MSC 28C20

# АДДИТИВНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ НА ТРАЕКТОРИЯХ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

**Н.Н. Витохина, Ю.П. Вирченко**

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Vitohina@bsu.edu.ru

Вычисляется производящая функция $Q_T[\lambda;\tilde{w}] = \mathsf{E}\exp(-\lambda \mathsf{J}_T[\tilde{w}])$ распределения вероятностей значений квадратичного функционала

$$J_n[\tilde{w}] = \sum_{k=0}^{n} \tilde{w}^2(t_k)\,, \tag{1}$$

$t_k = k\Delta$, $k = 1, 2, ..., m$, $\Delta = T/n$, $T > 0$ на траекториях $\tilde{w}(t)$ винеровского процесса $\langle \tilde{w}(t); t \in \mathbb{R}_+\rangle$ с дисперсией $\sigma$. Эта функция

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda J_n[\tilde{w}]) \equiv Q_n(\lambda\Delta|\tilde{\mathbf{x}})$$

определяется на основе производящей функции $Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{z}})$ для случайного комплексного вектора $\tilde{\mathbf{z}} = \langle \tilde{z}_k; k = 1, ..., n\rangle$, состоящего из компонент $\tilde{z}_k = \tilde{x}_k + i\tilde{y}_k$, $k = 1, 2, ..., n$ со стохастически эквивалентными и независимыми парами $\langle \tilde{x}_k, \tilde{y}_k\rangle$ при каждом $k = 1, ..., n$. Тогда

$$Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{x}}) = Q_n^{1/2}(\lambda|\tilde{\mathbf{z}})\,.$$

Вычисление функции $Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{z}})$ сводится к вычислению определителя

$$S(\lambda) \ \equiv \ Q_n^{-1}(\lambda|\tilde{\mathbf{z}}) = \det(\mathcal{I} + 2\lambda\mathcal{K})\,,$$

который является полиномом степени $n$ относительно $\lambda$, где $\mathcal{K}_{jk}$ – ковариационная матрица случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}$, $\mathcal{K}_{jk} \equiv \mathsf{E}(\tilde{x}_j\tilde{x}_k) = \sigma\min\{t_j, t_k\}$ так, что $\mathsf{E}(\tilde{z}_j\tilde{z}_k^*) = 2\mathcal{K}_{jk} = 2\sigma\Delta\min\{j, k\}$.

Справедливо утверждение о том, что матрица $\mathcal{K}$ не имеет собственного числа, равного нулю. Таким образом, неотрицательная эрмитова матрица $\mathcal{K}$ является строго положительной. Пусть $\{\omega_k^{-1}; k = 1, ..., n\}$ – набор её $n$ строго положительных собственных чисел, соответствующих собственным векторам $\mathbf{c}^{(k)}, k = 1, 2, .., n$, $\omega_k\mathcal{K}\mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k)}\,, \quad k = 1, ..., n\,$. Тогда полином $S(\lambda)$ представим в виде

$$S(\lambda) \ = \ \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{2\lambda}{\omega_k}\right)\,. \tag{2}$$

Если корни полинома $S(\lambda)$ простые, то он полностью определяется совокупностью условий $S(-\omega_k/2) = 0\,, \quad k = 1, ..., n\,, \quad S(0) = 1.$

Построим полином $S(\lambda)$, удовлетворяющий этим условиям. Пусть $\mathbf{c} = \langle c_m; m = 1, ..., n\rangle$ – фиксированный собственный вектор из совокупности собственных векторов $\{\mathbf{c}^{(k)}; k = 1, ..., n\}$ матрицы $\mathcal{K}$, соответствующий собственному числу $\omega^{-1}$. Для каждого такого $\omega$ имеет место $S(-\omega/2) = 0$. Для этого вектора введем последовательности

$$\langle a_k; k = 0, 1, ..., n\rangle\,, \quad \langle b_k; k = 0, 1, ..., n\rangle, \quad d_k = a_k + (k+1)b_k\,, k = 1, ..., n-1, ;$$

по следующим формулам $a_0 = 0, b_n = 0, d_0 = b_0, d_n = a_n$,

$$a_k = \sum_{m=1}^{k} mc_m\,, \quad b_k = \sum_{m=k+1}^{n} c_m\, d_k = a_k + (k+1)b_k, \quad k = 1, ..., n-1\,. \tag{3}$$

В результате, получается система рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} b_{k+1} = b_k - \eta\omega d_k, \\ d_{k+1} = b_k + d_k(1-\eta\omega), \end{cases}$$

для определения компонент вектора $\mathbf{c}$. Рассмотрим $2\times 2$-матрицу

$$\mathcal{T}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & -\eta\omega \\ 1 & 1-\eta\omega \end{pmatrix}$$

Ее собственные числа $s_\pm$ и соответствующие им собственные векторы $\mathbf{u}^\pm = \langle u_1^\pm, u_2^\pm\rangle$ вычисляются явно на основе характеристического уравнения $\det(\mathcal{T}(\omega) - s) = 0$,

$$s^2\ - 2\xi s + 1\ =\ 0\,, \quad s_\pm = \xi \pm (\xi^2 - 1)^{1/2}\,, \quad \xi = 1 - \eta\omega/2\,, \tag{4}$$

$\mathbf{u}^\pm = \langle 1, (\eta\omega)^{-1}(1 - s_\pm)\rangle$.

Таким образом, получается следующее выражение

$$S(-\omega/2) = (s_+ - s_-)^{-1}\left[s_+^n(s_+ - 1) - s_-^n(s_- - 1)\right]\,, \tag{5}$$

где величины $s_\pm$ определяются формулами (4).

Убедившись, что все нули полинома $S(-\omega/2)$ простые, получаем следующее утверждение: *Производящая функция $Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{x}})$ случайной величины $J_n[\tilde{\mathbf{x}}] = \sum_{k=1}^{n} |\tilde{x}_k|^2$, $\tilde{x}_k = \tilde{w}(t_k)$, $t_k = k\Delta$, $\Delta = T/n$, равна*

$$Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{x}})\ =\ [S(\lambda)]^{-1/2}\,,$$

*где $S(-\omega/2)$ определяется формулой (5).*

## Литература


1. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
2. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. – Киев: Наукова думка, 1987. – 224 с.