MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ЗАДАЧА ШВАРЦА ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

В.А. Полунин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: polunin@bsu.edu.ru, soldatov@bsu.edu.ru

Пусть односвязная область $D \subset \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью S и вектор $n(y) = (n_1, n_2, n_3)$ является единичным вектором внешней нормали к этой поверхности в точке $y \in S$. Для четырехкомпонентной вектор-функции $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ в этой области рассмотрим задачу

$$u_1^+(y) = f_1(y),\ u_2^+(y)n_1(y) + u_3^+(y)n_2(y) + u_4^+(y)n_3(y) = f_2(y)\,, \quad y \in S, \tag{1}$$

для системы Моисила-Теодореску

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u(x) = 0\,, \quad M(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта задача является аналогом известной задачи Шварца для аналитических функций.

Теорема 1. *Если $S \in C^{2,\mu+0}$, то существует такая скалярная функция $e(y) \in C^\mu(S)$, что любое решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ рассматриваемой системы единственным образом представимо в виде интеграла типа Коши*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{M^\top(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y) ds_y, \quad x \in D,$$

с вектор-функцией $\psi \in C^\mu(S)$ вида $\psi_1 = \varphi_1,\ \psi_2 = n_1\varphi_2,\ \psi_3 = n_2\varphi_2,\ \psi_4 = n_3\varphi_2,$, где φ_2 ортогональна e. В случае $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = e$ функция u в этом интегральном представлении обращается в нуль.

В основе теоремы 1 лежит следующая теорема о разрешимости задачи Шварца.

Теорема 2. *В предположении $S \in C^{2,\mu+0}$ и условия ортогональности $\int_S f_2 ds = 0$ задача (1) однозначно разрешима в классе $C^\mu(\overline{D})$ и эквивалентным образом редуцируется к системе сингулярных интегральных уравнений*

$$\varphi(y_0) + (K\varphi)(y_0) = f(y_0), \quad (K\varphi)(y_0) = \int_S k(y_0, y; y-y_0)\varphi(y) ds_y, \quad y_0 \in S,$$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

где матричное ядро

$$k(y_0, y; y - y_0) = \frac{1}{2\pi|y - y_0|^3} \begin{pmatrix} n(y)y - y_0 & 0 \\ n(y)[y - y_0, n(y_0)] & n(y_0)y - y_0 \end{pmatrix}$$

имеет слабую особенность при $y = y_0$. *Здесь* $[\cdot\,,\cdot]$ *означает обычное векторное произведение, а произведение без скобок – скалярное. Ядро и коядро оператора* $1 + K$ *одномерны и определяются, соответственно, функциями* $\varphi = (0, e)$ *и* $f = (0, 1)$.

Эти результаты другим методом были получены ранее В.И. Шевченко[1]. Предлагаемый нами подход позволяет распространить их на более общие системы типа Коши-Римана.

Литература

1. Шевченко В.И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора // Сб. «Матем. физика». Киев. – 1970. – Вып.8. – С.172-187.