МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 год, том 28, номер 12, стр. 3-19

# УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ В КОНФИГУРАЦИИ УПРУГОЕ ТЕЛО – ПОРОУПРУГАЯ СРЕДА

 *А.М. Мейрманов, А.А. Герус, С.А. Гриценко*

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия
anvarbek@list.ru, artur_gerus@mail.ru, sv.a.gritsenko@gmail.com

Рассматриваются процессы изотермической акустики в композитной среде с двумя различными компонентами: упругое тело и пороупругая среда с заполненным слабосжимаемой жидкостью поровым пространством. Исследуется разрешимость начально-краевой задачи и выводятся усредненные модели для различных случаев.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

**HOMOGENISATION OF THE ISOTHERMAL ACOUSTICS MODELS IN THE CONFIGURATION ELASTIC BODY – POROUS-ELASTIC MEDIUM**

*A.M. Meirmanov, A.A. Gerus, S.A. Gritsenko*

BelSU, Russia

We consider isothermal acoustics in composite medium with two different components. Composite medium is consist from some elastic body and porous-elastic medium. Porous-elastic medium is filled with a fluid. Unique existence of the generalized solution of boundary-value problem is proved. Homogenized models are derived in various cases.

Key words: composite medium, periodic structure, Lame's equations, acoustics equations, porous-elastic, homogenization of periodic structures, two-scale convergence.

## 1. Введение и постановка задачи

В широком круге областей техники и естествознания возникают задачи, связанные с исследованием физических процессов, происходящих в неоднородных средах. В частности, это процессы распространения волн в композитных материалах, распространение возмущений в естественных подземных грунтах и т.д. Модели неоднородных сред обычно представляют собой смесь двух или более фаз с различными механическими свойствами. Как правило, процессы в естественных неоднородных средах или композитных материалах описываются дифференциальными уравнениями с быстро осциллирующими коэффициентами. Эти быстро осциллирующие коэффициенты делают практически невозможной численную реализацию модели. Отсюда возникает задача вывести усредненные уравнения, то есть уравнения, не содержащие быстро осциллирующих коэффициентов.

Для построения усредненных моделей часто используется предположение о периодичности структуры включений материала одной фазы в другую. Такое предположение упрощает задачу о построении усредненных моделей. Под усредненными моделями понимаются такие краевые задачи для уравнений или систем с постоянными или относительно медленно меняющимися характеристиками, что решения краевых задач для исходных моделей сходятся (в некотором смысле) к решению соответствующих уравнений для усредненной модели, когда период рассматриваемой периодической структуры стремится к нулю. Задачам, связанным с построением усредненных характеристик сильно неоднородных сред, посвящено большое количество работ российских и зарубежных авторов (например, [1–5]).

В данной статье исследуется математическая модель акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей $S^0$. Одна из компонент представляет собой упругое тело $\Omega^{(s)}$, другая – пороупругую среду $\Omega$, состоящую из твердого скелета $\Omega_s$ и порового пространства $\Omega_f$, заполненного слабосжимаемой жидкостью. Упругие свойства твердого материала в $\Omega^{(s)}$ и $\Omega$ могут различаться. Дифференциальные уравнения точной модели, описывающие движение упругого тела и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, базируются на классических законах механики сплошной среды. Сформулированная ниже начально-краевая задача с большой степенью точности представляет физический процесс на микроскопическом уровне. Но математическая модель физического объекта, размер которого, как правило, измеряется сотнями метров, содержит коэффициенты, осциллирующие на масштабе в несколько микрон (характерный размер пор). Поэтому наша работа посвящена выводу усредненных моделей. После перехода к безразмерным переменным в модели появляется малый параметр $\varepsilon$. Мы полагаем его равным отношению среднего размера пор $l$ к характерному размеру рассматриваемой области $L$. Причем от $\varepsilon$ зависят не только коэффициенты дифференциальных уравнений $\bar{\alpha}_\mu, \bar{\alpha}_\lambda, \bar{\alpha}_{\lambda^0}$, но и геометрия рассматриваемой области. Вывод усредненных уравнений выполняется на основе подхода, предложенного Р. Барриджем, Д. Келлером [6] и Э. Санчес-Паленсия [7]. Применяется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [8–10]. В доказательствах теорем используются результаты А.М. Мейрманова [11–16] и результаты о разрешимости краевых задач из монографии О.А. Ладыженской, В.А Солонникова, Н.Н. Уральцевой [17]. Из той же монографии мы берем и обозначения функциональных пространств. Чтобы воспользоваться теорией усреднения и методом двухмасштабной сходимости, мы должны ввести упрощающие геометрические предположения.

***Предположение* 1.**

1) *Пусть* $\chi(y)$ *– 1-периодическая функция,* $Y_s = \{y \in Y : \chi(y) = 0\}$ *– твердая часть единичного куба* $Y = (0,1)^3 \in R^3$, *и пусть жидкая часть* $Y_f = \{y \in Y : \chi(y) = 1\}$ *есть открытое дополнение твердой части. Пусть* $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ *и* $\gamma$ *есть непрерывная липшицева поверхность.*

2) *Область* $E_f^\varepsilon$ *– периодическое повторение в* $R^3$ *элементарной ячейки* $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$ *и область* $E_s^\varepsilon$ *есть периодическое повторение в* $R^3$ *элементарной ячейки* $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3) *Поровое пространство* $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f^\varepsilon$ *есть периодическое повторение в* $\Omega$ *элементарной ячейки* $\varepsilon Y_f$, *и твердый скелет* $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s^\varepsilon$ *есть периодическое по-*

*вторение в $\Omega$ элементарной ячейки $\varepsilon Y_s$. Липшицева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega_s^\varepsilon$ есть периодическое повторение в $\Omega$ границы $\varepsilon\gamma$.*

4) *$Y_s$ и $Y_f$ связные множества.*

***Предположение* 2.**

*Твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon$ есть связная область.*

***Предположение* 3.**

*Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon$ есть связная область.*

При выполнении предположения 1 $\chi^\varepsilon(x)=\zeta(x)\chi\left(x/\varepsilon\right)$, где $\zeta(x)$ – характеристическая функция области $\Omega$ в $Q$, $\chi^\varepsilon(x)$ – характеристическая функция порового пространства $\Omega_f$ в $\Omega$.

Рассматриваемая ограниченная область $Q\in R^3$ представляет собой единичный куб $Q=(0,1)\times(0,1)\times(0,1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega=(0,1)\times(0,1)\times(0,a)$, $0<a<1$, а область $\Omega^{(s)}$ (упругое тело) есть открытое дополнение области $\Omega$: $Q=$ $=(0,1)\times(0,1)\times(0,1)$, $S^{(0)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(s)}$.

Движение смеси в области $\Omega$ при $t>0$ описывается системой уравнений

$$\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^{2}} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^{2}}\right) p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{1}$$

$$\left(\rho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s\right)\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\mathbf{P} + \rho^\varepsilon\mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\mathbf{P} = \chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\mathbf{D}\left(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\right) + \left(1-\chi^\varepsilon\right)\bar{\alpha}_\lambda\mathbf{D}\left(x,\mathbf{w}\right) - p\mathbf{I}. \tag{3}$$

Движение упругого тела $\Omega^{(s)}$ при $t>0$ описывается уравнениями Ламе

$$\frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2} p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{4}$$

$$\rho_s^{(0)}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\mathbf{P}^{(s)} + \rho_s^{(0)}\mathbf{F}, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}^{(s)} = \bar{\alpha}_\lambda^{(0)}\mathbf{D}\left(x,\mathbf{w}\right) - p\mathbf{I}, \tag{6}$$

где $\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) = 0.5(\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^*)$ есть симметрическая часть тензора $\nabla\mathbf{w}$. В уравнениях модели $\mathbf{w}$ (перемещение) и $p$ (давление) – неизвестные функции, все остальные функции являются заданными. Параметры $\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}$ и $\bar{c}_s^{(0)}$ – безразмерные постоянные Ламе для упругого тела в области $\Omega^s$, $\overline{c}_s$ и $\overline{c}_f$ – скорость звука в твердой и жидкой части соответственно, $\mathbf{P}^{(s)}$ – тензор напряжений в упругом теле, $\rho_s^{(0)}$ – безразмерная плотность упругого тела, $\rho^\varepsilon = \rho_f \chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s$, $\rho_f$ и $\rho_s$ соответственно означают безразмерные плотности твердого скелета и жидкости в порах, соотнесенные со средней плотностью воды $\rho^0$, $\mu$ – динамическая вязкость жидкости, $g$ – ускорение силы тяжести, $\mathbf{F}$ – заданный вектор распределенных массовых сил.

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности перемещений:

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \mathbf{w}(x,t) \tag{7}$$

и нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{P}^{(s)}(x,t)\cdot \mathbf{n}(x^0) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \mathbf{P}\ (x,t)\cdot \mathbf{n}(x^0). \tag{8}$$

Замыкают задачу однородные граничные условия

$$\mathbf{w}(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in S_T = S\times(0,T) \tag{9}$$

на границе $S = \partial Q$, и однородные начальные условия

$$\mathbf{w}(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad x\in Q. \tag{10}$$

Мы предполагаем, что существуют (конечные или бесконечные) пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\alpha}_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\alpha}_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\alpha}_\lambda^{(0)}(\varepsilon) = \lambda_0^{(0)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\overline{\alpha}_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\overline{\alpha}_\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lambda_1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\overline{\alpha}_\lambda^{(0)}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lambda_1^{(0)}.$$

Здесь $\overline{\alpha}_\mu = \dfrac{\alpha_\mu}{\alpha_\tau}$, $\overline{\alpha}_\lambda = \dfrac{\alpha_\lambda}{\alpha_\tau}$, $\alpha_\tau = \dfrac{L}{gt^2}$, $\alpha_\mu = \dfrac{2\mu}{\tau L g\rho^0}$, $\alpha_\lambda = \dfrac{2\lambda}{L g\rho^0}$. В нашей модели жидкость слабосжимаема, т.е. $\mu_0 = 0$, и твердое тело является упругим, т.е. $0 < \lambda_0 < \infty$.

Пусть

$$\int_{Q_T} \left( |\mathbf{F}(x,t)|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{F}(x,t)}{\partial t}\right|^2 \right) dxdt = F^2 < \infty, \qquad \rho_{(s)}^\varepsilon = (1-\zeta)\rho_s^{(0)} + \zeta\left(\rho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s\right).$$

Определим обобщенное решение задачи (1)–(10).

***Определение.*** *Назовем пару функций* $(\mathbf{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ *таких, что* $\mathbf{w}^{\varepsilon} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $p^{\varepsilon} \in L_2(Q_T)$, *обобщенным решением задачи* (1)–(10), *если они удовлетворяют уравнению неразрывности*

$$\left((1-\zeta)\frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2} + \zeta\left(\frac{\chi^{\varepsilon}}{\bar{c}_f^{\,2}} + \frac{1-\chi^{\varepsilon}}{\bar{c}_s^{\,2}}\right)\right)p^{\varepsilon} + \nabla\cdot\mathbf{w}^{\varepsilon} = 0 \tag{11}$$

*почти всюду в* $Q_T$ *и интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T} \rho^{\varepsilon}_{(s)}\left(\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{F}\cdot\phi\right)dxdt = \int_{Q_T}\left(\zeta\mathbf{P} + (1-\zeta)\mathbf{P}^{(s)}\right) : \mathbf{D}(x,\phi)dxdt \tag{12}$$

*для всех функций* $\phi$ *таких, что* $\phi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}\left(Q_T\right)$, $\partial\phi/\partial t \in L_2\left(\Omega_T\right)$, $\phi(x,t) = 0,\ x \in Q$.

Здесь и далее используется обозначение: $\mathbf{B}{:}\mathbf{C} = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})$, где $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – тензоры второго ранга.

## 2. Теорема существования и единственности обобщенного решения

***Теорема 1.*** *При всех* $\varepsilon > 0$ *на произвольном интервале времени* $(0,T)$ *существует единственное обобщенное решение* $(\mathbf{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ *задачи* (1)–(10), *и*

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}\left(\left|p^{\varepsilon}(x,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}(x,t)}{\partial t}\right|^2 + (1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}\left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})\right|^2\right)dx +$$

$$+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(s)}}\left(\left|p^{\varepsilon}(x,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}(x,t)}{\partial t}\right|^2 + (1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}\left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})\right|^2\right)dx +$$

$$+\max_{0<t<T}\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial p^{\varepsilon}(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}(x,t)}{\partial t^2}\right|^2 + (1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}\left|\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t})\right|^2\right)dx +$$

$$+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(s)}}\left(\left|\frac{\partial p^{\varepsilon}(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}(x,t)}{\partial t^2}\right|^2 + (1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}\left|\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t})\right|^2\right)dx +$$

$$+\int_{\Omega_T}\chi^{\varepsilon}\bar{\alpha}_{\mu}\left(\left|\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t})\right|^2 + \left|\mathbf{D}(x,\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2})\right|^2\right)dxdt \le C_0, \tag{13}$$

*где постоянная* $C_0$ *не зависит от* $\varepsilon$ *и от параметров* $\bar{\alpha}_{\mu}$, $\bar{\alpha}_{\lambda}$, $\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}$.

***Доказательство.*** Доказательство теоремы выполняется по стандартной схеме, изложенной, например, в монографии [17], и основывается на энергетических тождествах:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(\rho^{\varepsilon}\left|\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^{2}+\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\overline{\alpha}_{\lambda}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon}):\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})+\left|p^{\varepsilon}\right|^{2}\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega^{(s)}}\left(\rho_{s}\left|\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^{2}+\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\overline{\alpha}_{\lambda}^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon}):\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})+\frac{1}{\left(\overline{c}_{s}^{(0)}\right)^{2}}\left|p^{\varepsilon}\right|^{2}\right)dx+$$

$$+\int_{\Omega}\chi^{\varepsilon}\left(\overline{\alpha}_{\mu}\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}):\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t})\right)dx=\int_{Q}\rho_{(s)}^{\varepsilon}\mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dx\,,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(\rho^{\varepsilon}\left|\frac{\partial^{2} \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\right|^{2}+\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\overline{\alpha}_{\lambda}\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}):\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t})+\left|\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^{2}\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega^{(s)}}\left(\rho_{s}\left|\frac{\partial^{2} \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\right|^{2}+\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\overline{\alpha}_{\lambda}^{(0)}\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}):\mathbf{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t})+\frac{1}{\left(\overline{c}_{s}^{(0)}\right)^{2}}\left|\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^{2}\right)dx+$$

$$+\int_{\Omega}\chi^{\varepsilon}\left(\overline{\alpha}_{\mu}\mathbf{D}(x,\frac{\partial^{2} \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}):\mathbf{D}(x,\frac{\partial^{2} \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}})\right)dx=\int_{Q}\rho_{(s)}^{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{2} \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}dx\,. \qquad \square$$

## 3. Усреднённые модели

***Теорема 2.*** *Пусть* $(\mathbf{w}^{\varepsilon},p^{\varepsilon})$ *– обобщенное решение задачи* (1)–(10) *и* $0<\lambda_{0}^{(0)}<\infty$, $\mu_{1}=\lambda_{1}=\infty$. *Тогда пределы* $\mathbf{w}$ *и* $p$ *последовательностей* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{p^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют уравнению динамики в форме интегрального тождества*

$$\int_{Q_{T}}\left((1-\zeta)\lambda_{0}^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w})-p\mathbf{I}\right):\mathbf{D}(x,\phi)dxdt=\int_{Q_{T}}\hat{\rho}_{s}\left(\mathbf{F}-\frac{\partial^{2}\mathbf{w}}{\partial t^{2}}\right)\cdot\phi dxdt \tag{14}$$

*для любой функции* $\phi\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_{2}^{1,0}(Q_{T})$, *и уравнению неразрывности в форме интегрального тождества*

$$\int_{Q_{T}}\left(\left((1-\zeta)\left(\frac{1}{\overline{c}_{s}^{(0)}}\right)^{2}+\zeta\left(\frac{m}{\overline{c}_{f}^{2}}+\frac{1-m}{\overline{c}_{s}^{2}}\right)\right)\frac{\partial p}{\partial t}\psi-\nabla\psi\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right)dxdt=0 \tag{15}$$

*для любой гладкой функции* $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. *Здесь*

$$\hat{\rho}_s = \big(1-\zeta(x)\big)\rho_s^{(0)} + \zeta(x)\hat{\rho}, \qquad \hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s, \qquad m = \int_Y \chi(y)dy .$$

*Задача* (14), (15) *замыкается однородными граничными условиями*

$$\mathbf{w}(x,t) = 0 \tag{16}$$

*на границе* $S_T \setminus \partial\Omega_T$ *и однородными начальными условиями*

$$\mathbf{w}(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad x \in Q . \tag{17}$$

*Заметим, что интегральные тождества* (14), (15) *эквивалентны системе Ламе*

$$\frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2}\, p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{18}$$

$$\rho_s^{(0)}\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\Big(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) - p\mathbf{I}\Big) + \rho_s^{(0)}\mathbf{F} \tag{19}$$

*в области* $\Omega_T^{(s)}$ *и системе акустики*

$$\hat{\rho}\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\nabla p + \hat{\rho}\mathbf{F}, \qquad \left(\frac{m}{\bar{c}_f^{2}} + \frac{1-m}{\bar{c}_s^{2}}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

*в области* $\Omega_T$. *Эти уравнения завершаются условиями непрерывности*

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t)\cdot\mathbf{n}(x^0) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega}} \mathbf{w}(x,t)\cdot\mathbf{n}(x^0), \tag{21}$$

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega^{(s)}}} \Big(\lambda_0^{(0)}\big(\mathbf{D}(x,\mathbf{w}(x,t)\big) - p\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{n}(x^0) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega}} p(x,t)\mathbf{n}(x^0) \tag{22}$$

*на общей границе* $S_T^{(0)}$, *граничным и начальным условиями* (16), (17), *граничным условием*

$$\mathbf{w}(x,t)\cdot\mathbf{n}(x^0) = 0 \tag{23}$$

*на границе* $S_T \setminus \partial\Omega_T^{(s)}$ *и начальными условиями*

$$p(x,0) = 0, \qquad \mathbf{w}(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad x \in \Omega . \tag{24}$$

***Теорема 3.*** *Пусть* $(\mathbf{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ *– обобщенное решение задачи* (1)–(10) *и* $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $0 \le \mu_1, \lambda_1 < \infty$. *Тогда пределы* $\mathbf{w}$ *и* $p$ *последовательностей* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{p^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(s)}$ *системе уравнений Ламе* (18), (19), *граничным и начальным условиям* (16), (17) *и усредненному уравнению*

$$\hat{\rho}\left(\frac{m}{c_f^{-2}} + \frac{1-m}{c_s^{-2}}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{f} = -\nabla\cdot\int_0^t m\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t-\tau)\cdot\nabla p(x,\tau)d\tau \tag{25}$$

*в области* $\Omega_T$. *Эти уравнения замыкаются условием непрерывности*

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega^{(s)}}} \frac{\partial\mathbf{w}(x,t)}{\partial t}\cdot\mathbf{n}(x^0) = \left(\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega}} \int_0^t m\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t-\tau)\cdot\nabla p(x,\tau)d\tau + \mathbf{f}(x,t)\right)\cdot\mathbf{n}(x^0) \tag{26}$$

*и условием непрерывности* (22) *на общей границе* $S_T^{(0)}$, *граничным условием*

$$\int_0^t m\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t-\tau)\cdot\nabla p(x,\tau)d\tau\cdot\mathbf{n}(x) = -\mathbf{f}(x,t)\cdot\mathbf{n}(x) \tag{27}$$

*на границе* $\partial\Omega_T \setminus S_T^{(0)}$ *и начальным условием*

$$p(x,0) = 0, \quad x\in\Omega. \tag{28}$$

*В* (25)–(27) *матрица* $\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t-\tau)$ *и функция* $\mathbf{f}(x,t)$ *определяются формулами:*

$$\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t-\tau) = \sum_{i=1}^{3}\left\langle\frac{\partial\mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\right\rangle_Y (t)\otimes\mathbf{e}_i, \tag{29}$$

$$\mathbf{f}(x,t) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \left\langle\frac{\partial\mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\right\rangle_Y (y, t-\tau)F_i(x,\tau)d\tau. \tag{30}$$

***Теорема 4.*** *Пусть* $(\mathbf{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ *– обобщенное решение задачи* (1)–(10), $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $\mu_1 = \infty$, $0 \le \lambda_1 < \infty$ *и* $\mathbf{w}_f^{\varepsilon} = \mathbf{E}_{\Omega_f}(\mathbf{w}^{\varepsilon})$ *– продолжение из* $\Omega_f^{\varepsilon}$ *в* $\Omega$. *Тогда пределы* $\mathbf{w}$ *и* $p$ *последовательностей* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{p^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(s)}$ *системе Ламе* (18), (19), *граничному и начальному условиям* (16), (17). *В области* $\Omega_T$ *давление смеси* $p$, *пределы* $\mathbf{w}^{(s)}$ *и* $\mathbf{w}_f$ *последовательностей* $\{(1-\chi^{\varepsilon})\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{\mathbf{w}_f^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности*

$$\left(\frac{m}{c_f^{-2}} + \frac{1-m}{c_s^{-2}}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\left(m\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}\right) = 0, \tag{31}$$

*уравнения баланса моментов*

$$m\rho_f \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t} + \int_0^t \left(-\hat{\rho}_f + \nabla p\right)(x,\tau)d\tau = 0 \tag{32}$$

*для жидкой компоненты и уравнения баланса моментов*

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t} - (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} = -\int_0^t \mathbf{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\left(\nabla p + \rho_s\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2} - \mathbf{F}(x,\tau)\right)\right)d\tau \tag{33}$$

*для твердой компоненты.*

*Задача замыкается граничным условием* (22) *и граничным условием*

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega^{(s)}}} \frac{\partial \mathbf{w}(x,t)}{\partial t}\cdot \mathbf{n}(x^0) = \left(\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega}}\left(m\frac{\partial \mathbf{w}_f(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{w}^s(x,t)}{\partial t}\right)\right)\cdot \mathbf{n}(x^0) \tag{34}$$

*на общей границе* $S_T^{(0)}$, *граничным условием*

$$\left(m\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}\right)\cdot \mathbf{n}(x) = 0 \tag{35}$$

*на границе* $S_T \setminus \partial\Omega_T^{(s)}$ *и начальными условиями*

$$\mathbf{w}_f(x,0) = \mathbf{w}^{(s)}(x,0) = 0, \qquad x\in\Omega. \tag{36}$$

*В уравнении* (33) *матрица* $\mathbf{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)$ *определяется формулами*:

$$\mathbf{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau) = \sum_{i=1}^{3}\left\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\right\rangle_{Y_s} \otimes \mathbf{e}_i, \tag{37}$$

$$\rho_s \mathbf{B}^{(s)}(\infty,0) = (1-m)\mathbf{I} - \left(\sum_{i=1}^{3}\left\langle \nabla_y \Pi_i^{(s)}(y)\right\rangle_{Y_s} \otimes \mathbf{e}_i\right). \tag{38}$$

В теореме используется обозначение: $\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbf{E}_{\Omega_f}(\mathbf{w}^\varepsilon)$, где $\mathbf{E}_{\Omega_f} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$ – оператор продолжения из $\Omega_f^\varepsilon$ в $\Omega$ такой, что $\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)$ и

$$\int_\Omega \left|\mathbf{w}_f^\varepsilon\right|^2 dx \le C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{w}^\varepsilon\right|^2 dx, \quad \int_\Omega \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_f^\varepsilon)\right|^2 dx \le C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\right|^2 dx. \tag{39}$$

Здесь применяется известная лемма К. Конки о продолжении (см. [18]).

***Теорема 5.*** *Пусть* $(\mathbf{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ *– обобщенное решение задачи* (1)–(10), $0<\lambda_0^{(0)}<\infty$, $0\le\mu_1<\infty$, $\lambda_1=\infty$ *и* $\mathbf{w}_s^{\varepsilon}=\mathbf{E}_{\Omega_f}(\mathbf{w}^{\varepsilon})$ *– продолжение из* $\Omega_s^{\varepsilon}$ *в* $\Omega$. *Тогда пределы* $\mathbf{w}$ *и p последовательностей* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{p^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(s)}$ *системе Ламе* (18), (19), *граничному и начальному условиям* (16), (17). *В области* $\Omega_T$ *давление смеси p, предельные функции* $\mathbf{w}^{(f)}$ *и* $\mathbf{w}_s$ *последовательностей* $\{\chi^{\varepsilon}\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{\mathbf{w}_s^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют системе усредненных уравнений, состоящих из уравнения неразрывности*

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^{2}}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^{2}}\right)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{w}^f}{\partial t}+(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t}\right)=0, \tag{40}$$

*уравнения баланса моментов*

$$\rho_f\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+(1-m)\rho_s\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t}=\int_0^t\big(\hat{\rho}\mathbf{F}-\nabla p\big)(x,\tau)d\tau \tag{41}$$

*для твердой компоненты и уравнения баланса моментов*

$$\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}-m\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t}=-\int_0^t\mathbf{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\left(\nabla p+\rho_f\left(\frac{\partial^2\mathbf{w}^s}{\partial\tau^2}-\mathbf{F}(x,\tau)\right)\right)d\tau \tag{42}$$

*для жидкой компоненты.*

*Задача замыкается граничным условием* (22) *и граничным условием*

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega^{(s)}}}\frac{\partial\mathbf{w}(x,t)}{\partial t}\cdot\mathbf{n}(x^0)=\left(\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega}}\left(\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}(x,t)}{\partial t}-(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_s(x,t)}{\partial t}\right)\right)\cdot\mathbf{n}(x^0) \tag{43}$$

*на общей границе* $S_T^{(0)}$, *граничным условием*

$$\left(\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}(x)=0 \tag{44}$$

*на границе* $S_T\setminus\partial\Omega_T^{(s)}$ *и начальными условиями*

$$\mathbf{w}^{(f)}(x,0)=\mathbf{w}_s(x,0)=0,\qquad x\in\Omega. \tag{45}$$

*В уравнении* (42) *матрица* $\mathbf{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)$ *определяется формулами*

$$\mathbf{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)=\sum_{i=1}^{3}\left\langle\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}\right\rangle_{Y_f}\otimes\mathbf{e}_i, \tag{46}$$

$$\rho_f \mathbf{B}^{(f)}(0,\infty) = m\mathbf{I} - \left( \sum_{i=1}^{3} \left\langle \nabla_y \Pi_i^{(f)}(y) \right\rangle_{Y_f} \otimes \mathbf{e}_i \right). \tag{47}$$

В теореме используется обозначение: $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$, где $\mathbf{E}_{\Omega_s^\varepsilon} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$ – оператор продолжения из $\Omega_s^\varepsilon$ в $\Omega$ такой, что $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_s^\varepsilon \times (0,T)$ и

$$\int_\Omega \left|\mathbf{w}_s^\varepsilon\right|^2 dx \le C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{w}^\varepsilon\right|^2 dx, \quad \int_\Omega \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s^\varepsilon)\right|^2 dx \le C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\right|^2 dx. \tag{48}$$

## 4. Доказательство теорем 2–5

Основная трудность здесь заключается в граничных условиях на общей границе $S^{(0)}$. Эти условия следуют из предельного интегрального тождества (15) и интегрального тождества

$$\int_{Q_T} \left((1-\zeta)\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) - p\mathbf{I}\right) : \mathbf{D}(x,\phi)dxdt = \int_{Q_T}\int_Y \rho_{(s)}(x,y)\left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{W}(x,t,y)}{\partial t^2}\right)\cdot \phi(x,t)dydxdt, \tag{49}$$

где $\mathbf{W}(x,t,y)$ есть двухмасштабный предел последовательности $\left\{\mathbf{w}^\varepsilon\right\}$ и

$$\rho_{(s)}(x,y) = \left(1-\zeta(x)\right)\rho_s^{(0)} + \zeta(x)\left(\rho_f \chi(y) + \left(1-\chi(y)\right)\rho_s\right).$$

Из соотношения (49) следует уравнение динамики Ламе (19) и граничное условие (22) на общей границе $S^{(0)}$. Из интегрального тождества (15) вытекают уравнение неразрывности (18), уравнение неразрывности

$$\left(\frac{m}{c_f^{-2}} + \frac{1-m}{c_s^{-2}}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0 \tag{50}$$

в области $\Omega_T$ и граничное условие

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \frac{\partial^2 \mathbf{w}(x,t)}{\partial t^2}\cdot \mathbf{n}(x^0) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \frac{\partial^2 \mathbf{w}(x,t)}{\partial t^2}\cdot \mathbf{n}(x^0) \tag{51}$$

на общей границе $S^{(0)}$. Все различия сконцентрированы в уравнении динамики в области $\Omega_T$ и в представлении скорости смеси $\partial\mathbf{w}/\partial t$.

***Доказательство теоремы 2.*** В этом случае двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ совпадает со слабым пределом: $\mathbf{W}(x,t,y) = \mathbf{w}(x,t)$, и из интегрального тождества (49) следует уравнение динамики

$$\hat{\rho}\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\nabla p + \hat{\rho}\mathbf{F} \tag{52}$$

в области $\Omega_T$. Соотношения (50)–(52) дают уравнение акустики (20) в области $\Omega_T$ и граничное условие (21) на границе $S^{(0)}$. □

***Доказательство теоремы 3.*** Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{1}{\bar{c}_f^{2}} + \frac{1}{\bar{c}_s^{2}}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad P(x,t,y) = p(x,t).$$

Используя вложение $p \in L_2(\Omega_T), \nabla(\partial p / \partial t) \in L_2(\Omega_T)$, выводим микроскопическое уравнение баланса моментов:

$$\rho(y)\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \left(\mu_1 \chi(y)\mathbf{D}(y, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) + \lambda_1\big(1-\chi(y)\big)\mathbf{D}(y,\mathbf{W}) - \Pi \mathbf{I}\right) -$$

$$-\nabla p + \rho(y)\mathbf{F}, \quad y \in Y, \quad t > 0, \tag{53}$$

где $\rho(y) = \rho_f \chi(y) + \rho_s\big(1-\chi(y)\big)$, и микроскопическое уравнение неразрывности

$$\nabla_y \cdot \mathbf{W} = 0, \quad y \in Y. \tag{54}$$

Эти уравнения замыкаются однородными начальными условиями

$$\mathbf{W}(x,y,0) = \frac{\partial \mathbf{W}(x,y,0)}{\partial t} = 0, \quad y \in Y.$$

Мы рассматриваем периодическое решение задачи как сумму

$$\mathbf{W}(x,t,y) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}^{(i)}(y,t-\tau)\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}d\tau + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_F^{(i)}(y,t-\tau)F_i(x,\tau)d\tau,$$

$$\Pi(x,t,y) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi^{(i)}(y,t-\tau)\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}d\tau + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_F^{(i)}(y,t-\tau)F_i(x,\tau)d\tau,$$

где $\mathbf{F}(x,t) = \big(F_1(x,t), F_2(x,t), F_3(x,t)\big)$. В свою очередь, пары $\{\mathbf{W}^{(i)}, \Pi^{(i)}\}, \{\mathbf{W}_F^{(i)}, \Pi_F^{(i)}\}$ – решения периодических начально-краевых задач в области $Y$ для $t>0$:

$$\rho(y)\frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \left(\mu_1 \chi(y)\nabla_y \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t} + \lambda_1\big(1-\chi(y)\big)\nabla_y \mathbf{W}^{(i)}) - \Pi^{(i)}\mathbf{I}\right), \quad \nabla_y \cdot \mathbf{W}^{(i)} = 0, \tag{55}$$

$$\mathbf{W}^{(i)}(y,0) = 0, \quad \rho(y)\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}(y,0)}{\partial t} = -\mathbf{e}_i, \quad y \in Y, \tag{56}$$

$$\rho(y)\frac{\partial^2 \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t^2}=\nabla_y\cdot\left(\mu_1\chi(y)\nabla_y\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}+\lambda_1\left(1-\chi(y)\right)\nabla_y\mathbf{W}_F^{(i)})-\Pi_F^{(i)}\mathbf{I}\right),\quad \nabla_y\cdot\mathbf{W}^{(i)}=0\,,\quad(57)$$

$$\mathbf{W}_F^{(i)}(y,0)=0,\qquad \rho(y)\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}(y,0)}{\partial t}=-\mathbf{e}_i,\qquad y\in Y\,.\tag{58}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}(y,t-\tau)}{\partial t}\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}d\tau+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}(y,t-\tau)}{\partial t}F_i(x,\tau)d\tau\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\left\langle\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\right\rangle_Y\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}d\tau+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\left\langle\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\right\rangle_Y F_i(x,\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1,t-\tau)\cdot\nabla p(x,\tau)d\tau+\mathbf{f}(x,t)\,,$$

где
$$\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1,t)=\sum_{i=1}^{3}\left\langle\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\right\rangle_Y(t)\otimes\mathbf{e}_i\,,\tag{59}$$

$$\mathbf{f}(x,t)=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\left\langle\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\right\rangle_Y(t-\tau)F_i(x,\tau)d\tau\,.\tag{60}$$

Полученные соотношения дают следующее представление скорости смеси:

$$\frac{\partial \mathbf{w}(x,t)}{\partial t}=\int_0^t\mathbf{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1,t-\tau)\cdot\nabla p(x,\tau)d\tau+\mathbf{f}(x,t)\,.\tag{61}$$

Из этого представления, уравнения неразрывности (50) и граничного условия (51) следуют уравнение (25) и граничное условие (27). □

***Доказательство теоремы 4.*** Для этого случая скорость смеси задана формулами:

$$\frac{\partial \mathbf{W}(x,y,t)}{\partial t}=\chi(y)\frac{\partial \mathbf{w}_f(x,t)}{\partial t}+\left(1-\chi(y)\right)\frac{\partial \mathbf{W}(x,y,t)}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}=m\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t},$$

$$\mathbf{w}^{(s)}(x,t)=\int_Y\left(1-\chi(y)\right)\frac{\partial \mathbf{W}(x,y,t)}{\partial t}dy\,,$$

которые вместе с (50) приводят к (31). Интегральное тождество (49) влечет уравнение динамики (32) для жидкой компоненты. Чтобы получить представление (33), используем микроскопическое уравнение динамики

$$\rho_s\frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t^2}=\frac{\lambda_1}{2}\Delta_y\mathbf{W}^{(s)}-\nabla_y\Pi^{(s)}-\nabla p\,,\qquad \mathbf{W}^{(s)}=\left(1-\chi(y)\right)\mathbf{W}$$

для твердой компоненты, микроскопическое уравнение неразрывности $\nabla\cdot\mathbf{W}^{(s)}=0$ в области $Y_s$ и соответствующие граничные и начальные условия.

Если $\mathbf{W}^{(s)}=(1-\chi(y))\mathbf{W}$, то пара $\{\mathbf{W}^{(s)},\Pi^{(s)}\}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho_s\frac{\partial^2\mathbf{W}^{(s)}}{\partial t^2}=\frac{\lambda_1}{2}\Delta_y\mathbf{W}^{(s)}-\nabla_y\Pi^{(s)}-\nabla p \tag{62}$$

в области $Y_s\times(0,T)$ и начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(s)}(x,0,y)=\frac{\partial\mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}=0,\qquad y\in Y_s. \tag{63}$$

В силу теоремы Нгуетсенга $\mathbf{W}^{(s)}$, $\partial^2\mathbf{W}^{(s)}/\partial t^2$, $\nabla_y\mathbf{W}^{(s)}\in L_2(Q_T\times Y_s)$. Эти условия вместе с формулой (56) обеспечивают граничное условие

$$\mathbf{W}^{(s)}(x,t,y)=\mathbf{w}_f(x,t),\qquad (y,t)\in\gamma\times(0,T). \tag{64}$$

Решения $\{\mathbf{W}^{(s)},\Pi^{(s)}\}$ периодических начально-краевых задач (62)–(64) имеют вид

$$\mathbf{W}^{(s)}(x,t,y)=\mathbf{w}_f+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\mathbf{W}_i^{(s)}(y,t-\tau)\left(\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}+\rho_s\frac{\partial^2\mathbf{w}_f(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau,$$

$$\Pi^{(s)}(x,t,y)=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\Pi_i^{(s)}(y,t-\tau)\left(\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}+\rho_s\frac{\partial^2\mathbf{w}_f(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(s)},\Pi_i^{(s)}\}$, $i$=1,2,3, в свою очередь, являются решениями периодических начально-краевых задач

$$\rho_s\frac{\partial^2\mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t^2}=\frac{\lambda_1}{2}\Delta_y\mathbf{W}_i^{(s)}-\nabla_y\Pi_i^{(s)}-\nabla p,\qquad (y,t)\in Y_s\times(0,T), \tag{65}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}=(1-\chi(y))\mathbf{W}_i^{(s)},\qquad (y,t)\in Y_s\times(0,T), \tag{66}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(y,0)=0,\qquad \rho_s\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(s)}(y,0)}{\partial t}=\mathbf{e}_i,\qquad y\in Y_s, \tag{67}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(y,t)=0,\qquad (y,t)\in\gamma\times(0,T). \tag{68}$$

Однозначная разрешимость задач (65)–(68) следует из энергетического тождества

$$\int_{Y_s}\left(\rho_s\left|\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(s)}(y,t)}{\partial t}\right|^2+\frac{\lambda_1}{2}\left|\nabla\mathbf{W}_i^{(s)}(y,t)\right|^2\right)dy=\frac{1-m}{\rho_s}.$$

Задача (65)–(68) для соленоидальных функций $\mathbf{W}_i^{(s)}$, равных нулю на $S^{(0)}$ и при $t$=0, понимается как интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{Y_s} \left( \rho_s \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}(y,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda_1 \nabla \mathbf{W}_i^{(s)}(y,t) : \nabla \phi \right) dydt = \int_{Y_s} \mathbf{e}_i \cdot \phi(y,0) dy$$

для любой соленоидальной 1-периодической гладкой функции $\phi$, равной нулю на $S^{(0)}$ и при $t=T$. По определению

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}(x,t)}{\partial t} = \int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}(x,y,t)}{\partial t} dy =$$

$$= (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f(x,t)}{\partial t} - \int_0^t \left( \sum_{i=1}^3 \left( \int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}(y,t-\tau)}{\partial t} dy \right) \otimes \mathbf{e}_i \right) \cdot \left( \nabla p(x,\tau) + \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f(x,\tau)}{\partial t^2} \right) d\tau =$$

$$= (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f(x,t)}{\partial t} - \int_0^t \mathbf{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1, t-\tau) \cdot \left( \nabla p(x,\tau) + \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f(x,\tau)}{\partial t^2} \right) d\tau, \tag{69}$$

где $$\mathbf{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1, t-\tau) = \sum_{i=1}^3 \left( \int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}(y,t-\tau)}{\partial t} dy \right) \otimes \mathbf{e}_i \,. \tag{70}$$

□

***Доказательство теоремы 5.*** Здесь скорость смеси задана формулами

$$\frac{\partial \mathbf{W}(x,y,t)}{\partial t} = \chi(y)\frac{\partial \mathbf{W}(x,y,t)}{\partial t} + \left(1-\chi(y)\right)\frac{\partial \mathbf{w}_s(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} + (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t},$$

$$\mathbf{w}^{(f)}(x,t) = \int_Y \chi(y) \frac{\partial \mathbf{W}(x,y,t)}{\partial t} dy,$$

которые вместе с (50) дают (40). Интегральное тождество (49) влечет уравнение динамики (41) для твердой компоненты. Докажем представление (42).

Если мы положим $\mathbf{W}^{(f)} = \chi(y)\mathbf{W}$, то предельное интегральное тождество для пары $\{\mathbf{W}^{(f)}, \Pi^{(f)}\}$ эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{2} \Delta_y \mathbf{W}^{(f)} - \nabla_y \Pi^{(f)} - \nabla p \tag{71}$$

в области $Y_f \times (0,T)$, начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(f)}(x,0,y) = \frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t} = 0, \quad y \in Y_f \tag{72}$$

и граничному условию

$$\mathbf{W}^{(f)}(x,t,y) = \mathbf{w}_s(x,t), \quad (y,t) \in \gamma \times (0,T). \tag{73}$$

Т.о., решение $\{\mathbf{W}^{(f)}, \Pi^{(f)}\}$ периодической начально-краевой задачи (71)–(73) имеет вид

$$\mathbf{W}^{(f)}(x,t,y) = \mathbf{w}_s + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_i^{(f)}(y,t-\tau)\left(\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau,$$

$$\Pi^{(f)}(x,t,y) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(f)}(y,t-\tau)\left(\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(f)}, \Pi_i^{(f)}\}$, $i$=1,2,3, в свою очередь, есть решения следующих периодических начально-краевых задач:

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{2}\Delta_y \mathbf{W}_i^{(f)} - \nabla_y \Pi_i^{(f)} - \nabla p, \qquad (y,t) \in Y_f \times (0,T),$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)} = \big(1-\chi(y)\big)\mathbf{W}_i^{(f)}, \qquad (y,t) \in Y_f \times (0,T),$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(y,0) = 0, \quad \rho_f \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}(y,0)}{\partial t} = \mathbf{e}_i, \qquad y \in Y_f,$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(y,t) = 0, \qquad (y,t) \in \gamma \times (0,T).$$

По определению

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}(x,t)}{\partial t} = \int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}(x,y,t)}{\partial t}dy =$$

$$= m\frac{\partial \mathbf{w}_s(x,t)}{\partial t} - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}(y,t-\tau)}{\partial t}dy\right) \otimes \mathbf{e}_i\right) \cdot \left(\nabla p(x,\tau) + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau =$$

$$= m\frac{\partial \mathbf{w}_s(x,t)}{\partial t} - \int_0^t \mathbf{B}^{(f)}(\infty,\mu_1,t-\tau) \cdot \left(\nabla p(x,\tau) + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau,$$

где $\mathbf{B}^{(f)}(\infty,\mu_1,t-\tau) = \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}(y,t-\tau)}{\partial t}dy\right) \otimes \mathbf{e}_i$ . □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. – М.: Наука, 1984, 352 с.;
англ. пер.: *Bakhvalov N.S., Panasenko G.P.* Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media. Spinger, New York, 1989.
2. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1993, 464 с.
англ. пер.: *Jikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A.* Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. Springer-Verlag, New York, 1994.

3. *Shamaev Alexey S., Shumilova Vladlena V.* Homogenization of acoustic equations for a partially perforated elastic material with slightly viscous fluid // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Матем. и физ., 2015, 8:3, с.356-370.
4. *Жиков В.В., Иосифьян Г.А.* Введение в теорию двухмасштабной сходимости // Тр. сем. им. И.Г. Петровского, 2013, 29, с.281-332;
*Zhikov V.V., Iosifian G.A.* Vvedenie v teoriiu dvukhmasshtabnoi skhodimosti // Tr. sem. im. I.G. Petrovskogo, 2013, 29, s.281-332.
5. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка // Математические заметки, 2011, т.90. №1, с.53-69;
*Jikov V.V., Pastukhova S.E.* Homogenization of Monotone Operators Under Conditions of Coercitivity and Growth of Variable Order // Mathematical Notes, 2011, v.90, №1, p.48–63.
6. *Burridge R., Keller J.B.* Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Am., 1981, 70, №4, p.1140-1146.
7. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics, Springer. – Berlin: 1980, v.129, 471 p.
8. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal., 1989, v.20, p.608-623.
9. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal., 1990, 21, p.1394-1414.
10. *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence // Int. J. Pure and Appl. Math., 2002, 2, №1, p.35-86.
11. *Meirmanov A.* Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal, 2007, 48, c.519-538.
12. *Meirmanov A.* Acoustic and filtration properties of a thermoelastic porous medium: Biot's equations of thermo-poroelasticity // Sbornik Mathematics, 2008, 199, №3, p.1-24.
13. *Meirmanov A.* Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermoelastic porous media // Euro. Jnl. of Applied Mathematics, 2008, 19, p.259-284.
14. *Meirmanov A.* A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal., 2008, 40, N3, 1272-1289.
15. *Мейрманов А.* Уравнения акустики в упругих пористых средах // Сибирский журнал индустриальной математики, 2010, т.13, № 2(42), с.98-110;
*Meirmanov A.* Acoustics equations in elastic porous media // Siberian journal of industrial mathematics, 2010, 13:2, p.98-110.
16. *Meirmanov A.* Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences, 2009, 163, №2, p.111-150.
17. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967, 736 с.
англ. пер.: *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N.* Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs 23, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1968.
18. *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl., 1985, 64, p.31-75.

Поступила в редакцию 28.09.2015.