ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедраматематики

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа магистранта

заочной формы обучения
направления подготовки 44.04.01. Педагогическое образование, магистерская программа «Математическое образование»
3 года обучения группы 02041460
__________Бочкаревой Надежды Юрьевны_________
(Фамилия, имя, отчество)

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент
Моткина Н.Н.
(ученая степень, звание, фамилия, инициалы)

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент
Голованова Е.В.
(ученая степень, звание, фамилия, инициалы)

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Реформы математического образования,затрагивая содержаниешкольных программ, неизменным сохраняют некоторое ядроиз тем, без которых учащиеся не получат полного представления о математике и ее методах. Данные темы концентрируют в себе математические знания, основами которых должен обладать человек в современном обществе, и которые используются как в повседневной жизни для решения возникающих на практике задач, так и для решения внутриматематических проблем и задач прикладного характера. К таким темам относятся некоторые разделы теории чисел.

Теория чисел – одна из древнейших математических теорий. Арифметические исследования послужили базой для создания ряда разделов математики и, в то же время, теория чисел использует аналитические, алгебраические, геометрические и многие другие методы для решения теоретико-числовых проблем.

Делимость – фундаментальное понятие алгебры, арифметики и теории чисел, связанное с операцией деления. Вопросами делимости чисел занимались еще математики Древней Греции.В теории чисел ими была проведена большая работа по типологии натуральных чисел.Они делили множество натуральных чисел на классы, выделяя классы совершенных чисел, дружественных чисел, фигурных чисел, простых чисел и др.

В книге Евклида «Начала» содержится доказательство бесконечности множества простых чисел. Древнегреческий ученый Эратосфен нашел способ составления таблиц простых чисел, названный позднее «решето Эратосфена».

Вклад в изучение признаков делимости чисел внес Блез Паскаль. Он нашел алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число, из которого следуют все частные признаки.

Проблемами делимости чисел на уроках математики занимались многие математики и методисты: Ж. Адамар, В. Г. Болтянский, И.М. Виноградов, В. А. Далингер, Д. Пойа, Г. И. Саранцев, К. П. Сикорский, А. А. Столяр, П. Л. Чебышев и др.

В основном, элементы теории чиселв школьном курсе математики представлены в разделах «Делимость натуральных чисел», «Делимость чисел».Тема «Делимость чисел» включена в программу по математике для 5-6 классов и почти не рассматривается в 7-11 классах.Хотя в контрольно-измерительных материалах государственной итоговой аттестации задачи по элементам теории чисел присутствуют, что делает необходимым включение таких задач в школьный курс алгебры 7-9 классов, старшей школы.и обуславливает **актуальность** темы исследования.

Объект исследования:элементы теории чисел в школьном курсе математики.

Предмет исследования:организация обучения элементам теории чисел в школьном курсе математики.

Цель исследования –разработать программу элективного курса«Гармония чисел»для учащихся 10 – 11 класса.

Задачи исследования:

1. Проанализировать учебно-методическую литературу по теме исследования.
2. Изучить нормативные документы.
3. Выявить глубину изучения элементов теории чисел в школьном курсе математики.
4. Рассмотреть основные понятия «Теориичисел», изучаемые в школьном курсе математики».
5. Разработать программу элективного курса «Гармония чисел».
6. Составитьциклы задач по элементам теории чисел, реализующие внутрипредметные связи данной темы с основными темами школьного курса алгебры.

Методы исследования: теоретический анализ литературы; составление библиографии; конспектирование; аннотирование; цитирование; анализ нормативных документов; наблюдение; обобщение опыта работы действующих учителей; моделирование структуры методических материалов.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, представлены объект, предмет исследования, изложены цели и задачи данной работы.

В первой главеизложеносновной теоретический материал «Теории чисел», изучаемый в школьном курсе математики.

Во второй главе представлен анализ учебных программ 5 – 11 классов,обзор учебников школьной программы, а также программа элективного курса «Гармония чисел» для 10 – 11класса.

В заключении обобщены результаты работы, сделаны выводы.

Список литературы содержит 28библиографических источника.

.

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Простые числа

Одним из первых свойств чисел, открытых человеком, было то, что некоторые из них могут быть разложены на два или более множителя, например,

$$8 = 2 \cdot 4,\ 9 = 3 \cdot 3,\ 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10.$$

В то время как другие, например, 3, 7, 13, 37 не могут быть разложены на множители подобным образом. Вообще, когда число $c = a \cdot b$ является произведением двух чисел a и b, то мы называем a и b*множителями* или *делителями* числа c. Каждое число имеет тривиальное разложение на множители $c= 1 \cdot c = c \cdot 1$. Соответственно, мы называем числа 1 и c тривиальными делителями числа c.

Любое число $c>1$, у которого существует нетривиальное разложение на множители, называется составным. Если число c имеет только тривиальное разложение на множители, то оно называется простым. Среди первых 100 чисел простыми являются следующие 25 чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Все остальные числа, кроме 1, являются составными.

Теорема 1. Любое целое число $c>1$ является либо простым, либо имеет простой множитель.

Доказательство. Если c не является простым числом, то у него есть наименьший нетривиальный множитель p. Тогда p – простое число, так как если бы p – было составным, то число c имело бы еще меньший множитель[19].

Как определить является ли произвольное число простым или нет, и в случае, если оно составное, как найти какой-либо его нетривиальный делитель?

Заметим, что при разложении на множители оба множителя a и b не могут быть больше, чем $\sqrt{c}$, так как в противоположном случае мы получили бы $a \cdot b > \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = c$, что невозможно. Таким образом, чтобы узнать, имеет ли число c делитель, достаточно проверить, делится ли число c на простые числа, не превосходящие $\sqrt{c}$.

Пример 1. Если $c = 91$, то $\sqrt{c} = 9,\ldots$; проверив делимость числа 91 на простые числа 2, 3, 5, 7, находим, что $91 = 7 \cdot 13$.

Пример 2. Если $c = 1973$, то находим, что $\sqrt{c} = 44,\ldots$ Так как ни одно из простых чисел до 43 не делит c, то это число является простым.

Другой очень простой метод – это применение таблиц простых чисел. За последние 200 лет было составлено и издано много таблиц простых чисел. Наиболее обширной из них является таблица Д.Х. Лемера, содержащая все простые числа до 10 000 000.

Третий интересный метод – это решето Эратосфена. Его схема состоит в следующем: напишем последовательность всех целых чисел от 1 до числа, которым мы хотим закончить таблицу:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Начнем с простого числа 2. Будем вычеркивать каждое второе число, начиная с 2, т.е. четные числа. После этой операции первым невычеркнутым числом будет число 3. Оно простое, так как не делится на 2. Далее будем вычеркивать каждое третье число после него, т.е. 6, 9, 12, 15. Следующим невычеркнутым числом будет 5. Повторяя этот процесс, мы в конце концов получим последовательность невычеркнутых чисел, все они (кроме 1) являются простыми [24].

1.2. Делители чисел

Любое составное число c может быть записано в виде произведения $c = a \cdot b$, причем ни один из делителей не равен 1 и каждый из них меньше, чем c, например: 72 = 8·9, 150 = 10·15.

При разложении числа cна множители один из них, и даже оба (a и b) могут оказаться составными. Если a – составное, то разложение на множители можно продолжить:

$$c = a \cdot b, a = a_1 \cdot a_2,\ c = a_1 \cdot a_2 \cdot b.$$

Например, 72 = 2·4·9, 150 = 2·5·15. Этот процесс разложения на множители можно продолжить до тех пор, пока он не закончиться; это должно произойти, так как делители становятся все меньше и меньше, но не могут стать единицей. Когда ни один из делителей нельзя уже будет разложить на множители, то все делители будут простыми числами. Таким образом, каждое целое число, большее 1, является простым числом или произведением простых чисел.

Независимо от способа разложения числа на простые множители результат всегда будет одним и тем же, различаясь лишь порядком их записи, т.е. любые два разложения числа на простые множители содержат одни и те же простые числа; при этом каждое простое число содержится одинаковое число раз в обоих разложениях.

Теорема 2 (*Основная теорема арифметики*). Разложение числа на простые множители единственно.

При разложении числа n на множители можно собирать одинаковые простые множители в виде степеней и записывать

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}, \qquad (*)$$

гдеp_1, p_2, …, p_r– различные простые множители числа n, причем число p_1входит a_1раз, p_2 входит a_2 раз и т.д. Такая запись называется каноническим разложением числа n на простые множители [7].

Пример 3. Представим число 985608 в виде канонического разложения на простые множители.Для этого будем последовательно делить данное число на простые числа, начиная с наименьшего простого числа 2. Процесс факторизации (разложения на множители) данного числа схематично можно представить в виде:

985608|2

492804|2

246402|2

123201| 3

41067|3

13689|3

4563|3

1521|3

507|13

169|13

13|1

1

Таким образом, каноническое разложениена простые множители имеет вид: $985608 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 13^2$.

*Пример*4. Разложим на множители число 3600.$3600 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}5$ может быть записано как $3600 = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5^2$.

Зная общий вид разложения числа на множители, можно ответить на некоторые вопросы об этом числе.

Мы можем узнать, какие числа делят число n. Зная, что возможными делителями числа 3600 будут числа вида $d = 2^q{\cdot}3^r{\cdot}5^k$, при этом показатели степеней могут принимать значения: $q = 0,1,2,3,4$; $r = 0,1,2$; $k = 0,1,2$.Так как эти значения могут сочетаться всеми возможными способами, то число делителей равно

$$(4+1)(2+1)(2+1) = 5{\cdot}3{\cdot}3 = 45.$$

Для любого числа n, разложение которого на простые множители даётся формулой (*) общее число делителей τ(n) находится по формуле [3]:

$$\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ \dots\ (a_r+1).$$

1.3. Делимость

Разделить целое число a на целое число b – это значит найти такое k, при умножении которого на b получается a, то есть $b\cdot k=a$. Если для целых чисел a и b такое целое число k существует, то говорят, что a делится на b.

Определение. Целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует целое число k такое, что $a=b\cdot k$.

Если a делится на b, то b называется *делителем* числа a.

Например, 56 делится на 8, так как существует такое целое число k, что $56=8\cdot k$, а именно $k=7$; число 35 не делится на 6, так как не существует такого целого числа k, при котором верно равенство $35=6\cdot k$.

Вместо «a делится на b» говорят также: «a кратно b», «число b – делитель числа a», «число b делит a».

Обозначают: $a \vdots b$ (a делится на b).

Отметим, что предложение «a делится на b» представляет собой некоторое высказывание о соотношении между этими числами.

Замечание: понятие делимости относится только к целым числам. Для рациональных чисел аналогичное понятие было бы бессодержательным, так как для любых двух рациональных чисел a и b, где $b\neq0$ всегда существует рациональное число, являющееся их частным. Поэтому в дальнейшем, говоря о делимости, под «числом» будем подразумевать целое число [3].

1.4. Признаки делимости.

Признак делимости на 2.

Число, делящееся на 2, называется четным, не делящееся - нечетным. Число делится на два, если его последняя цифра четная или нуль. В остальных случаях - не делится.

Пример 5.Число 52 738 делится на 2, так как последняя цифра 8 - четная; 7691 не делится на 2, так как 1 - цифра нечетная; 1250 делится на 2, так как последняя цифра нуль.

Признак делимости на 4.

Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4. В остальных случаях - не делится.

Пример 6. Число 31 700 делится на 4, так как оканчивается двумя нулями;215 634 не делится на 4, так как последние две цифры дают число 34, не делящееся на 4;16 608 делится на 4, так как две последние цифры 08 дают число 8, делящееся, на 4.

Признак делимости на 8

Признак делимости на 8 подобен предыдущему. Число делится на 8, если три последние цифры его нули или образуют число, делящееся на 8. В остальных случаях - не делится.

Пример 7.125000 делится на 8 (три нуля в конце);170 004 не делится на 8 (три последние цифры дают число 4, не делящееся на 8);111120 делится на 8 (три последние цифры дают число 120, делящееся на 8).

Заметим, что можно указать подобные признаки и для деления на 16, 32, 64 и т. д., но они не имеют практического значения [12].

Признаки делимости на 3 *и на* 9.

На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3; на 9 - только те, у которых сумма цифр делится на 9.

Пример 8.Число 17835 делится на 3 и не делится на 9, так как сумма его цифр 1 +7 + 8 + 3 + 5 = 24 делится на 3 и не делится на 9.Число 105 499 не делится ни на 3, ни на 9, так как сумма его цифр (29) не делится ни на 3, ни на 9.Число 52 632 делится на 9, так как сумма его цифр (18) делится на 9.

Признак делимости на 6.

Число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3. В противном случае - не делится.

Пример 9. 126 делится на 6, так как оно делится и на 2 и на 3.

Признаки делимости на 5.

На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5. Другие - не делятся.

Пример 10.240 делится на 5 (последняя цифра 0);554 не делится на 5 (последняя цифра 4).

Признак делимости на 25.

На 25 делятся числа, две последние цифры которых нули или образуют число, делящееся на 25 (т. е. числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75). Другие не делятся.

Пример 11.7150 делится на 25 (оканчивается на 50), 4855 не делится на 25.

Признаки делимости на 10, 100 *и* 1000.

На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 - только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 - только те, у которых три последние цифры нули.

Пример 12.8200 делится на 10 и на 100;542000 делится на 10, 100, 1000.

Признак делимости на 11.

На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.

Пример 13.Число 103785 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, 1+3+8=12 равна сумме цифр, занимающих четные места 0+7+5=12.Число 9163627 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, есть 9 + 6 + 6 + 7 = 28, а сумма цифр, занимающих четные места, есть 1 + 3 +2 =6; разность между числами 28 и 6 есть 22, а это число делится на 11.Число 461025 не делится на 11, так как числа 4+ 1 + 2 = 7 и б +0 + 5=11 не равны друг другу, а их разность 11 -7 = 4 на 11 не делится [12].

Признак делимости на 7.

Число делится на 7 тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7 (например, 343 делится на 7, так как 34-(2·3)=34-6=28 делится на 7).

1.5. Свойства делимости.

Рассмотрим простейшие свойства делимости. Для любых целых чисел a, b, c справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Если$a \vdots b$иc– частное от деления, тоc– единственное.

Теорема 4.$a \vdots a$.

Теорема 5. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Теорема 6. Если $a \vdots b$и $b \vdots a$, то или $a = b$, или $a = - b$.

Теорема 7. Если $a \vdots b$и $|b| > |a|$, то $a = 0$.

Теорема 8. Если $a \vdots b$и $a \neq 0$, то $|a| \geq |b|$.

Теорема 9. Для того, чтобы $a \vdots b$необходимо и достаточно чтобы $|a| \vdots |b|$.

Теорема10. Если$a_1 \vdots b$, $a_2 \vdots b$, …, $a_n \vdots b$, то $(a_1 \pm a_2 \ldots \pm a_n) \vdots b$.

Теорема 11. Если сумма чисел и $k-1$ слагаемое этой суммы делится на некоторое число с, то и $k-e$ слагаемое делится на c.

Свойства делимости широко применяются при решении задач [4].

1.6. Деление с остатком.

Определение. Разделить целое число a на целое число bс остатком – это значит представить его в виде

$$a = bq + r,$$

где qиrцелые числа,$0 \leq r < |b|$.

Основную роль во всей арифметике целых чисел играет теорема о делении с остатком.

Теорема 12. Для любых целых чисел aи bсуществует единственная пара чисел qи r, удовлетворяющих условиям, $a = bq + r$, $0 \leq r \leq |b|$.

Замечание. Если$a = bq + r$, $0 \leq r \leq |b|$, то qназывается неполным частным, а r – остатком от деления aна b.

Из теоремы о делении с остатком следует, что при фиксированном целом $m>0$ любое целое числоa можно представить в одном из следующих видов [1]:

$$a = m \cdot q$$

$$a = m \cdot q_1 + 1$$

$$a = m \cdot q_2 + 2$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$a = m \cdot q_{m-1} + (m-1)$$

При этом, если $a<m$, то будем иметь:

$$a = m \cdot 0 + a,$$

если$a>0$ и

$$a = m \cdot (-1) + (m + a),$$

если$a<0$.

1.7. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Определение.*Наибольшим общим делителем* (НОД) натуральных чисел x и y, называется такое наибольшее натуральное число, на которое делятся и x, и y.

Наибольший общий делитель обладает рядом свойств:

Свойства наибольшего общего делителя.

1. Наибольший общий делитель чисел aи bравен наибольшему общему делителю чисел bи a, то есть, НОД(a,b) = НОД(b,a).

Доказательство. Это свойство НОД напрямую следует из определения наибольшего общего делителя.

2. Если aделится на b, то множество общих делителей чисел aи bсовпадает с множеством делителей числа b, в частности, НОД(a,b)=b.

Доказательство. Любой общий делитель чисел a и b является делителем каждого из этих чисел, в том числе и числа b. С другой стороны, так как a кратно b, то любой делитель числа b является делителем и числа a в силу того, что делимость обладает свойством транзитивности, следовательно, любой делитель числа b является общим делителем чисел a и b. Этим доказано, что если a делится на b, то совокупность делителей чисел a и bсовпадает с совокупностью делителей одного числа b. А так как наибольшим делителем числа является само число b, то наибольший общий делитель чисел a и b также равен b, то есть, НОД(a,b)=b.

В частности, если числа aи bравны, то

$$\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a,a) = \text{НОД}(b,b) = a = b.$$

К примеру, НОД(78,78) = 78.

Доказанное свойство наибольшего делителя позволяет нам находить НОД двух чисел, когда одно из них делится на другое. При этом НОД равен одному из этих чисел, на которое делится другое число. Например, НОД(6,42) = 6, так как 42 кратно шести.

3. Если $a = b \cdot q + c$, где a, b, c и q – целые числа, то множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел b и c, в частности, НОД(a,b) = НОД(b,c).

Доказательство. Так как имеет место равенство $a = b \cdot q + c$, то всякий общий делитель чисел a и b делит также и c (это следует из свойства делимости). По этой же причине, всякий общий делитель чисел b и c делит a. Поэтому совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью общих делителей чисел b и c. В частности, должны совпадать и наибольшие из этих общих делителей, то есть, должно быть справедливо следующее равенство НОД(a,b) = НОД(b,c).

4. Если m – любое натуральное число, то НОД($m \cdot a$,$m \cdot b$)=$m \cdot$НОД(a,b).

Доказательство. Если умножить на m обе стороны алгоритма Евклида, то получим, что НОД($m \cdot a$,$m \cdot b$) = $m \cdot r_k$, а r_k– это НОД(a,b). Следовательно, НОД($m \cdot a$,$m \cdot b$) = $m \cdot$НОД(a,b).

На этом свойстве наибольшего общего делителя основан способ нахождения НОД с помощью разложения на простые множители.

5. Пусть p – любой общий делитель чисел a и b, тогда
6. НОД($a:p$,$b:p$) = НОД(a,b):p, в частности, если p = НОД(a,b) имеем

$$\text{НОД}(a:\text{НОД}(a,b),b:\text{НОД}(a,b)) = 1,$$

то есть числа a:НОД(a,b) и b:НОД(a,b) –взаимно простые.

Только что доказанное свойство наибольшего общего делителя лежит в основе приведения обыкновенных дробей к несократимому виду [5].

Теорема 13. Наименьшее общее кратное двух положительных чисел a и b равно произведению чисел a и b, деленному на наибольший общий делитель чисел a и b, то есть,

$$НОК(a,b) = a\cdot b:НОД(a,b).$$

Доказательство. Пусть М – какое-нибудь кратное чисел aи b. То есть, M делится наa, и по определению делимости существует некоторое целое число k такое, что справедливо равенство $M = a\cdot k$. Но M делится и на b, тогда $a\cdot k$делится на b.

Обозначим НОД(a,b) как d. Тогда можно записать равенства

$$a = a_1\cdot d \text{ и } b = b_1\cdot d,$$

причем $a_1 = a:d$и $b_1 = b:d$будут взаимно простыми числами. Следовательно, полученное условие, что $a\cdot k$делится на b, можно переформулировать так: $a_1\cdot d\cdot k$делится на $b_1\cdot d$, а это в силу свойств делимости эквивалентно условию, что $a_1\cdot k$делится на b_1.

В этом случае по свойству взаимно простых чисел, так как $a_1\cdot k$делится на b_1, и a_1не делится на b_1(a_1и b_1 - взаимно простые числа), то на b_1должно делиться k.Тогда должно существовать некоторое целое число t, для которого $k = b_1\cdot t$, а так как $b_1 = b:d$, то $k = b:d\cdot t$. Подставив в равенство $M= a\cdot k$вместо kего выражение вида $b:d\cdot t$, приходим к равенству $M= a\cdot b:d\cdot t$.

Так мы получили равенство $M = a\cdot b:d\cdot t$, которое даёт вид всех общих кратных чисел aи b. Из того, что aи b числа положительные по условию следует, что при $t = 1$ мы получим их наименьшее положительное общее кратное, которое равно $a\cdot b:d$. Этим доказано, что НОК(a,b) = $a\cdot b$:НОД(a,b).

Доказанная связь между наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем двух данных чисел позволяет найти НОК через НОД [5].

Также нужно рассмотреть два важных следствия из рассмотренной теоремы.

1. Общие кратные двух чисел совпадают с кратными их наименьшего общего кратного.

Это действительно так, так как любое общее кратное M чисел aи bопределяется равенством M = НОК(a,b)$\cdot t$при некотором целом значении t.

2. Наименьшее общее кратное взаимно простых положительных чисел aи bравно их произведению.

Обоснование этого факта достаточно очевидно. Так как aи bвзаимно простые, то НОД(a,b) = 1, следовательно,

$$\text{НОК}(a,b) = a\cdot b : \text{НОД}(a,b) = a\cdot b : 1 = a\cdot b.$$

ГЛАВА II. РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА«ГАРМОНИЯ ЧИСЕЛ» ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 10 – 11КЛАССА.

2.1. Анализ учебных программ по математике 5 – 11 классов.

Элементы теории делимости рассматриваются на протяжении всего обучения математики в школе. Рассмотрим учебную программу 5 – 11 классов на содержание элементов теории чисел.

Анализ учебной программы по математике 5-6 *классапо учебнику*С.М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина«Математика, 5», «Математика, 6»

В пятом классе изучается тема: «Делимость натуральных чисел». На данную тему отводиться 19 часов. В содержание темы: «Делимость натуральных чисел» входит: «Свойства делимости», «Признаки делимости на 10, на 5 и на 2», «Признаки делимости на 9 и на 3», «Простые и составные числа», «Делители натурального числа», «Разложение на простые множители», «Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа», «Наименьшее общее кратное», «Использование четности при решении задач».

Далее, элементы теории делимости можно выделить при изучении следующих тем: «Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями», «Умножение и деление обыкновенных дробей», «Умножение и деление положительных и отрицательных чисел».

Анализ учебной программы по математике 6-*го класса по учебнику* Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова «Математика, 6»

В начале первой четверти идет систематизация и обобщение темы «Делимость чисел». Далее, элементы теории делимости встречаются при изучении темы «Отношение чисел и величин», «Целые числа», но основная часть программы (38 часов) посвящена изучению темы «Рациональные числа», которая потом плавно переходит в изучение десятичных дробей и на протяжении всей четвертой четверти происходит закрепление, коррекция и систематизация знаний учащихся по теме «Дроби».

*Анализ учебной программы по алгебре*7*-го классапо учебнику*Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова «Алгебра, 7».

В начале учебного года проводится повторение по темам «Обыкновенные дроби» и «Действия с рациональными числами». Далее элементы теории чисел встречаются при изучении тем «Одночлены и многочлены», а именно при изучении деления одночлена и многочлена на одночлен. Далее, при изучении темы «Разложение многочленов на множители» можно выделить некоторые элементы теории делимости, а именно, вынесение общего множителя за скобки, применение нескольких способов разложения многочлена на множители. Так же, элементы теории делимости можно выделить в теме «Алгебраические дроби», а именно, приведение дробей к общему знаменателю и умножение и деление алгебраических дробей.

Анализ учебной программы по алгебре 8*-го классапо учебнику*Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова «Алгебра, 8».

Элементы теории делимости можно встретить в начале первой четверти при изучении темы «Алгебраические дроби. Арифметические операции над алгебраическими дробями». В основном элементы теории делимости рассмотрены вразделе «Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями»,«Умножение и деление алгебраических дробей», «Квадратные уравнения. Теорема Безу». Элементы теории сравнения встречаются так же как ив7 классе только в учебных программах, разработанных для профильного уровня по учебникуЮ.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова«Алгебра, 8».Здесь уже идет обобщение и систематизация материала, на изучение которого выделяется 4 часа.

Анализ учебной программы по алгебре 9*-го класса по учебнику*Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова«Алгебра, 9».

Основными темами в курсе 9 класса при рассмотрении теории делимости является темы «Квадратный трехчлен», «Разложение многочлена на множители» и «Деление многочлена на многочлен». Эта тема хорошо рассмотрена при углубленном изучении.

Элементы теории делимости и сравнения практически встречаются в начале учебного года при повторении курса алгебры 7 – 8 класса и в течение всего курса при изучении решений (разных видов) уравнений и при решении неравенств с двумя переменными (квадратных неравенств с одной переменной).

Анализ учебной программы по алгебре 10*-го и* 11*-го классапо учебнику*С.М. Никольского, С.М. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина «Алгебра и начала математического анализа 10 – 11 класс (базовый и профильный уровни).

Элементы теории делимости встречаются на протяжении всего 10 класса. В начале года учащиеся повторяют материал 7 – 9 класса, затем изучают действительные числа. Действительным числам посвящена целая глава. Здесь ученики закрепляют знания о делимости чисел, сравнение по модулю, задачи с целочисленными неизвестными. В дальнейшем ученики изучают тему, посвященную рациональным уравнениям и неравенствам, корень степени, степенные положительные числа. Большое внимание учителя уделяют подготовке к ЕГЭ (можно выделить некоторые элементы теории делимости и сравнения, в заданиях 19).

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы: элементы теории чисел прослеживаются на протяжении всего курса алгебры основной и старшей школы, но основные понятия и прикладные задачи рассматриваются только в 5 – 6 классе, далее теоретический материал даётся только в 10 классе.

Анализ методической литературы показал, что задачи по теории чисел представлены в государственной итоговой аттестации и едином государственном экзамене. Для устранения указанного «пробела» целесообразно рассматривать задачи по теории делимости при изучении ряда тем школьного курса «Алгебра 7-9».

2.2. Обзор учебников школьной программы.

При введении любой новой темы, в базовый курс школы возникает проблема изложения данного раздела (темы) в школьных учебниках.

Существует множество учебных пособий, включающих элементы теории чисел. Но для анализа мы выбрали несколько учебных пособий, которые могут применяться как на уроках, так и во внеурочной работе по математике:

1. «Математика. 5класс» и «Математика. 6 класс» под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.: ил. – (МГУ – школе).
2. «Математика. 6 класс» под редакцией Г. В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина; Рос.акад. наук, Рос. акад. образования, изд. «Просвещение». – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил. – (Академический школьный учебник).
3. «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» под редакцией Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С. Б. Суворова, С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.: ил.
4. «Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7 – 8 классов» под редакцией К.П. Сикорского. – 2-е изд., доп. М.: Просвещение, 1974. – 367 с.
5. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Планирование учебного материала для 8 класса с углубленным изучением математики: методическое пособие. М., Просвещение,1988. 78 с.

По нашему мнению, в этих учебниках хорошо изложен теоретический материал, хорошо подобран задачный материал и к данным учебникам разработаны методические рекомендации.Рассмотрим подробнее каждый из учебников.

«Математика. 5 класс» и «Математика. 6 класс» под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.: ил. – (МГУ – школе).

В 5 классе основы теории чисел рассматриваются в начале учебника. Особое внимание уделяется изложению материала делимости чисел. Материал доступен для учеников, так как выстроена четкая и структурированная линия изучаемых тем, а именно вначале четко дается определение делимости двух чисел, на основе повторения определений делимое, делитель, частное и остаток от деления за тем вводиться понятие кратного. Далее, идет изучение признаков делимости на 5, на 10 и на 2, а затем на 9 и на 3. При изучении этой темы четко подобран задачный материал. Задачи приведены в четкой последовательности по уровню усложненности (от более простой до более сложной). Так же приведены задачи олимпиадного уровня для более одаренных детей.

Следующей темой в данном учебнике является тема «Простые и составные числа». Вначале рассматриваются примеры простых и составных чисел, а затем на основании примеров вводятся определения простого и составного числа. Далее, нашему вниманию предлагается изучение темы «Разложение на простые множители». Она рассматривается на основе уже изученного материала простого и составного числа. Большее внимание уделяется не на рассмотрении теоретическогоматериала, а на рассмотрение практического материала: рассматриваются различные примеры и задачи на разложение на простые множители. Затрагиваются задачи более высокого уровня: олимпиадные, большое количество логических, занимательных задач для детей, желающих расширить и углубить знания.

Рассматривается тема НОД и НОК. Эти понятия вводятся на основе примеров разложения на простые множители. Очень хорошо подобран задачный материал. В конце раздела расположены дополнительные задачи и исторические сведения. Авторы учебника как можно глубоко рассмотрели теоретический и практический материал.

В шестом классе идет повторение, и закрепление раздела (темы) «Делимость чисел» на протяжении всего курса. Линия делимости чисел прослеживается в темах «Отношения, пропорции, проценты», «Целые числа», «Рациональные числа».

В учебнике очень обширный дополнительный материал, который будет полезен для самостоятельного изучения. Так же подобранный комплекс задач можно использовать в качестве самостоятельной и исследовательской работы.

«Математика. 6 класс», «Математика. 7 класс» под редакцией Г. В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина; Рос.акад. наук, Рос. акад. образования, изд. «Просвещение». – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил. – (Академический школьный учебник).

В6 классе основы теории чисел рассматриваются в начале учебника. Особое внимание уделяется изучению материала делимости чисел. Материал доступен для учеников, так как выстроен четкоматериал изучаемых тем, а именно вначале дается определение делимости чисел, на основании повторения определений делимое, делитель, частное и остаток от деления за тем вводиться понятие кратного. Далее, идет изучение признаков делимости на 5, на 10 и на 2, а затем на 9 и на 3. При изучении этой темы удачно подобран задачный материал. Задачи приведены в четкой последовательности по уровню усложненности (от более простой до более сложной). Так же приведены задачи повышенного, олимпиадного уровня для более одаренных детей.

Следующей темой в данном учебнике является тема «Простые и составные числа». Далее, изучается тема«Разложение на простые множители». Она рассматривается на основе изученныхпонятий простого и составного числа. Затрагиваются задачи более высокого уровня:

олимпиадные, некоторые задачи из ЕГЭ для детей, желающих расширить и углубить знания.

Рассматривается тема НОД и НОК. Эти понятия вводятся на основе примеров разложения на простые множители. Очень хорошо подобран задачный материал. В конце раздела расположены контрольные вопросы по изученным темам и дополнительные задачи. Авторы учебника как можно глубоко рассмотрели теоретический и практический материал.

В седьмом классе идет повторение, и закрепление раздела (темы) «Делимость чисел». На данный раздел (тему) по программе выделяется всего один час, хотя в учебнике очень обширный материал, который будет полезен для самостоятельного изучения. Так же подобранный комплекс задач можно использовать в качестве текущего контроля (самостоятельных работ или тестирования).

«Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» под редакцией Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С. Б. Суворова, С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.: ил.Зубарева И. И., Мордкович А. Г. «Математика. 6 класс».

Отличительные особенности данного учебника: при реализации учебной программы используется дополнительный материал - «Раздел для тех, кто хочет знать больше», создавая условия для максимального математического развития учащихся, интересующихся предметом, для совершенствования возможностей и способностей каждого ученика. В целях развития межпредметных связей, развития творческой активности учащихся, активизации поисково-познавательной деятельности используются творческие задания, задачи на моделирование, задачи из химии на определение процентного содержания раствора.

В основном элементы теории делимости рассмотрены вразделе «Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями»,«Умножение и деление алгебраических дробей», «Квадратные уравнения. Теорема Безу». Теория делимости хорошо рассмотрена при изучении тем «Квадратный трехчлен», «Разложение многочлена на множители» и «Деление многочлена на многочлен», но при углубленном изучении предмета.

«Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7 – 8 классов» под редакцией К.П. Сикорского. – 2-е изд., доп. М.: Просвещение, 1974. – 367 с.

Это учебное пособие предназначено для учащихся 7 – 8 классов, оно дополняет учебники: Н. Я. Виленкин«Математика. 6 класс», «Математика. 7 класс».

Книга состоит из семи разделов. В разделе содержатся теоретические сведения и соответствующие упражнения. В конце раздела приводятся упражнения для повторения. К каждому разделу даются дополнительные упражнения более высокого уровня сложности по сравнению с основными упражнениями. Первый раздел, состоящий из 15 параграфов, посвящен делимости чисел и простым числам. Упражнения к разделу можно разделить на 2 группы. Первую группу составляют задания на доказательство утверждений. Ко второй группе относятся задания, которые основываются не только на определение и теоремы, но и на умение проводить необходимые рассуждения, использовать ранее введенный алгебраический аппарат.

На наш взгляд, материал излагается не в четкой хронологии. Правильней было изучить темы: «Простые числа», «Взаимно простые числа», «Признаки делимости», «Наибольший общий делитель», «Наименьшее общее кратное», а затем уже тему «Сравнения».

Задачный материал подобран очень хорошо. В начале даются задачи на определение, затем на основе использования теорем, а затем на использование логического мышления и умения рассуждать.

Теоретический материал рассмотрен широко. Понятия рассматриваются более глубоко, вводя математические символы и определения, теоремы и утверждения записываются в символьной форме.

Вводятся новое понятия сравнения. Определение вводится на основании делимости чисел, что для детей трудно понимается. Стоит для начала рассмотреть пример делимости чисел и уже на основании примера дать определение.

М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Планирование учебного материала для 8 класса с углубленным изучением математики: методическое пособие. М., Просвещение, 1988. 78 с.

Пособие содержит весь теоретический и практический материал, необходимый для реализации обучения на трех уровнях. Включен разнообразный дополнительный материал: тесты по проверке готовности изучения каждой темы, таблицы ожидаемых результатов обучения, исследовательские и лабораторные работы, справочный материал.

Тренажеры представляют собой наборы заданий на отработку конкретных алгоритмов. В наборах заданий сложность постепенно увеличивается. Тренажеры можно использовать в качестве дополнительного задачника к учебнику, откуда можно подбирать домашние и индивидуальные задания для более слабых учащихся или, наоборот, для наиболее сильных.

Пособие содержит матричные тесты. Эта форма представления заданий наименее традиционна для школы. Такой тест представляет собой таблицу, вкоторой входная (верхняя) строка и входной (левый) столбец характеризуют изучаемый объект с различных точек зрения. Задача ученика установить соответствие между этими характеристиками. Природа характеристик, соответствие между которыми надо найти, может быть различной: «формула-картинка», «картинка-картинка», «текст-формула». Тесты носят скорее обучающий, чем контролирующий характер.

Самостоятельные работы (с/р) рассчитаны на 15 – 20 минут урока и призваны обеспечить контроль усвоения небольших разделов темы. Некоторые задания имеют повышенный уровень сложности. В этом случае количество заданий и время, отводимое на их выполнение, определяются учителем. Исследовательские работы (и/с) позволяют в более доступной, «осязаемой» форме подготовить учащихся к восприятию нового материала. Каждая работа состоит из 5 – 15 заданий, сгруппированных вокруг исследования одного объекта.

Очень хорошо рассмотрены темы «Квадратный трехчлен», «Деление многочлена на двучлен и многочлен». Подобранный практический материал разнообразный и посилен слабому ученику. Дополнительные задачи так же рассмотрены, вначале даются примеры с подобными заданиями, затем сами задания, которые с каждым разом усложняются. Встречаются задания олимпиадного уровня, которые рассчитаны на сильного ученика.

Проведенныйанализпозволяетсделатьследующиевыводы:теоретический и практический (задачный) материал, представленный в рассмотренных учебниках почти идентичен, но наилучшим способом, на наш взгляд, материал изложен в учебнике С. М. Никольского. В нем были рассмотрены следующие вопросы: свойства делимости; признаки делимости; простые и составные числа; делители натурального числа; наибольший общий делитель; наименьшее общее кратное. При рассмотрении каждого из них,авторы уделяют много внимания формированию доказательных умений. Хотя доказательство свойств и признаков делимости проводится на числовых примерах, методы, используемые при доказательстве, могут быть распространены на общий случай.

В учебниках «Алгебра» для 7-9 классов, предназначенных для общеобразовательных школ, эта тема почти не затрагивается на базовом уровне. Также следует отметить, что в основной школе завершается изучение методов решения текстовых задач, однако при изучении курса алгебры (на базовом уровне) почти не рассматриваются текстовые задачи на использование свойств делимости, понятий наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного.

С другой стороны, анализ методической литературы показал, что задачи по теории делимости представлены в государственной итоговой аттестации.Например, в 2015 году в демоверсии ЕГЭ на базовом уровне предложена задача «Сумма цифр трехзначного числа a делится на 13. Сумма цифр a+5 также делится на 13. Найдите число a»; в 2016 году – задача «Приведите пример трехзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9».

Для устранения указанного «пробела» целесообразно рассматривать задачи по теории делимости при изучении ряда тем школьного курса «Алгебра 7-9».

Для этого в содержании школьного курса алгебры 7-9 классов были выявлены темы, при изучении которых можно использовать задачи по теории делимости.

В курсе «Алгебра 7» – темы «Формулы сокращенного умножения», «Разложение на множители», «Решение линейных уравнений», «Система линейных уравнений».

Например, при изучении формул сокращенного умножения можно предложить учащимся следующую задачу.

Задача. Докажите, что число составное:

а) 288; б) 323; в) 1599; г) 1000027.

В курсе «Алгебра 8» – тема «Квадратные уравнения».

Квадрат разности корней уравнения $x^2 + px + 405 = 0$равен 144. Найдите p.

Вкурсе «Алгебра 9» – темы «Квадратный трехчлен», «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Например, при изучении в рамках темы«Квадратный трехчлен» вопроса, связанного с выделением полного квадрата двучлена, можно рассмотреть задачу.

Задача (С. Жермен). Доказать, что каждое число вида a^4+4 есть составное (еслиa не равно1).

2.3. Программа элективного курса «Гармония чисел»для учащихся 10 – 11 класса

I. Пояснительная записка

Элективный курс «Гармония чисел» является предметно-ориентированным и предназначен для расширения и углубления теоретических и практических знаний учащихся.

Актуальность курса определяется значимостью понимания школьниками особого положения теории чисел в школьной программе. Но программа школьного курса ограничена и не позволяет в полном объеме рассмотреть задачи на использования алгоритма Евклида при нахождении НОД и решении диофантовых уравнений, также подробного рассмотрения признаков делимости чисел, многочленов, сравнения чисел. Эти задачи часто включаются в письменные работы при поступлении в различные учебные заведения и вызывают у учащихся трудности, обусловленные необходимостью понимания закономерностей, наличия навыка анализа конкретного случая на основе известных общих свойств объекта, систематичности и последовательности в решении, умения объединять рассмотренные частные случаи в единый результат. Разрешить трудности учащихся и рассмотреть вышеназванные задачи может данный элективный курс «Гармония чисел».

*Место и роль курса в образовательном процессе.*Курс «Гармония чисел» предназначен для подготовки школьников к прохождению ЕГЭ, в частности решения задач 19. Реализуется в 10 - 11 классе. Он, с одной стороны, поддерживает изучение основного курса алгебры, направлен на систематизацию знаний, реализацию внутрипредметных связей, а с другой – служит для построения индивидуального образовательного пути. Курс формирует такие умения и навыки как логичность и самостоятельность мышления, умение обобщать и систематизировать, навыки в решении задач.

Предлагаемый курс, как и любой другой, улучшает имидж и повышает конкурентоспособность школы, так как реализация данного курса дает более глубокие знания по математике, увеличивает уровень интеллектуального развития учащихся, что благоприятствует их дальнейшему обучению.

Цель курса: перейти от репродуктивного уровня усвоения материала (простого решения задач) к творческому; научить применять знания алгоритма Евклида, свойств простых и составных, дружественных, фигурных, совершенных чисел, составление диофантовых уравнений при решении задач.

Приобретенные в процессе практической деятельности знания и умения помогут учащимся в формировании ключевых компетенций: готовности учащихся использовать усвоенные знания, умения и способы деятельности в реальной жизни для решения практических задач.

Содержание курса рассчитано на два года (10 – 11 класс) и полностью соответствует требованиям к уровню подготовки выпускников по математике на ступени основного общего образования, а именно: свободно, правильно излагать свои мысли в устной и письменной форме, развивать свою мыслительную деятельность, абстрактное мышление. Это связанно с тем, что в это время учащиеся располагают всеми знаниями, которые нужны на начальном этапе изучения элективного курса и углубят свои знания на следующем этапе элективного курса. Данный курс не дублирует программы по математике, а лишь опирается на знания и умения, полученные учащимися, совершенствует их, восполняет возникшие проблемы в обучении, давая широкий простор для развития самостоятельности и творческой деятельности. Учащиеся более подробно знакомятся с теорией чисел (с делимостью чисел, с делимостью многочленов и сравнением).

Курс рассчитан на 2 года: 34 часа в год, 1 час в неделю.

Занятия проводятся в форме лекций учителя, бесед с учащимися, практикумов, консультаций.

Основные цели курса:

1. Расширение кругозора учащихся;

2. Развитие математического мышления и формирование активного познавательного интереса к предмету;

3. Воспитание мировоззрения и ряда личностных качеств, средствами углубленного изучения математики.

4. Приобщение учащихся к исследовательской деятельности;

5. Подготовка одаренных школьников к олимпиадам;

6. Систематизация, обобщение знаний и умений по математике.

Обучение по данной программе имеет ряд методических особенностей:

1. Подача материала выстраивается от простого к сложному.

2. Новый материал дается на основе того, что уже изучено.

3. Постепенно вырабатываются навыки правильного абстрактного и логического мышления.

4. Поэтапное обучение логике построения решения математических задач.

5. Знакомство с творческой деятельностью и самостоятельностью.

6. Каждое правило и утверждение сопровождается соответствующими примерами.

7. Набор тем полностью соответствует школьной программе, охватывает все возможные варианты делимости для этого этапа обучения.

Основные требования к знаниям и умениям учащихся.

Для успешного усвоения этих тем ученик должен иметь следующий исходный уровень знаний и умений:

– знать определения делимости чисел;

– знать признаки делимости на 5, на 10 и на 2;

– знать признаки делимости на 3 и на 9;

– знать понятие делителя, делимого и кратного;

– знать определение простого и составного числа;

– знать алгоритм разложения на простые множители;

– знать определение НОД и НОК;

- знать определение понятия взаимно простые числа;

– уметь находить НОД и НОК;

– уметь применять алгоритм разложения на простые множители;

– уметь применять признаки делимости;

– уметь отличать простое число от составного;

– уметь находить остаток и частное при делении многочленов;

– уметь проводить преобразования буквенных выражений;

– уметь распознавать признаки делимости;

–уметь применять основные факты математического анализа для решения задач, применения признаков делимости и их комбинация;

–уметь использовать свойства сравнения для решения задач.

Планируемые результаты.

По окончании курса учащиеся будут **знать**:

1. основные приемы решения задач по элементам теории чисел;
2. нестандартные методы решения задач;

уметь:

3. строить и анализировать предполагаемое решение поставленной задачи;
4. пользоваться на практике методикой решения задач по элементам теории чисел;
5. решать задачи 19 КИМ ЕГЭ.

II. Тематическое планирование.

№	Наименование темы	Кол-во часов
	10 класс	
	Тема 1. Делимость чисел.	**40**
1	Введение в историю математики.	1
2	Свойства делимости. Решение задач на доказательство.	5
3	НОД и НОК. Основные свойства.	4
4	Алгоритм нахождения НОД и НОК.	5

5	Признаки делимости на 4, 6, 7 и на 8.	5
6	Признаки делимости на 11, 12, …, 17.	5
7	Признаки делимости. Обобщение и систематизация. Решение задач.	5
8	Решение олимпиадных задач.	4
	11 класс	
9	Признаки делимости суммы и разности.	3
10	Признаки делимости суммы, разности и произведения.	3
	Тема 2. Делимость многочленов.	**8**
11	Делимость многочленов. Разложение многочленов на множители.	4
12	Нахождение НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида.	4
	Тема 3. Сравнение чисел.	**20**
13	Сравнение чисел и их свойства.	2
14	Сравнение чисел и их свойства. Самостоятельная работа.	2
15	Сравнение первой степени.	5
16	Обобщение, систематизация и коррекция знаний по изученным темам.	2
16	Решение задач №19 КИМ ЕГЭ	9
	Итого:	**68**

III. Содержание программы

1. Введение в историю математики.
2. Делимость чисел.Свойства делимости. Решение задач на доказательство. НОД и НОК. Основные свойства НОД и НОК. Алгоритм нахождения НОД и НОК. Признаки делимости на 4, 6, 7 и 8.

Признаки делимости на 11, 12, …, 17. Обобщение и систематизация. Решение задач. Решение олимпиадных задач.

3. Делимость многочленов. Разложение многочленов на множители. Нахождение НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида.
4. Сравнение.Сравнение чисел и их свойства. Сравнение первой степени. Обобщение, систематизация и коррекция знаний по изученным темам. Решение задач №19 КИМ ЕГЭ.

Формы контроля знаний учащихся.

Тестирование учеников, анализ творческих работ учащихся учителем, оценивание рефератов.

Критерии оценивания:

«Высокий уровень» - учащийся освоил теоретический материал и сознательно применяет при решении конкретных задач; в работе над индивидуальными заданиями продемонстрировал умение работать самостоятельно, творчески.

«Средний уровень» - учащийся освоил идеи и методы данного курса так, что может справиться со стандартными заданиями, индивидуальные задания выполняет прилежно (без проявления творческих способностей)

«Низкий уровень» - учащийся освоил наиболее простые идеи и методы данного курса так, что он может выполнить простые задания.

Примерные темы рефератов:

1. Элементарные теоремы о делимости.
2. Решето Эратосфена.
3. Формула Эйлера.
4. Алгоритм Евклида.
5. Основные свойства сравнений.
6. Признаки делимости.
7. Работы по теории чисел русских и советских математиков (Л. Эйлер, П.Л. Чебышев, Е.И. Золотарёв и др.)

Темы творческих работ:

1. Составить таблицу простых чисел, больших числа 200 и не превосходящих числа 300.
2. Выведите признак делимости на 2^n.
3. Выведите признак делимости на 5^n.
4. Выведите признак делимости на 13.
5. Выведите признак делимости на 17.
6. Основные теоремы теории сравнения по модулю.
7. Решение уравнений в целых числах методом перебора.
8. Решение нелинейных уравнений методом разложения на множители.

2.4. Циклы задач по элементам теории чисел

Необходимо отметить, что особое место в решении задач 19 занимает теоретический материал для их решения. Он преподается достаточно рано (в 5, 6-ом классах), а некоторые задачи не входят в обязательную программу и изучаются только в профильных классах (с 7 по 9-ый). Поэтому для успешного решения задач 19 следует повторить школьный материал по теории чисел. В своей учебно-исследовательской работе мы приводим решения задач по арифметике и алгебре №19 ЕГЭ, давно включаемых во вступительные экзамены в ведущих вузах России.

Рассмотрев задачи изкниг по подготовке к ЕГЭ 2015 – 2016, демонстрационных вариантов ЕГЭ 2017 и пособий для поступающих в ВУЗы, мы выделили следующие классы задач:

1. Делимость и признаки делимости.
2. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.
3. Текстовые задачи.

Все необходимые теоретические сведения для решения задач по теории чисел можно найти в учебниках по алгебре, по алгебре и началам анализа с 7 по 10 класс, профильный уровень.

Делимость и признаки делимости.

Пример 1.

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр? [11]

Решение.

Пусть данное число равно $100a + 10b + c$, где a, b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k, то выполнено $100a + 10b + c = ka + kb + kc$.

а) Если частное равно 90, то $100a + 10b + c = 90a + 90b + 90c$; $10a = 80b + 89c$, что верно, например, при $c = 0$, $b = 1$, $a = 8$: частное числа 810 и суммы его цифр равно 90.

б) Если частное равно 88, то

$$100a + 10b + c = 88a + 88b + 88c \leftrightarrow 12a = 78b + 87c.$$

Получаем:

$$a < 10 \leftrightarrow 12a < 120 \leftrightarrow 78b + 87c < 120.$$

Значит, $b = 0$, $c = 1$или $b = 1$, $c = 0$. Но ни 78, ни 87 не делится на 12. Значит, частное трёхзначного числаи суммы его цифр не может быть равным 88.

в) Пусть k— наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100 и суммы его цифр. Тогда

$$100a + 10b + c = ka + kb + kc \leftrightarrow (100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c.$$

Учитывая, что $b + c > 0$, получаем:

$$9(100 - k) \geq (100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c \geq (k - 10)(b + c) \geq k - 10,$$

откуда $9(100 - k) \geq k - 10 \leftrightarrow 10k \leq 910 \leftrightarrow k \leq 91$.

Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр равно 91.

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.

Пример 2.

За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 3$, $d = 2$.

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$.

в) Каковы все возможные значения d, если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?[15]

Решение.

а) Каждая из двух девочек могла выиграть оба раза у всех троих мальчиков, получив в сумме 6 очков. Сыграв две партии друг с другом, девочки распределили между собой ещё 2 очка. Всего 6 + 6 + 2 = 14 очков.

б) Играя по две партии каждый с каждым, десять детей играют всего

$2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 90$

партий. В каждой партии вне зависимости от её исхода разыгрывается одно очко. Поэтому всего набрано 90 очков.

в) Всего детей было $7d + d = 8d$, играя по две партии каждый с каждым, они сыграли между собой

$$2 \cdot \frac{8d(8d-1)}{2} = 8d(8d-1)$$

партий и разыграли $8d(8d - 1)$ очков. Из них у мальчиков три четверти очков, а у девочек — одна четверть, то есть у девочек $2d(8d - 1) = 16d^2 - 2d$ очков. Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2 \cdot d \cdot 7d$очков, а играя между собой, девочки распределили $d(d - 1)$ очков. Поэтому наибольшее количество очков, которое могли набрать девочки, равно $14d^2 + d(d - 1)$. Тем самым, имеем: $16d^2 - 2d \leq 15d^2 - d \leftrightarrow d^2 \leq d$. Следовательно, девочек не могло быть больше одной.

Если девочка была одна, то мальчиков было семеро. Они сыграли 56 партий и разыграли 56 очков. Девочка набрала 14 очков, выиграв у каждого из мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 42 очка.

Ответ: а) 14; б) 90; в) 1.

Пример 3.

Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\frac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие значения x. [20]

Решение.

По условию

$$x \geq \frac{x^2+6}{7} \geq \frac{6}{7} \geq 0.$$

Поэтому, если обозначить

$$\frac{x^2+6}{7} = b,$$

то $x = \sqrt{7b-6}$. Тогда число b — целое и должно удовлетворять системе:

$$\begin{cases} b \leq \sqrt{7b-6}, \\ b > \sqrt{7b-6} - 1, \\ b \geq \frac{6}{7} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 7b + 6 \leq 0, \\ b^2 - 5b + 7 > 0, \\ b \geq \frac{6}{7}. \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех b, а из первого неравенства находим: $1 \leq b \leq 6$.Следовательно, $x = \sqrt{7 \cdot 1 - 6} = 1$, и $x = \sqrt{8}, x = \sqrt{15}, x = \sqrt{22}, x = \sqrt{29}$ и $x = 6$.

Ответ: 1, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{29}$, 6.

Пример 4.

Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? [21]

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2 + \ldots + 7)(13 + \ldots + 21) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{13+21}{2} \cdot \Big|9\right) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$(-2 +3 -4 +5 +6 -7)(-13 -14 -15 -16 +17 -18 +19 +20 +21) = 1 \cdot 1 = 1.$

Ответ: 1 и 4131.

Пример 5.

Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9? [11]

Решение.

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечетных и на четных местах, делится на 11.

Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5. Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечетных и на четных местах, становится равной 11.

Меняя местами, например, 1 и 4 или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

Пример 6.

Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму — целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма — это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисела$_1$, …, а$_n$ равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}$. Оказалолсь, что рейтинги всех кинофильмов — это различные целые числа.

а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?

б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?

в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма? [27]

Решение.

а) Заметим, что если рейтинг кинофильма — целое число, то произведение оценок двух экспертов — точный квадрат. Произведение двух чисел от 1 до 10 не превосходит 90. Под это условие попадают квадраты чисел от 1 до 9. Но числа 1, 25, 49, 64 и 81 не представляются в виде произведения двух различных целых чисел от 1 до 10. Значит, для двух экспертов может быть не более четырёх кинофильмов.

б) Допустим кинофильмы получили такие наборы оценок: (1; 2 4), (2; 4; 8), (1; 3; 9), (4; 6; 9). Тогда среднее геометрическое этих наборов — различные целые числа. Условие задачи выполняется.

в) Если кинофильм получил оценки (3; 6; 8; 9), то условие задачи выполняется. Если экспертов больше четырёх, то произведение их оценок делится на а4, где а — рейтинг кинофильма. Произведение всех возможных оценок 10! делится только на 15 и 2^5. Значит, целый рейтинг может равняться только 1 и 2 соответственно. Но среди чисел от 1 до 10 только одна степень единицы и четыре степени двойки. Значит, экспертов не могло быть более четырёх. Таким образом, наибольшее возможное число экспертов — это 4.

Ответ: а) нет; б) да; в) 4.

Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.

Пример 7.

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A. [22]

Решение.

Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A.

210 = 2 · 3 · 5 · 7. Поэтому числа, составляющие множество A — это делители 210. Всего делителей 16:1,2,3,5,7,2 · 3,2 · 5,2 · 7,3 · 5,3 · 7,5 · 7,2 · 3 · 5,2 · 3 · 7,2 · 5 · 7,3 · 5 · 7,2 · 3 · 5 · 7.

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. A произведение всех чисел из A делится на 1920 = 27 · 3 · 5. Поэтому среди чисел, составляющих A, должно быть, по крайней мере семь четных, а их всего восемь:2,2 · 3,2 · 5,2 · 7,2 · 3 · 5,2 · 3 · 7,2 · 5 · 7,2 · 3 · 5 · 7.

Если число 2 входит в A, то любое другое число из A должно делится на 2. Значит, A={2,6,10,14,30,42,70,210},
но произведение этих чисел равно 28 · 34 · 54 · 74 = (24 · 32 · 52 · 72)·2.
Значит, 2 не входит в A, а числа
2 · 3,2 · 5,2 · 7,2 · 3 · 5,2 · 3 · 7,2 · 5 · 7,2 · 3 · 5 · 7
входят в A, но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный — 3 · 5 · 7.
Ответ: A = {6,10,14,30,42,70,105,210}

Пример 8.

Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях? [27]

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n винтиков в каждом. Во втором случае коробок (x + 2), пакетиков в коробке 2, а винтиков в пакетике (n + 3). По условию задачи получаем:

$$3nx = 2(n+3)(x+2) \leftrightarrow 3nx = 2(n+3)(n+2).$$

Откуда

$$n = \frac{6x+12}{x-4} = 6 + \frac{36}{x-4} = 6\left(1 + \frac{6}{x-4}\right).$$

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что — натуральный делитель числа 36. Количество винтиков при этом

$$f(x) = 3nx = 18\left(x + \frac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x + \frac{24}{x-4}\right) + 108.$$

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 840.

Примечание.

Перебор можно заменить исследованием функции.

Функция

$$y = x + \frac{24}{x-4}$$

монотонно убывает при $4 < x \leq 2 + \sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \geq 4 + 2\sqrt{6}$. Следовательно, наибольшее значение функции f(x) достигается, если (x – 4) — наибольший или наименьший натуральный делитель числа 36.

Если x – 4 = 1, то x = 5,

$$f(5) = 18(5 + 24) + 108 = 630.$$

Если x – 4 = 36, тох = 40,

$$f(40) = 18(40 + \frac{2}{3}) + 108 = 840.$$

Пример 9.

Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству 3x = 8y – 29.

А) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

Б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

В) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение.

А) Для чисел x = 17 и y = 10 выполняется условие 3x = 8y −29, q = 170, d = 1, $\frac{q}{d} = 170$.

Б) и в) При x = 1 и y = 4 выполняется равенство 3x = 8y– 29 и $\frac{q}{d} = 4$. Покажем, что никакое значение не реализуется.

Если x = y, то x = y =$\frac{29}{5}$, что невозможно, поскольку числа x и y — натуральные. Пусть для определённости x<y и x = ad, ay = bd. Тогда натуральные числа a и b взаимно просты и a<b. Получаем $q = \frac{xy}{d} = abd$ откуда $\frac{q}{d} = ab$.

Если $\frac{q}{d} = 1$, то a = b, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 2$, то a = 1, b = 2 и, значит, y = 2x, откуда $x = \frac{29}{13}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 3$, то a = 1, b = 3 и, значит, y = 3x, откуда $x = \frac{29}{21}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 4.

Текстовые задачи.

В данных задачах можно составить линейное целочисленное уравнение, решение которого, а, следовательно, решение задачи, можно получить с использованием алгоритма решения линейных целочисленных уравнений.

Пример 10.

Ваня купил раков вчера мелких по цене 5,10 руб. за штуку, а сегодня по 9,90 руб., но очень крупных. Всего на покупку он истратил 252 руб., из них переплаты из-за отсутствия сдачи составили от 1,60 до 2 руб. Сколько Ваня купил раков вчера и сколько сегодня? [23]

Решение.

Переведем все числа из рублей в копейки для того, чтобы они стали целыми. Получаем: 510 коп., 990 коп., 25 200 коп., 160 коп., 200 коп. Пусть Ваня вчера купил x раков, а сегодня – y раков ($x, y \in N$). Тогда получаем уравнение: $510x + 990y = z$, где z – общая сумма денег, потраченная на покупку раков ($z \in N$). Для того, чтобы уравнение имело решения, нужно НОД $(510, 990) = d, z \vdots d$(по достаточному признаку решения линейных целочисленных уравнений). НОД $(510, 990) = 30$, т.к. $510 = 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 3$, $990 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 9$. Так как Ваня заплатил за раков 25 200 копеек, и переплата из них составила от 160 до 200 коп., то zлежит в промежутке от 25 000 до 25 040 (причем $z \in N$). Так как число $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, то переплату и общую сумму денег, потраченную на раков, можно сократить в 10 раз.

Получаем, что переплата лежит в промежутке от 16 до 20, значит, общая сумма денег лежит в промежутке от 2500 до 2504 (все рассматриваемые промежутки состоят только из натуральных чисел).

Подбором из промежутка 2 500, 2 504, в который входят натуральные числа, находим число, делящееся на 3 – это число равно 2 502. Преобразуем его:

$$510x + 990y = 25\,020 \leftrightarrow 17x + 99y = 834 \ (*).$$

Применим для полученного уравнения алгоритм решения линейного целочисленного уравнения.

$$17x + 99y = 1,\ a = 17,\ b = 99;\ b = p_0 a + r_0;\ p_0 = 1,\ r_0 = 16.$$

$$a = p_1 r_0 + r_1;\ p_1 = 1,\ r_1 = 1.$$

$$1 = r_1 = a - p_1 \cap r_0 = a - p_1 r_0 = a - p_1 \cdot b - p_0 a.$$

Подставляем вместо p их значения. $1 = 2a - b \rightarrow x_0' = 2$, $y_0' = -1$. Частным решением уравнения (*) будут: $x_0 = 1668$, $y_0 = -834$.

Общее решение: $x = x_0 - b \cdot d \cdot t = 1668 - 33t$; $y = y_0 + a \cdot d \cdot t = -834 + 17t$,

где t – целое число. Так как y – натуральное число, то $y > 0$. Поэтому найдем t, при котором$y > 0$.

$-834 + 17t > 0 \rightarrow t > 83417 \rightarrow t \geq 50$, т.к. t – целое число. При $t = 50$, $x = 18$, $y = 16$. Больше, чем 50, число t быть не может, т.к. тогда x будет отрицательным числом, а по условию оно натуральное.

Ответ: 18, 16.

Пример 11.

В клетке сидят кролики и фазаны. Всего у них18 ног. Узнать сколько в клетке тех и других.Укажите все решения. [11]

Решение.

Пусть x – количество кроликов, y –количество фазанов, тогда имеем уравнение$4x + 2y = 18$ или $2x + y = 9$.

Если $x = 1$, то $y = 7$.

Если $x = 2$, то $y = 5$.

Если $x = 3$, то $y = 3$.

Если $x = 4$, то $y = 1$.

При $x = 5$ получаем $2 \cdot 5 = 10 > 9$.

Ответ: (1;7), (2;5), (3;3), (4;1).

Пример 12.

Решите в натуральных числах уравнение$5x + 8y = 39$. [20]

Решение.

Для уменьшения перебора вариантоврассмотрим неравенства

$$\begin{cases} 5x = 39 - 8y \geq 0 \\ 8y = 39 - 5x \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

Проведем перебор по неизвестной y.

Если $y = 1$, то $x = 6{,}2$ не является натуральным числом.

Если $y = 2$, то $x = 4{,}6$ не является натуральным числом.

Если $y = 3$, то $x = 3$.

Если $y = 4$, то $x = 1{,}4$ не является натуральным числом.

Ответ: (3; 3).

Пример 13.

Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и160 кг. Сколько было контейнеров первого исколько второго вида, если вместе они весят 3тонны? Укажите все решения. [15]

Решение.

Обозначим количествоконтейнеровпервого вида через x, второго – через y. Получаем уравнение $130x + 160y = 3000$ или $13x + 16y = 300$. Далее имеем $13x + 13y + 3y = 13\cdot23+1$, $3y – 1 = 13(23 – x – y)$. Отсюда следует, что разность $3y – 1$делится на 13.

Если $3y – 1 = 0$, то yне является натуральным числом.

Если $3y – 1 = 13$, то y не является натуральным числом.

Если $3y – 1 = 26$, то $y = 9$ и $x = 12$.

Если $3y – 1 = 39$, то yне является натуральным числом.

Если $3y – 1 = 52$, то yне является натуральным числом.

Если $3y – 1 = 65$, то $y = 22$, но $16\cdot22 = 352>300$.

Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 по 160 кг.

Пример 14.

У осьминога 8 ног, а у морской звезды 5.Сколько в аквариуме тех и других, если всего уних 39 ног? [27]

Решение.

Пустьх – количество осьминогов, у –количество морских звезд, тогда получаем уравнение 8х + 5у = 39 . Выразим у из уравнения и
выделим целую часть:

$$y = \frac{39 - 8x}{5} = 7 - x - \frac{3x - 4}{5}.$$

Отсюда следует, что разность 3х – 4 делится на 5.

Если 3х – 4 = 0, то х не является натуральным числом.

Если 3x − 4 = 5, то x = 3 и y = 3.

Если 3x − 4 = 10, то x не является натуральным числом.

Если 3x − 4 = 15, то x не является натуральным числом.

Если 3x − 4 = 20, то x = 8, но 8·8 = 64 > 39.

Ответ: 3 и 3.

Замечание. В двух последних примерах использовано отношение делимости, при этом уравнения приводились к разному виду.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение заданий на делимость, прежде всего, связано с умением моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи,исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.Поэтому в данной работе были рассмотрены примеры задач на делимость, для решения которых нужны были не только теоретические знания, но и умения строить математические модели.

Целью данной работы быловыявление глубины изучения элементов теории чисел в школьном курсе математики и разработка программы элективного курса для учащихся 10 – 11 класса.

В первой главе «Основные понятия» представлен теоретический материал по следующим вопросам: основные понятия и свойства делимости; деление с остатком; простые и составные числа; НОД и НОК; количество и сумма делителей натурального числа; признаки делимости. Теоретический материал проиллюстрирован примерами. Всего рассмотрено11 примеров. В основном примеры взяты из сборников для подготовки к ЕГЭ.

Вторая глава носит практический характер. В ней проведен анализ учебных программ по математике 6 – 11 классов, обзор учебников школьной программы,разработана программа элективного курса для учащихся 10 – 11 класса, выделены типы заданий 19 из ресурсов [11], [15], [21]. Нами рассмотрены следующие типы: делимость целых чисел; НОД и НОК; разные текстовые задачи на числа. Для обучения школьников решать данные типы задания 19 предложены задания, которые могут рассматриваться в рамках факультативного курса по подготовке к ЕГЭ по математике (профильный уровень). Всего рассмотрено 14 заданий с решением для совместного обсуждения с учителем. Контроль за выполнением данных заданий предполагается организовать в дистанционной форме.

В процессе выполнения работы была достигнута поставленная цель – выявить глубину изучения элементов теории чисел в школьном курсе математики и разработать программу элективного курса для учащихся 10 –

11 класса, организована система подготовки школьников к решению задания 19 из ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Решены сформулированные в начале исследования задачи:

1. Описано математическое содержание темы «Элементы теориичисел в школьном курсе математики».

2. Проанализированы учебные программы и учебники по математике.

3. Разработана программа элективного курса и циклы задач по элементам теории чисел, реализующие внутрипредметные связи данной темы с основными темами школьного курса алгебры.

Результаты данной работы могут быть применены учителями математики при проведении факультативных занятий со школьниками 10-11-хклассов в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень), а также студентами математических факультетов в период прохождения педагогической практики.

СПИСОКИСПОЛЬЗОВАННЫХИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для студентов – заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов (Н. А. Казачек,Г. Н. Перлатов,

Н. Я. Виленкин, А. И. Бородин; Под ред. Н. Я. Виленкина) —2-е изд.—М.: Просвещение, 1984. -192 с.

2. Александров В.А., Горшенин С.М. Задачник-практикум по теории чисел/В.А. Александров, С.М. Горшенин.-М.: Просвещение, 1972.- 81 с.

3. Алфутова Н.Б. Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. —М.: МЦНМО, 2002.— 264 с.

4. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. - М.: Мир, 1987. - 416 с.

5. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.— 1985.— 504 с. - 3-е изд.доп.

6. Брадис В. М., Минковский В. Л., Еленев Л. К. «Ошибки в математических рассуждениях» / В.М. Брадис, В.Л. Минковский, Л.К. Еленев. - М.: Наука, 1967. – 367с.

7. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб - М.: Просвещение, 1966. - 384 с.

8. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов - Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.- 176 с.

9. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов - М.-Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952. – 380с.

10. Виленкин Н.Я. и др. Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/ Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288с.: ил.

11. Вольфсон Г.И., Пратусевич М.Я., Рукшин С.Е., Столбов М.К., Ященко И.В. «ЕГЭ 2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра», Москва, Издательство МЦНМО, 2013. - 256 стр.

12. Воробьев Н. Н. « Признаки делимости». — 4-е изд. — М.: Наука, 1988. — Т. 38. — 94 с.

13. Вейль А. Основы теории чисел. - М.: Мир, 1972 –408 с.

14. Гашков С.Б., Чубариков В.Н., Садовничий В.А. (ред.) Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. 3-е издание, исправленное. - Дрофа, 2005. - 320 с.

15. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел М.: Просвещение, 1964. - 144 с.

16. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел.- М.: Наука, 1965. -176с., ил.

17. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. - М.: Издательский центр "Академия", 2007. - 304 с.

18. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах, т. 2. Геометрия — М.: Наука. 1987.—416 с.

19. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах, т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ.— М.: Наука, 1987.—432 с.

20. Кочева А. А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Ч. III. Для студентов-заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1984. — 41 с.

21. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел.- М.: «Просвещение», 1970. - 128 с.

22. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учебное пособие для педагогических институтов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с., ил.

23. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учебное пособие для студентов физико–математических специальностей педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с., ил.

24. Михелович Ш.Х. Теория чисел. -2-е изд. - М.: Высшая школа, 1967. - 336 с.

25. Нестеренко Ю. В. Теория чисел : учебник для студ. высш. учеб.заведений / Ю. В. Нестеренко. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. - 272 с.

26. Оре О. Приглашение в теорию чисел: Пер с англ. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 128 с.

27. Просветов Г. И. Теория чисел: задачи и решения: Учебно-практическое пособие М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2010. — 72 с.

28. Чубаров И. А. «Математика. Решение задания №4 для 8-х классов (2000-2001 учебный год)» МФТИ, 2001.