MSC 37N25

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗРЫВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.А. Аматов, Г.М. Аматова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: amamtovm@bsu.edu.ru, amatova@bsu.edu.ru

Исследуются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1),(1.2) описывающие динамику численностей трёх взаимодействующих популяций и представляющие основные (неполные) трофические структуры [1, стр. 170].

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-by), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-e+hx-gz), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-c+dy). \end{cases} \qquad (1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-bz), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c-dz), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-e+hx-gz). \end{cases} \qquad (1.2)$$

Система (1.1) типа «продуцент, консумент, хищник» в ней x – численность продуцента, y – численность консумента, а z – численность хищника. Система (1.2) типа «хищник две жертвы» x и y – численности жертв, а z – численность хищника; a,b,c,d,e,h,g – положительные константы. Исследуется устойчивость таких систем, понимаемая, как «экологическая стабильность» [1, стр. 15].

Из множества работ, посвящённых данной проблеме, упомянем лишь недавно вышедшую монографию А.Д. Базыкина [1]. В этой и многих других работах самым тщательным образом исследована динамика единичной популяции и динамика системы двух взаимодействующих популяций. Что же качается системы трёх популяций, связанных трофическими отношениями, то вопрос об устойчивости таких систем весьма далек от окончательного решения.

Фазовый портрет расположения траекторий систем (1.1), (1.2) в первом октанте полностью зависит от величины определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. При $\Delta \neq 0$ либо одна из популяций в системах уравнений (1.1),(1.2) исчезает при $t \to 0$ – либо численности всех популяций неограниченно растут. Обе ситуации означают экологическую нестабильность систем (1.1),(1.2).

Как известно, в реально существующих экологических системах все три популяции существуют продолжительное время, и ни одна из них не исчезает и не имеет неограниченно растущей численности [1]. Значит системы (1.1),(1.2) с постоянными коэффициентами не достаточно точно описывают динамику реальных экологических процессов. Поэтому естественно считать некоторые коэффициенты систем (1.1),(1.2) зависящими от фазовых переменных.

При этом следует учитывать следующие обстоятельства: 1) вид зависимости коэффициентов уравнений от фазовых переменных может быть определен только экспериментально; 2) для различных сообществ эта зависимость будет различной, а значит, динамику каждого такого сообщества придётся исследовать отдельно, что значительно затруднит процесс получения общих закономерностей.

Избежать указанных осложнений позволяет применение дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Заменяем непрерывные системы (1.1),(1.2) системами с кусочно-непрерывными правыми частями. Последние определяем следующим образом. Первый октант делим на две части G^- и G^+ гладкой поверхностью S, на которой система имеет разрыв.

Систему (1.1) заменяем системой (2.1.1) в области G^- и системой (1.1.2) в области G^+. Аналогично уравнения (1.2) заменяем системой (2.2.1) в области G^- и системой (2.2.2) в области G^+.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - b_k y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-e + h_k x - g_k z), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-c + d_k y). \end{cases} \quad (2.1.k) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - b_k z), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c - d_k z), \qquad (k = 1, 2) \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-e + h_k x - g_k z). \end{cases} \quad (2.2.k)$$

Движения разрывных систем $(2.i.j)$ определяются по А.Ф. Филиппову. Для системы $(2.1.k)$ поверхностью разрыва служит поверхность $z = z_0$, $z_0 = const$, $z_0 > 0$, а для системы $(2.2.k)$ плоскость $y = x$. Коэффициенты b_i, d_i таковы, что определители $\Delta_1 = ad_1 - b_1 c$ и $\Delta_2 = ad_2 - b_2 c$ имеют противоположные знаки.

Доказывается, что при выполнении указанных неравенств на поверхностях разрыва существуют области скользящих движений, в которых возможно появление устойчивых особых точек, предельных циклов и других стационарных режимов.

Интегрировании полученных таким образом кусочно-непрерывных систем осуществлялось с помощью компьютерных программ, разработанных авторами [2]. Рисунки с изображением траекторий систем $(2.i.j)$ опубликованы в работе [3].

Литература

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / Москва-Ижевск: РХД, 2003. – 357 с.

2. Аматов М.А., Аматова Г.М. и др. Применение математического пакета MAPLE 8 к интегрированию систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями // Вестник Херсонского Нац. техн. ун-та. – Херсон: ХНТУ, 2009. – Вып. 2(35). – С.19-24.

3. Аматов М.А. Аматова Г.М., Кунгурцев С.А. Исследование модели взаимодействия трёх популяций, связанных трофическими отношениями // Экологические системы и приборы. - 2011. – №12. – С.41-54.