УКРАИНСКИЙ
НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

2000, т. 3, №3

Издается с 1998 г.
Выходит 6 раз в год

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ:
Международный
Славянский
университет
(г. Харьков)
Рег. свидетельство
серии КВ №3766 от 06.04.99

Номер утвержден на заседании Ученого Совета МСУ протокол №5 от 16.03.2000 г.

Зарегистрирован Парижским отделением Международного центра по регистрации периодических изданий 10.11.99 г. ключевое название: Vestnik Mezdunarodnogo Slavanskogo Universiteta

Журнал входит в перечень 5 научных специальных изданий, в которых могут быть опубликованы результаты диссертационных работ в области технических наук (постановление Президиума ВАК Украины от 10.05.2000 г. № 1-02/5)

ВЕСТНИК МЕЖДУНАРОДНОГО СЛАВЯНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА (Г. ХАРЬКОВ)

СЕРИЯ «ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ»

Содержание

И.М. Приходько, А.Л. Коновалов Использование импульсных лазеров для исследований двухфазных течений в соплах РДТТ.............3
В.Ф. Черныш Применение низкоэнергетического лазерного излучения в ветеринарии.............5
Н.Х. Раковская-Башмакова Информационные технологии и проблема 2000 года.............7
В.Д. Бабишин Методика многокритериального выбора технологического цикла управления космическим аппаратом.............9
Б.И. Макаренко Методика планирования сеансов измерения текущих навигационных параметров космического аппарата.............11
В.А. Слободяник Квалиметрия кранов мостового типа и проблема определения сверхнормативного срока службы.............14
А.В. Гомозов Кабельный радиолокатор предупреждения остолкновении с надводнымиобъектами в ближней передней зоне.............19
Х.В. Раковский Методика выбора технологического цикла управления космическими аппаратами.............22
В.И. Гомозов Основные положения динамической теории угловой модуляции и автоподстройки колебаний.............26
В.И. Антюфеев, В.Н. Черепнев Решение задачи определения потенциальной точности местоопределения матричных систем землеобзора.............34
А.В. Гомозов, В.И. Гомозов Новый метод фокусировки электромагнитных излучений.............38
В.П. Титарь, Т.В. Богданова, М.Т. Торкатюк Голографическая модель иллюзий зрения.............40
Л.Н. Ивин, Ф.А. Домнин Коммерческий инжиниринг? Коммерческий инжиниринг в Украине!.............45
В.М. Московкин, М.Б. Мануйлов, Ю.Д. Мендыгулов К решению линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с периодическими коэфициентами.............50
Ю.П. Вирченко Проблема описания фрактальных случайных полей.............52

К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Доктор географических наук В. М. Московкин,
кандидат технических наук М. Б. Мануйлов,
Харьковский государственный политехнический университет
Ю. Д. Мендыгулов

В различных приложениях приходится рассматривать линейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с периодическими коэффициентами следующего вида:

$$\frac{dc}{dt} = q_0 + q_1 cos(\omega_1 t) - (p_0 + p_1 cos(\omega_2 t))C,$$
$$C\big|_{q_0=q_1=0} = 0, \quad q_0, q_1, p_0, p_1, \omega_0, \omega_2 = const > 0 \qquad (1)$$

Уравнение (1), например, описывает динамику концентрации примесей в окрестности морского мидиевого биофильтра с переменным коэффициентом биофильтрации (для мидий характерен суточный цикл фильтрации) при переменном поступлении примесей при сборе сточных вод [1], причем $q_0 = C_0 Q_0 / V$; $q_1 = C_0 Q_1 / V$; C_0, Q_0 — средние концентрация и расход сточных вод, V — рассматриваемый объем в окрестности биофильтра в котором определяется концентрация $C(t)$.

Ниже предлагается один аналитический метод решения этого уравнения.

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{dc}{dt} = q_0 + \frac{q_1}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{q_1}{2} e^{-i\omega_1 t} - \left[p_0 + \frac{p_1}{2} e^{i\omega_2 t} + \frac{p_1}{2} e^{-i\omega_2 t}\right] C \qquad (2)$$

Представив решение уравнения (2) в виде интеграла Фурье

$$C(t) = \frac{1}{2\pi} \int \chi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

и подставив его в уравнение (2), получим

$$\frac{i}{2\pi} \int \omega \chi(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{q_1}{2} \int \delta(\omega - \omega_1) e^{i\omega t} d\omega +$$
$$\frac{q_1}{2} \int \delta(\omega + \omega_1) e^{i\omega t} d\omega + q_0 \int \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega -$$
$$- \frac{1}{2\pi} \int \chi(\omega) d\omega \left[p_0 e^{i\omega t} + \frac{p_1}{2} e^{i(\omega+\omega_2)t} + \frac{p_1}{2} e^{i(\omega-\omega_2)t}\right], \qquad (3)$$

что дает функциональное уравнение для $\chi(\omega)$:

$$i\omega\chi(\omega) = \pi q_1 \delta(\omega - \omega_1) + \pi q_1 \delta(\omega + \omega_1) +$$
$$+ 2\pi q_0 \delta(\omega) - p_0 \chi(\omega) + \frac{p_1}{2} \chi(\omega - \omega_2) +$$
$$+ \frac{p_1}{2} \chi(\omega + \omega_2), \qquad (4)$$

где $\delta(...)$ — дельта-функция.

Из уравнения (4) следует линейное неоднородное дифференциальное уравнение для $\chi(\omega)$

$$\left\{-\frac{p_1}{2}\left[e^{\omega_2 \frac{d}{d\omega}} + e^{-\omega_2 \frac{d}{d\omega}}\right] + p_0 + i\omega\right\}\chi(\omega) =$$
$$2\pi q_0 \delta(\omega) + \pi q_1 [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)] \qquad (5)$$

При выводе уравнения (5) мы воспользовались известным тождеством $e^{a \frac{d}{dx}} \cdot f(x) = f(x + a)$ [2].

Формальное решение уравнения (5) имеет вид:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{p_0 + i\omega - \frac{p_1}{2}\left[e^{w_2 \frac{d}{d\omega}} + e^{w_2 \frac{d}{d\omega}}\right]} \times$$
$$\times \{2\pi q_0 \delta(\omega) + \pi q_1 [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]\} \qquad (6)$$

Используя известную формулу для операторов А и В [3]:

$$\frac{1}{A+B} = (A+B)^{-1} = [A(1 + A^{-1}B)]^{-1} = (1 + A^{-1}B)^{-1} =$$
$$\frac{1}{1 + \frac{1}{A}B} \cdot \frac{1}{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{A}B\right)^n \frac{1}{A}$$

будем иметь

$$\chi(\omega) = \frac{1}{1 + (-1)\frac{p_1}{2(p_0 + i\omega)}\left[e^{\omega_2 \frac{d}{d\omega}} + e^{-\omega_2 \frac{d}{d\omega}}\right]} \times$$
$$\times \left\{\frac{2\pi q_0}{P_0 + i\omega} \delta(\omega) + \frac{\pi q_1}{P_0 + i\omega} [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]\right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_1^n}{2^n (p_0 + i\omega)^n} \left[e^{\omega_2 \frac{d}{d\omega}} + e^{-\omega_2 \frac{d}{d\omega}}\right]^n \times$$
$$\times \left\{\frac{2\pi q_0}{P_0 + i\omega} \delta(\omega) + \frac{\pi q_1}{P_0 + i\omega} [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]\right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_1^n}{2^n (p_0 + i\omega)^n} \left\{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{2\pi q_0 \delta(\omega + (n - 2k)\omega_2)}{p_0} +\right.$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\pi q_1}{p_0 + i(\omega + (n - 2k)\omega_2)} + [\delta(\omega + \omega_1 + (n - 2k)\omega_2)$$
$$\left. + \delta(\omega - \omega_1 + (n - 2k)\omega_2)]\right\}$$

Подставляя выражение (7) в интеграл Фурье для $C(t)$ получим

$$C(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{p_1^n C_n^k q_0 e^{i(n-2k)\omega_2 t}}{2^n\left(p_0+i(2k-n)\omega_2\right)^n p_0}+\right.$$
$$+\frac{C_n^k q_1 p_1^n e^{-\omega_1 t}e^{i(n-2k)\omega_2 t}}{2^{n+1}\left(p_0-i\omega_1\right)\left(p_0-i\omega_1+i(2k-n)\omega_2\right)^n}+ \qquad (8)$$
$$\left.+\frac{C_n^k q_1 p_1^n e^{-\omega_1 t}e^{i(n-2k)\omega_2 t}}{2^{n+1}\left(p_0-i\omega_1\right)\left(p_0-i\omega_1+i(2k-n)\omega_2\right)^n}\right]$$

Выделяя из выражения (8) действительную часть, получим

$$\operatorname{Re}C(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{p_1^n C_n^k q_0\cos\left[(n-2k)\omega_2 t-n\varphi\right]}{2^n\left(p_0+(2k-n)^2\omega_2^2\right)^{n/2}p_0}+\right.$$
$$+\frac{C_n^k q_1 p_1^n\cos\left[\left((n-2k)\omega_2-\omega_1\right)t-n\varphi_1\right]}{2^{n+1}\left(p_0^2-\omega_1^2\right)^{1/2}\left(p_0^2+\left((2k-n)\omega_2-\omega_1\right)^2\right)^{n/2}}+ \qquad (9)$$
$$\left.+\frac{C_n^k q_1 p_1^n\cos\left[\left((n-2k)\omega_2-\omega_1\right)t-n\varphi_2\right]}{2^{n+1}\left(p_0^2-\omega_1^2\right)^{1/2}\left(p_0^2+\left((2k-n)\omega_2-\omega_1\right)^2\right)^{n/2}}\right],$$

где

$$\varphi=\arg\left(p_0+i(2k-n)\omega_2\right),$$
$$\varphi_1=\arg\left(p_0-i\omega_1\right)+\arg\left(p_0-i\omega_1+i(2k-n)\omega_2\right),$$
$$\varphi_2=\arg\left(p_0+i\omega_1\right)+\arg\left(p_0+i\omega_1+i(2k-n)\omega_2\right).$$

Полное решение уравнения (1) состоит из частного решения уравнения с нулевым свободным членом. Последнее решение естественно не зависит от q_0 и q_1. Следовательно, решения (9) есть решение задачи (1) с условием $C|_{q_0=q_1}=0$.

Решение (9) состоит из двух частей: первая — пропорциональна постоянной составляющей расхода примесей при сбросе сточных вод, вторая — пропорциональна переменной составляющей этого расхода.

В случае $q_1=0$ мерой работы биофильтра может служить величина $\frac{\|\operatorname{Re}C(t)\|}{C_{ПДК}}$, где $\|\ldots\|=\sup_{t[0,\infty]}|\ldots|$, $C_{ПДК}$ — предельно-допустимая концентрация загрязняющих веществ.

Тогда

$$\frac{\|\operatorname{Re}C(t)\|}{C_{ПДК}}\le\frac{C_0Q_0}{C_{ПДК}VP_0}\times$$
$$\times\sum_{n}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_1^n C_n^k}{2^n\left(p_0^2+(2k-n)^2\omega_2^2\right)^{n/2}}\le$$
$$\le\frac{C_0Q_0}{C_{ПДК}VP_0}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{p_1}{2p_0}\right)^{2p}2p+ \qquad (10)$$
$$+\frac{C_0Q_0}{C_{ПДК}VP_0}\sum_{n=2p+1}^{\infty}\left(\frac{p_1^n(2p+1)}{2^n\left(p_0^2+\omega_2^2\right)^{n/2}}\right)^{2p}2p$$

Необходимым условием сходимости этих сумм является

$$b_1=\frac{p_1}{2p_0}<1,\quad b_2=\frac{p_1}{2\sqrt{p_0^2+\omega_2^2}}<1$$

По признаку Даламбера ряды сходятся [4]:

$$\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{b_i(n+1)}{n}=b_i\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_i<1$$

Очевидно $\frac{\|\operatorname{Re}C(t)\|}{C_{ПДК}}$ тем меньше, чем меньше $\frac{p_1}{2p_0}$ и чем больше p_0 и ω_2.

Пусть [4] $b_i\left(1+\frac{1}{N}\right)=S^{(n-N)}<1$, $n-p=N$, тогда $a_n=Sa_{n-1}=S^2a_{n-2}=S^{(n-N)}a_N$,

$$\sum_{n=+}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{N-1}a_n+a_N\sum_{p=0}^{\infty}S^p=\sum_{n=0}^{N-1}a_n+\frac{a_N}{1-S}.$$

$$\frac{\|\operatorname{Re}C(t)\|}{C_{ПДК}}\le\frac{C_0Q_0}{C_{ПДК}VP_0}\times$$
$$\times\left[\sum_{p=0}^{N-1}\left(\frac{p_1}{2p_0}\right)^{2p}2p+\frac{p_1^{2N}2N}{(2p_0)^{2N}\left(1-\frac{p_1}{2p_0}\left(1+\frac{1}{N}\right)\right)}\right]+$$
$$+\frac{C_0Q_0}{C_{ПДК}VP_0}\left[\sum_{p=0}^{N-1}\left(\frac{p_1}{2\left(p_0^2+\omega_2^2\right)^{1/2}}\right)^{2p+1}(2p+1)+\right.$$
$$\left.+\frac{p_1^{2N+1}(2N+1)}{\left[2\left(p_0^2+\omega_2^2\right)^{1/2}\right]^{2N+1}\left[1-\frac{p_1\left(1+\frac{1}{N}\right)}{2\left(p_0^2+\omega_2^2\right)^{1/2}}\right]}\right]$$

Формула (11) позволяет оценить $\frac{\|\operatorname{Re}C(t)\|}{C_{ПДК}}$ по данным C_0, $C_{ПДК}$, Q_0, V, P_0, P_1, ω_2 в случае $q_1=0$.

В случае $q_0=Q_0=0$ и $q_1=\frac{C_0Q_1}{V}\neq0$ (переменная составляющая твердого расхода сточных вод деленная на рассматриваемый объем V) имеем:

$$\frac{\|\operatorname{Re}\hat{C}(t)\|}{C_{ПДК}}\le\frac{Q_1C_0}{V\left(p_0^2+\omega_1^2\right)^{1/2}C_{ПДК}}\times$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p_1^n n}{2^{n+1}\left(p_0^2+\left(\left[2f\left(\frac{\omega_1}{2\omega_2}+\frac{n}{2}\right)-n\right]\omega_2-\omega_1\right)^2\right)^{n/2}}+\right. \qquad (12)$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p_1^n n}{2^{n-1}\left(p_0^2+\left(\left[2f\left(\frac{n}{2}-\frac{\omega_1}{2\omega_2}\right)-n\right]\omega_2-\omega_1\right)^2\right)^{n/2}}\right\},$$

где $f(x)$ — целая часть числа x.

Формула (12) дает оценку работы биофильтра при фильтрации переменной компоненты ($q_0=0$, $q_1\neq0$), из нее видно, что качество фильтрации тем выше, чем больше величина $p_0^2 + \omega_1^2$ и чем меньше p_1. Аналогичные оценки могут быть получены при q_0, $q_1 \neq 0$.

Отметим, что стандартный подход к решению уравнения (1) с использование формулы Коши приводит к очень громоздкому и трудно интерпретируемому решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Московкин В.М.* Управление качество воды прибрежной зоны моря при интенсивной антропогенной нагрузке. — Водные ресурсы, 1998, №4, С. 95—103.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1989, 767 с.
3. *Галицкий В.М., Корнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. — М.: Наука, 1981, 648 с.
4. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Мир, 1971, 679 с.

ПРОБЛЕМА ОПИСАНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Кандидат физико-математических наук Ю. П. Вирченко
Научно-исследовательский институт монокристаллов

Теория фрактальных структур в современном состоянии довольно сильно отличается от других разделов теоретической физики, в которых наработан большой опыт конструирования математических моделей. Большинство из основной массы теоретических работ, в которых исследуются физические фрактальные структуры, выполнено на уровне оценок и качественных рассуждений. Это указывает на необходимость развития эффективного математического аппарата теории, который бы позволял ставить и решать конкретные физические задачи, связанные с фрактальными структурами. Исследования в этом направлении приводят к фундаментальным вопросам теории фракталов, которые настоятельно требуют своего решения для ец развития.

Фракталами с физической точки зрения называются такие структуры, которые ведут себя самоподобным образом при изменении масштабов в широком диапазоне их изменения. Причцм, так как объектом теории являются стохастические физические явления, то самоподобие должно пониматься в статистическом смысле (см., например, [1]). Поэтому с математической точки зрения фракталы должны описываться случайными полями, которые обладают инвариантностью при изменении масштабов (точную формулировку см. ниже). Утверждение о самоподобии случайного поля, хотя и является жцстким требованием к возможной вероятностной модели описываемого физического явления, но оно вец же имеет довольно общий характер и недостаточно для построения адекватной вероятностно феноменологической модели изучаемого явления и получения на ец основе количественных результатов. Из-за отсутствия же руководящих физических принципов для построения моделей такого типа остацтся единственный путь — математически исследовать все совместимые с принципом самоподобия возможности. Поэтому возникает задача о классификации возможных математических моделей стохастических фракталов.

В этой работе мы будем изучать частный тип самоподобных стохастических структур — самоподобные сепарабельные поля. Будет показано как для таких структур исследование сформулированной выше глобальной задачи сводится к более традиционной для теории случайных процессов задаче изучения стационарных процессов.

2. Самоподобные случайные поля.

Случайные самоподобные поля, т.е. случайные функции $a(x)$, зависящие от пространственных точек x и обладающие специальными трансформационными свойствами при преобразовании подобия пространства, описывают фрактальные распределения физических величин в пространстве. Математическое понятие случайного поля приобретает прикладную ценность только в том случае, когда его случайные реализации хотя бы в какой-то слабой степени обладают свойством непрерывности. Таким свойством, которое мы будем предполагать далее выполненным, является сепарабельность [2]. Без предположения о сепарабельности случайных полей бессмысленно ставить в общем виде принципиальные вопросы теории случайных фракталов, описываемых этими полями. Например, без свойства сепарабельности поля $a(x)$ в общем случае нельзя придать смысла вероятности того, что это поле не превосходит некоторого фиксированного значения o, изменяясь в некоторой области, и, в связи с этим, нельзя также придать смысла фрактальной размерности реализациям этого поля.

Для сепарабельного случайного скалярного поля $a(x)$, $x \in$ R распределение вероятностей можно задавать, согласно теореме Колмогорова [3], посредством набора конечномерных многоточечных распределений для произвольной конечной совокупности пространственных точек. Эти многоточечные распределения должны удовлетворять естественным требованиям согласованности. В случае, когда все многоточечные распределения f_n имеют плотности

$$f_n(a_1, x_1; a_2, x_2; \ldots; a_n, x_n) =$$