ЛИТЕРАТУРА :

1. Пажи Д.Г.,Галустов В.С. Основы техники распыливания жидкостей. М.: Химия, 1984
2. Галустов В.С. Прямоточные распылительные аппараты в теплоэнергетике. М.: Энергоатомиздат, 1989
3. Дж.Форсайт,М.Малькольм,К.Моулер Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980

КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ МОДАЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С МНК-ОЦЕНКОЙ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ[1]

А. В. Маматов, В. Н. Подлесный, В. Г. Рубанов

Россия

В практике проектирования систем автоматического управления в качестве метода параметрической идентификации объекта управления широко используется метод наименьших квадратов (МНК). При этом синтез системы осуществляется на основе точечных оценок параметров. Однако из теории регрессионного анализа известно, что истинное значение вектора параметров с некоторой доверительной вероятностью принадлежит многомерному эллипсоиду. В связи с этим актуальной является задача анализа качества синтезированной системы (в частности, ее модальных свойств) с учетом эллиптической неопределенности модели объекта управления.

Рассмотрим линейную дискретную систему, включающую регулятор, объект управления и отрицательную обратную связь. Пусть $W_i(\lambda) = R_i(\lambda) / P_i(\lambda)$, $i = 0,1$ - передаточные функции соответственно объекта управления и регулятора, где $R_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{m_i} r_{ik}\lambda^k$, $P_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{n_i} p_{ik}\lambda^k$; $\lambda = z^{-1}$ - оператор запаздывания; σ - коэффициент обратной связи, равный 1 для замкнутой системы и равный 0 для разомкнутой системы.

Предположим, что часть коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции объекта управления известны точно, а другая часть определена с использованием процедуры метода наименьших квадратов. Введем обозначения $\mathbf{r}_i = \left[r_{i0} \ldots r_{im_i}\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{p}_i = \left[p_{i0} \ldots p_{in_i}\right]^{\mathrm{T}}$, $i = 0,1$, и сформируем из коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции объекта управления вектор $\mathbf{a}_0 = \left[\mathbf{r}_0^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{p}_0^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$. Вычеркиванием из вектора коэффициентов объекта управления $\mathbf{a}_0$ элементов с точно заданными значениями получим

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ (грант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета).

вектор параметров $\mathbf{b}$. Оценка вектора $\mathbf{b}$ в пространстве параметров представляет собой многомерный эллипсоид:

$$B = \{\mathbf{b}:\ (\mathbf{b}-\mathbf{b}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(\mathbf{b}-\mathbf{b}^0) \le \gamma^2\}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{b}^0$ - вектор точечных оценок параметров; $\mathbf{F}$ - матрица регрессоров; γ - общий сомножитель полуосей эллипсоида. Вектор точечных оценок параметров определяется выражением: $\mathbf{b}^0 = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$, где $\mathbf{y}$ - вектор измеренных значений отклика. Общий сомножитель γ вычисляется на основе критерия Фишера: $\gamma^2 = ks^2F(\alpha,k,\nu)$, где k - размерность вектора параметров; s^2 - дисперсия ошибки; α - уровень значимости; ν - число степеней свободы; $F(\alpha,k,\nu)$ - распределение Фишера.

Сформируем множество неопределенности A коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы:

$$D(\lambda) = \sigma R_1(\lambda)R_0(\lambda) + P_1(\lambda)P_0(\lambda) = \mathbf{d}^{\mathrm{T}}(\lambda)\mathbf{a}, \quad (2)$$

где $\mathbf{d}(\lambda) = \begin{bmatrix}1 & \lambda & \dots & \lambda^n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - вектор степеней оператора; $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}a_0 & a_1 & \dots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - вектор коэффициентов; $n = n_1 + n_0$ - порядок характеристического полинома. Для этого выразим вектор коэффициентов характеристического полинома $\mathbf{a}$ через вектор коэффициентов передаточной функции объекта управления $\mathbf{a}_0$: $\mathbf{a} = \mathbf{S}\mathbf{a}_0$, где матрица $\mathbf{S}$ размерности $(n+1)\times(n_0+m_0+2)$, имеет следующую структуру: $\mathbf{s}_{\bullet j} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}^{\mathrm{T}}_{j-1} & \sigma\mathbf{r}^{\mathrm{T}}_1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}_{n-m_1-j+1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $j = \overline{1,m_0+1}$, $\mathbf{s}_{\bullet m_0+1+j} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}^{\mathrm{T}}_{j-1} & \mathbf{p}^{\mathrm{T}}_1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}_{n-n_1-j+1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $j = \overline{1,n_0+1}$, здесь $\mathbf{s}_{\bullet j}$ - j-й столбец матрицы $\mathbf{S}$; $\mathbf{0}_l$ - нулевой вектор размерности $l\times 1$. Далее представим вектор коэффициентов $\mathbf{a}_0$ в виде суммы: $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}^*_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{b}$, где $\mathbf{A}_0$ - матрица линейного преобразования размерности $(n_0+m_0+2)\times k$, в которой j-й элемент i-й строки равен 1, если j-й элемент вектора параметров $\mathbf{b}$ является i-м элементом вектора коэффициентов $\mathbf{a}_0$, и равен 0 в противном случае; $\mathbf{a}^*_0$ - вектор независимых коэффициентов объекта управления, получаемый заменой на 0 элементов вектора $\mathbf{a}_0$, вошедших в вектор параметров $\mathbf{b}$. Таким образом,

$$A = \{\mathbf{a}:\ \mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{b}\in B\}, \quad (3)$$

где $\mathbf{a}^* = \mathbf{S}\mathbf{a}^*_0$ - вектор независимых коэффициентов; $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{A}_0$ - матрица линейного преобразования вектора параметров.

Необходимо определить принадлежность корней семейства полиномов (2),(3) внешней области Λ замкнутого контура, заданного комплексной функцией $\lambda = \lambda(\omega)$, $\omega \in [-\pi;\pi]$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся частотным подходом к исследованию робастной модальности линейных дискретных систем [1]. Произведем в (2) замену λ на $\lambda(\omega)$ и определим вектор $\mathbf{q}(\omega)$, элементами которого являются координаты точки годографа $D(\lambda(\omega))$ в комплексной плоскости при фиксированном значении параметра ω: $\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{Q}(\omega)(\mathbf{a}^* + \mathbf{A}\mathbf{b})$, где $\mathbf{Q}(\omega) = \left[\operatorname{Re}\mathbf{d}(\lambda(\omega)) \ \operatorname{Im}\mathbf{d}(\lambda(\omega))\right]^{\mathrm{T}}$ - матрица линейного преобразования размерности $2 \times (n+1)$. Сформируем матрицу $\mathbf{K}$ размерности 2×2 (для компактности записи опустим обозначение зависимости матрицы $\mathbf{K}$ от параметра ω): $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\omega)\mathbf{A}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{Q}(\omega)\mathbf{A})^{\mathrm{T}}$ и представим ее в виде канонического разложения: $\mathbf{K} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{C}$ - ортонормированная матрица собственных векторов матрицы $\mathbf{K}$; $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\left[d_{11} \ d_{22}\right]$ - матрица собственных чисел матрицы $\mathbf{K}$.

Справедливо следующее *Утверждение*. Для всех $\omega \in [-\pi;\pi]$ область $Q(\omega) = \{\mathbf{q}(\omega) \colon \mathbf{b} \in B\}$ представляет собой:

1) эллипс с центром в точке $\mathbf{q}^0(\omega) = \mathbf{Q}(\omega)(\mathbf{a}^* + \mathbf{A}\mathbf{b}^0)$, полуосями $a_q = \sqrt{d_{11}}$, $b_q = \sqrt{d_{22}}$ и углом поворота $\theta_q = \arg([1 \ j]\mathbf{C}[1 \ 0]^{\mathrm{T}})$, в случае $d_{11} > 0,\ d_{22} > 0$;

2) отрезок с центром в точке $\mathbf{q}^0(\omega) = \mathbf{Q}(\omega)(\mathbf{a}^* + \mathbf{A}\mathbf{b}^0)$, полудлиной $a_q = \sqrt{d_{11}}$ и углом наклона $\theta_q = \arg([1 \ j]\mathbf{C}[1 \ 0]^{\mathrm{T}})$, в случае $d_{11} > 0,\ d_{22} = 0$;

3) отрезок с центром в точке $\mathbf{q}^0(\omega) = \mathbf{Q}(\omega)(\mathbf{a}^* + \mathbf{A}\mathbf{b}^0)$, полудлиной $b_q = \sqrt{d_{22}}$ и углом наклона $\theta_q = \pi/2 + \arg([1 \ j]\mathbf{C}[1 \ 0]^{\mathrm{T}})$, в случае $d_{11} = 0,\ d_{22} > 0$;

4) точку $\mathbf{q}^0(\omega) = \mathbf{Q}(\omega)(\mathbf{a}^* + \mathbf{A}\mathbf{b}^0)$, в случае $d_{11} = 0,\ d_{22} = 0$.

Для доказательства *Утверждения* представим вектор $\mathbf{q}(\omega)$ в виде: $\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{Q}(\omega)(\mathbf{a}^* + \mathbf{A}\mathbf{b}^0) + \mathbf{Q}(\omega)\mathbf{A}(\mathbf{b} - \mathbf{b}^0)$, откуда выразим разность $\mathbf{b} - \mathbf{b}^0$: $\mathbf{b} - \mathbf{b}^0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(\omega)(\mathbf{q}(\omega) - \mathbf{q}^0(\omega))$, где $\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{Q}^{-1}(\omega)$ - псевдообратные матрицы соответствующих линейных преобразований. Тогда при подстановке в (1) выражения для разности $\mathbf{b} - \mathbf{b}^0$ имеем: $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(\omega)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^0))^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(\omega)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^0)) \le \gamma^2$. После преобразований получим неравенство, содержащее квадратичную форму в левой части:

$(\mathbf{q}-\mathbf{q}^0)^{\mathrm{T}}((\mathbf{Q}(\omega)\mathbf{A})(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{Q}(\omega)\mathbf{A})^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{q}-\mathbf{q}^0)\le\gamma^2$. Обратная матрица квадратичной формы $\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\omega)\mathbf{A}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{Q}(\omega)\mathbf{A})^{\mathrm{T}}$ размерности 2×2 является симметрической, положительно полуопределенной. Отсюда следует, что область $Q(\omega)=\{\mathbf{q}(\omega)\colon\ \mathbf{b}\in B\}$ представляет собой либо эллипс или отрезок с центром в точке $\mathbf{q}^0(\omega)$, либо точку $\mathbf{q}^0(\omega)$. Вид и размеры области $Q(\omega)$ определяются диагональной матрицей собственных чисел матрицы $\mathbf{K}$, а ортонормированная матрица собственных векторов матрицы $\mathbf{K}$ задает ориентацию области $Q(\omega)$ относительно базовой системы координат. Анализируя собственные значения матрицы $\mathbf{K}$, получаем описание множества $Q(\omega)$ для различных случаев, указанных в формулировке *Утверждения*.

Определим модуль и аргумент вектора $\mathbf{q}^0(\omega)$: $\rho^0(\omega)=\sqrt{(\mathbf{q}^0(\omega))^{\mathrm{T}}\mathbf{q}^0(\omega)}$, $\varphi^0(\omega)=\arg([1\ \ j]\mathbf{q}^0(\omega))$, а также вспомогательную функцию:

$$\rho(\omega)=\begin{cases}\rho^0(\omega)(a_q^{-2}\cos^2(\varphi^0-\theta_q)+b_q^{-2}\sin^2(\varphi^0-\theta_q))^{1/2}, & a_q\ne 0 \text{ и } b_q\ne 0;\\ \rho^0(\omega)a_q^{-1}, & a_q\ne 0 \text{ и } \sin(\varphi^0(\omega)-\theta_q)=0;\\ \rho^0(\omega)b_q^{-1}, & b_q\ne 0 \text{ и } \cos(\varphi^0(\omega)-\theta_q)=0;\\ \infty, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Основываясь на принципах аргумента, отделения нуля и *Утверждении*, сформулируем критерий робастной модальности линейных дискретных систем с МНК-оценкой параметров объекта управления.

Критерий. Для того, чтобы линейная дискретная система с МНК-оценкой параметров объекта управления обладала заданным видом модальности Λ с уровнем значимости α, необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от $-\pi$ до π годограф $z(\omega)=\rho(\omega)e^{j\varphi^0(\omega)}$ не охватывал начало координат и не пересекал круг с центром в начале координат и радиусом γ.

Доказательство *Критерия* состоит в следующем.

Согласно принципу аргумента для того, чтобы линейная дискретная система с точечной МНК-оценкой параметров объекта управления обладала заданным видом модальности Λ, необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от $-\pi$ до π годограф $z^0(\omega)=\rho^0(\omega)e^{j\varphi^0(\omega)}$, соответствующий характеристическому полиному $D^0(\lambda)=\mathbf{d}^{\mathrm{T}}(\lambda)(\mathbf{a}^*+\mathbf{A}\mathbf{b}^0)$ имел нулевое приращение аргумента.

Согласно принципу отделения нуля для того, чтобы все полиномы семейства (2), (3) имели равное число корней в области Λ, необходимо и достаточно, чтобы область $Q(\omega)$ при всех $\omega\in[-\pi;\pi]$ не содержала начало координат.

Условие отделимости нуля от множества $Q(\omega)$ можно представить в виде $\rho^0(\omega)/r(\omega)>1$, $\omega\in[-\pi;\pi]$, где $r(\omega)$ - расстояние между точкой $\mathbf{q}^0(\omega)$ и точкой пересечения отрезком $\left[0,\ \mathbf{q}^0(\omega)\right]$ внутреннего множества области $Q(\omega)$:

$$r(\omega)=\begin{cases}\gamma(a_q^{-2}\cos^2(\varphi^0-\theta_q)+b_q^{-2}\sin^2(\varphi^0-\theta_q))^{-1/2}, & a_q\neq 0 \text{ и } b_q\neq 0;\\ \gamma a_q, \quad a_q\neq 0 \text{ и } \sin(\varphi^0(\omega)-\theta_q)=0;\\ \gamma b_q, \quad b_q\neq 0 \text{ и } \cos(\varphi^0(\omega)-\theta_q)=0;\\ 0, \text{ в остальных слунаях.}\end{cases}$$

В первом случае выражение для $r(\omega)$ определяется из параметрического уравнения эллипса; во втором и третьем случаях внутреннее множество области $Q(\omega)$ представляет собой точку, удаленную от точки $\mathbf{q}^0(\omega)$ на величину соответственно γa_q, γb_q, при этом точка внутреннего множества принадлежит отрезку $\left[0,\ \mathbf{q}^0(\omega)\right]$; в остальных случаях точка пересечения отрезком $\left[0,\ \mathbf{q}^0(\omega)\right]$ внутреннего множества области $Q(\omega)$ совпадает с точкой $\mathbf{q}^0(\omega)$. Условие отделимости нуля будет выполнено, если вспомогательная функция $\rho(\omega)=\gamma\rho^0(\omega)/r(\omega)$ будет больше γ.

Совместная геометрическая интерпретация принципов аргумента и отделения нуля приводит к формулировке *Критерия.*

Таким образом, для оценки модальных свойств линейной дискретной системы с МНК-оценкой параметров объекта управления требуется проанализировать поведение годографа $z(\omega)$, построение которого осуществляется в соответствии следующим образом. В зависимости от вида области Λ конкретизируется функция $\lambda(\omega)$: $\lambda(\omega)=e^{-j\omega}$ - при анализе устойчивости, $\lambda(\omega)=e^{\eta-j\omega}$ - при анализе степени устойчивости, $\lambda(\omega)=e^{\mu|\omega|-j\omega}$ - при анализе степени колебательности и т.д. Для фиксированных значений $\omega\in[-\pi;\pi]$ последовательно вычисляются модуль $\rho^0(\omega)$ и аргумент $\varphi^0(\omega)$ вектора $\mathbf{q}^0(\omega)$, матрица $\mathbf{K}$, ее собственные числа и нормированные собственные векторы, параметры a_q, b_q, θ_q, вспомогательная функция $\rho(\omega)$.

По точкам строится годограф $z(\omega)=\rho(\omega)e^{j\varphi^0(\omega)}$.

Наряду с анализом модальных свойств системы с заданным уровнем значимости оценки параметров объекта управления *Критерий* позволяет определить максимальное значение α, при котором указанные свойства сохраняются. Для этого необходимо вычислить максимальное значение параметра $\gamma : \gamma_{max} = \inf\limits_{\omega \in [-\pi;\pi]} \rho(\omega)$ и по таблице распределения Фишера найти соответствующее значение уровня значимости α_{max}.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Частотные критерии робастной модальности линейных дискретных систем // Автоматика - 1990. - № 4. - 3-9.

ПРОГРАММА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАЗРЯДНОМ БЛОКЕ

А.И. Штифанов

Россия

Электрогидравлический эффект находит широкое применение в промышленности, например, для штамповки деталей сложной формы [1]. Подобное оборудование оснащено многокамерным разрядным блоком (МРБ), состоящем из набора электродных пар направленного воздействия(ЭПНВ) [2].

Для исследования неодномерных и нестационарных процессов, возникающих при электрогидравлическом эффекте, разработан комплекс программ, состоящий из двух частей: программы моделирования технологических объектов в виде плоских и объемных моделей. При этом каждая часть состоит из следующих модулей: модуль инициализации модели, модуль расчета электрического поля, модуль расчета волновых процессов, модуль расчета расширения газовой полости, образовавшейся при пробое в жидкости, модуль вывода полей распределения потенциала, скорости, давления, энергии и записи полученных результатов в файл. Данные модули выполняют одни и те же функции как в плоской, так и в объемной модели, но имеют отличия в программной реализации.

В докладе на примере объемной модели рассматривается алгоритм моделирования электрическоюо поля, возникающего в камере с одной ЭПНВ и его программная реализация.

Для нахождения электрического поля потенциала ξ внутри камеры с двумя электродами, погруженными в жидкость, необходимо найти решение уравнения Лапласа в заданной области изменения пространственных переменных x, y и z:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=0\cdot \qquad (1)$$

На границах электродов используется уравнение Пуассона: $\Delta\xi = f_0$, где Δ — оператор Лапласа; f_0 —некоторая потенциальная функция, равная const. Чтобы выделить единственное решение среди семейства решений уравнения (1) вводятся исходные данные и граничные условия.