MSC 11S40

О ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Гриценко С.А., Нгуен Тхи Ча

Белгородский государственный университет,

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия,

e-mail:s.gritsenko@gmail.com, nguyentra.bsu@gmail.com

В докладе представлены формулировки ряда теорем, в которых рассматриваются вопросы разрешимости некоторых диофантовых неравенств с простыми числами.

Доказательства всех теорем основано на плотностной технике и следующей плотностной теореме:

Теорема. *Пусть $N(\sigma, T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \mathrm{Re}s < 1$, $0 < \mathrm{Im}s \leq T$.*

Справедливо следующая оценка

$$N(\sigma, T) \leq C_1 T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^{C_2} T\,,$$

где $\lambda \geq 1$ и C_1, C_2 — положительные константы.

Наилучшим современным значением λ является $\lambda = 6/5$ (Хаксли,1972).

Плотностной гипотезой называется плотностная теорема, отвечающая $\lambda = 1$. В настоящее время плотностная гипотеза не доказана.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [2] содержится следующая теорема, доказанная на основе плотностной техники.

Теорема 1. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p - N| \leq H \tag{1}$$

разрешимо в простых числах p.

Для числа решений $J(N, H)$ неравенства (1) справедлива оценка $J(N, H) \gg \dfrac{H}{\ln N}$.

В 2006 году в работе [6] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H \tag{2}$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Для числа решений $I(N,H)$ неравенства (2) справедлива оценка $I(N,H) \gg \dfrac{H}{\ln^2 N}$.

Сформулируем основные результаты настоящего сообщения.

Теорема 3. *Если $H > \sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Теорема 4. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{(1-(2\lambda)^{-1})^2}\exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3.

Теорема 5. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{(1-\lambda^{-1})(1-(2\lambda)^{-1})}\exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p_1 + p_2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Литература

1. Huxley M.N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. – 1972. – V.15. – P.164-170.
2. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция / М.: Invent. Физматлит, 1994.
3. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Invent. Чебышевский сборник. – Т.7,Вып.4. – С.26-30.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Invent. Наука, 1983.