего фактора $\beta=0,1$; 1; 10 м^2/год^2 (рис. 2). Наиболее эффективная область управлений имеет место при изменении параметра β от 1 до 10. В этом случае время T не превышает 7 лет.

Физический смысл первоначального параметра $\xi(t)$ состоит в том, что для вышерассмотренного случая при $W_0<W_{ст}$ с учетом выражения (5) в реальной береговой системе необходимо производить ускоренную искусственную отсыпку материала в течение времени $T/2$, а затем замедленную отсыпку в течение такого же промежутка времени с ин-

тенсивностями: $\xi(t)=\beta t$, $0\leqslant t\leqslant \frac{T}{2}$ $\xi(t)=\beta(T-t)$, $T/2< <t\leqslant T$.

Можно предложить другой вариант перевода системы в состояние $W_{ст}$, но с ненулевой скоростью изменения объема материала $\left(\frac{dW}{dt}\neq 0\right)$. Для этого вводим в уравнение (1) с учетом функции (3) максимально возможную скорость отсыпки материала (δ, м²/год) при $W_0<W_{ст}$ и, решая его, находим время, соответствующее $W=W_{ст}$:

$$T_\delta=\frac{1}{A}\ln\left[1+\frac{A}{\delta}(W_{ст}-W_0)\right]. \qquad (11)$$

После этого ($t>T_\delta$) отсыпка материала прекращается ($\delta=0$) и система будет находиться в стационарном состоянии, при этом произойдет переход ненулевой скорости $\frac{dW}{dt}$ в нулевую. Найдем критическое значение δ как функцию от β, при котором $T=T_\delta$:

$$\delta_{кр.}=\frac{\beta\sqrt{W_{ст}-W_0}}{2\sqrt{\beta+A\sqrt{W_{ст}-W_0}}}. \qquad (12)$$

Например, при $\beta=1$ м²/год², $W_0=0$, $W_{ст}=25$ м², $A=0{,}2$ год$^{-1}$, $T=6{,}93$ лет (см. формулу (9), рис. 2), получим $\delta=5/3$ м²/год. Итак, по первому оптимальному варианту ($T\approx 7$ лет) отсыпку по годам следует проводить следующим образом: 1; 2; 3; 3,5; 3; 2; 1 (м²/год). Общий объем отсыпки составит 15,5 м². По второму варианту общий объем отсыпки равен 5/3 м²/год·7 лет=11,7 м², что меньше, чем в первом случае и, следовательно, второй вариант является более экономичным. Таким образом, для выбора наиболее рационального варианта по переводу береговой системы в стационарное состояние за минимальное время следует произвести расчеты времени по двум вариантам (см. 9, 11) и выбрать наиболее приемлемый вариант из практических соображений. Если второй вариант окажется лучшим, то следует найти второе оптимальное приближение (3-й вариант) следующим образом: определить из второго варианта величину $V_к=dW/dt$ в конечный момент времени T и решить задачу оптимального быстродействия по переводу системы из начального состояния (W_0, V_0) в состояние ($W_{ст}$, $V_к$). Этот вариант и окажется наиболее рациональным. Если первый вариант окажется лучше второго, то он также может быть улучшен с помощью второго оптимального приближения. На этом может быть основана новая научная (оптимальная) стратегия берегозащиты.

Важно отметить, что рассмотренная задача оптимального быстродействия эквивалентна задаче оптимального управления с минимизацией функционала $\int_0^T f(W)dt$, так как функция $S(t)=\int_0^t f(W)dt$, $S(0)=0$ является монотонно-возрастающей (расстояние, на которое отступает клиф $S(t)$, может только увеличиваться во времени), а последняя задача прямо связана с защитой берегов от абразии.

Рассмотренный в статье подход может быть использован при хозяйственном освоении прибрежной зоны в случае, когда берегоукрепительные работы планируется вести с помощью формирования пляжного материала без укрепления берегов (клифов) подпорными стенами и т. д. В противном случае модель неприменима, так как из реальной береговой системы автоматически исключается важная отрицательная обратная связь (регулирующее влияние обломочного материала на скорость абразии). Таким образом, данный подход приемлем в случае управления нарушенными естественными (природными) системами, когда это управление сводится к подстройке системы к режиму динамического равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Есин Н. В. О роли обломочного материала в абразивном процессе.— Океанология, 1980, т. 20, № 1.

2. Московкин В. М. Модели взаимодействия в геоморфологии склонов.— Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. геогр. наук. М., 1982.

3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.

4. Трофимов А. М., Московкин В. М. Математическое моделирование в геоморфологии склонов. Казань, 1983.