Н.А. Зинченко, Н.Н. Мотькина, А.Г. Сокольский

АЛГЕБРА

(ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ)

Учебное пособие

Белгород, 2017

ББК 22.144
З–63

Печатается по решению
редакционно-издательского совета НИУ «БелГУ»
от «11» февраля 2017 года

Рецензенты:
В.А. Есин, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;
Н.И. Москаленко, кандидат физико-математических наук, Белгородский университет кооперации, экономики и права

Зинченко Н.А.
З–63 Алгебра (введение в линейную алгебру): учеб. пос. для студ. высш. учеб. заведений / Н.А. Зинченко, Н.Н. Мотькина, А.Г. Сокольский. – Белгород: ИД «Белгород» НИУ «БелГУ», 2017. – 87 с.

Учебное пособие предназначено для студентов очного и заочного отделений, будущих учителей математики.

ББК 22.144

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование по профилям подготовки «Математика и информатика», «Математика и физика». Данное издание является продолжением пособия «Алгебра» тех же авторов, представляя собой курс лекций по линейной алгебре. Содержание учебного пособия отражает материал 3 семестра очной и 2 курса заочной форм обучения. В пособии наряду с необходимыми теоретическими сведениями дан разбор основных типичных задач по курсу линейной алгебры. Материал данного пособия существенно опирается на предыдущее пособие «Алгебра».

В главе 1 дается определение линейного векторного пространства, рассматриваются его свойства, приводятся примеры. Затем вводятся понятия базиса и размерности, с помощью матриц устанавливается связь между базисами; доказывается изоморфизм всех линейных пространств одинаковой размерности.

В главе 2 вводится понятие подпространства, рассматриваются операции над подпространствами.

Глава 3 посвящена линейным преобразованиям векторного пространства. Приводится матричное задание линейного преобразования. Рассматривается связь между матрицами линейного преобразования в разных базисах, а также действия над линейными преобразованиями.

В главе 4 вводятся понятия области значений и ядра линейного преобразования и рассматриваются их свойства как подпространств линейного пространства.

Глава 5 содержит определение и свойства собственных векторов и собственных значений линейного преобразования. Здесь указан метод нахождения собственных векторов и собственных значений линейного оператора, заданного матрицей.

В главе 6 определяется скалярное произведение векторов и рассматриваются векторные пространства со скалярным произведением. Показано, как в таких векторных пространствах получить ортонормированный базис.

В главе 7 приводятся сведения о квадратичных формах и способе приведения квадратичных форм к каноническому виду. Затрагиваются вопросы распознавания положительно определенных форм.

В главе 8 из множества всех операторов выделяются два важных класса операторов: симметрические и ортогональные. Изучение этих операторов оправдывается тем, что любой линейный оператор представим в виде произведения симметрического и ортогонального операторов. Здесь же показано как теорию, изложенную в 5, 6 и 7 главах, можно применить к приведению квадратичной формы к главным осям.

Для более глубокого изучения линейной алгебры можно обратиться к учебникам, указанным в списке литературы.

Глава 1

Линейные пространства

1.1 Определение и свойства линейного пространства

В середине XIX века значительное развитие получили такие разделы математики как матричное и векторное исчисления, теории многочленов, действительных и комплексных чисел, исследование систем уравнений. Возникла потребность – и вместе с тем возможность – в обобщении этих разделов, в рассмотрении структуры, характеризуемой общими свойствами всех упомянутых понятий. Такой структурой и является линейное векторное пространство. Изучая ее, мы тем самым одновременно изучаем и матрицы, и многочлены, и системы уравнений и т.п. Но вместе с тем обнаруживаем и новые возможности исследования математических закономерностей.

Введение и изучение понятия «линейное векторное пространство» связано с именами, прежде всего, английских математиков У. Гамильтона (1809–1865) и А. Кэли (1821–1895), а также немецкого математика Г. Грасмана (1809–1877).

Рассмотрим множество V, элементы которого будем называть векторами, и множество P – множество действительных или комплексных чисел.

На множестве V определим две операции:

- сложение векторов: для любых двух векторов $a, b \in V$ существует вектор $a + b \in V$, называемый их суммой;

- умножение вектора на число: для любого вектора $a \in V$ и любого числа $\alpha \in P$ существует вектор $\alpha a \in V$, называемый произведением числа α на вектор a.

Множество V с введенными на нем операциями будем называть *линейным векторным пространством* над множеством P, если выполняются следующие аксиомы:

1. $a+b=b+a, \quad \forall a,b \in V$ (коммутативность сложения);
2. $a+(b+c)=(a+b)+c, \quad \forall a,b,c \in V$ (ассоциативность сложения);
3. $\exists\, 0 \in V : a+0=a, \quad \forall a \in V$ (0 называется нулевым элементом);
4. $\forall a \in V \quad \exists (-a) \in V : a+(-a)=0$ ($-a$ называется противоположным элементом для a);
5. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b, \quad \forall a,b \in V, \quad \forall \alpha \in P$ (первая дистрибутивность);
6. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a, \quad \forall \alpha,\beta \in P, \quad \forall\, a \in V$ (вторая дистрибутивность);
7. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a, \quad \forall \alpha,\beta \in P, \quad \forall a \in V$ (ассоциативность умножения на число);
8. $1 \cdot a = a, \quad \forall\, a \in V, \quad 1 \in P$.

Если $P=\mathbb{R}$, то пространство называется вещественным; если $P=\mathbb{C}$, то комплексным линейным пространством.

Замечание. Из условия 3 следует, что V – непустое множество, поскольку всегда содержит нулевой элемент.

Свойства линейного пространства

Укажем некоторые свойства линейных пространств, доказательство которых опираются на аксиомы линейного пространства.

(1) Нулевой вектор пространства единственен.

(2) Противоположный элемент для каждого вектора единственен.

(3) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad \forall \alpha \in P$.

(4) $0 \cdot a = 0, \quad \forall a \in V$.

(5) Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение при любых a и b, а именно: $x=b+(-a)$. Это решение будем называть разностью элементов, при этом будем писать: $b-a$.

(6) $\alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b, \quad \forall a,b \in V, \quad \forall \alpha \in P$.

(7) $\alpha(-b)=-\alpha b, \quad \forall b \in V, \quad \forall \alpha \in P$.

(8) $(-\alpha)a=-\alpha a, \quad \forall a \in V, \quad \forall \alpha \in P$.

(9) $\alpha a = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \vee a = 0$.

Замечание. Как правило из контекста ясно, что скрывается за символом 0: число 0 или нулевой элемент. Так, например, нули в свойстве (3) являются нулевыми векторами, а в свойстве (4) слева стоит число 0, а справа – вектор.

Примеры линейных пространств

1. В части 1 изучалось множество строк действительных чисел длины n. Для него выполняются все аксиомы линейного векторного пространства. Условились называть это пространство *арифметическим векторным пространством* и обозначать $\mathbb{R}^n$.

2. Множество M матриц размерности $m \times n$ с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число удовлетворяет всем аксиомам линейного пространства.

3. Множество $F = \{f(x)\}$ всех многочленов с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z},$$

является линейным пространством, так как операции сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число замкнуты в этом множестве и удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Нулевым элементом этого пространства является многочлен, тождественно равный нулю.

1.2 Базис линейного пространства

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – элементы некоторого линейного пространства V, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числа из множества P. Выражение вида

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

называется *линейной комбинацией* векторов $a_1, \ldots, a_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Система векторов $a_1, \ldots, a_n \in V$ называется *линейно независимой* (ЛНЗ), если из равенства нулю их линейной комбинации следует равенство нулю всех ее коэффициентов.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В противном случае векторы называются *линейно зависимыми* (ЛЗ), т.е.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \wedge \exists \alpha_i \neq 0.$$

Свойства линейно зависимых и независимых векторов

(1) Если часть системы векторов ЛЗ, то и вся система векторов ЛЗ.

(2) Если система векторов $a_1, \dots, a_n$ ЛНЗ, а добавление к ней вектора a делает ее ЛЗ, то вектор a линейно выражается через векторы системы, т.е. a есть линейная комбинация векторов $a_1, \dots, a_n$.

(3) Если система векторов содержит нулевой вектор, то она ЛЗ.

(4) Если один из векторов системы является линейной комбинацией остальных, то вся система векторов ЛЗ.

Доказательство этих свойств аналогично доказательству соответствующих свойств линейной зависимости строк, приведенных в параграфе 3.3 части 1 пособия «Алгебра» [7].

(5) Даны две системы векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \tag{1}$$

$$b_1, b_2, \dots, b_k, \tag{2}$$

причем $n > k$. Если каждый вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, то первая система ЛЗ.

Доказательство. По условию каждый из векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейно выражается через векторы $b_1, b_2, \dots, b_k$:

$$\begin{array}{c} a_1 = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 + \dots + \alpha_{1k} b_k \\ a_2 = \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \dots + \alpha_{2k} b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = a_{n1} b_1 + \alpha_{n2} b_2 + ... + \alpha_{nk} b_k \end{array}. \tag{*}$$

Составим линейную комбинацию векторов a_i и приравняем ее нулю:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0. \tag{**}$$

Наша цель – показать, что система (1) ЛЗ, т.е. что существует такое i, что $\lambda_i \neq 0$, однако равенство (**) выполняется. Перепишем равенство (**), заменив в левой части каждый вектор a_i его выражением из (*). Получим:

$$\lambda_1(\alpha_{11} b_1 + \dots + \alpha_{1k} b_k) + \lambda_2(\alpha_{21} b_1 + \dots + \alpha_{2k} b_k) \dots + \lambda_n(\alpha_{n1} b_1 + \dots \alpha_{nk} b_k) = 0$$

или, собрав воедино члены с $b_1, b_2, \dots, b_k$,

$$(\alpha_{11}\lambda_1 + \dots + \alpha_{n1}\lambda_n) b_1 + (\alpha_{12}\lambda_1 + \dots + \alpha_{n2}\lambda_n) b_2 \dots + (\alpha_{1k}\lambda_1 + \dots + \alpha_{nk}\lambda_n) b_k = 0.$$

Покажем, что можно подобрать такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, чтобы каждое из выражений, стоящих коэффициентами при $b_1, b_2, \ldots, b_k$, было равно 0. Приравнивая нулю указанные выражения, получаем:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n1}\lambda_n = 0 \\ \alpha_{12}\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n2}\lambda_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1k}\lambda_1 + \cdots + \alpha_{nk}\lambda_n = 0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных (по условию $n > k$). Такая система обязательно имеет ненулевое решение. Это и означает, что существуют неравные нулю одновременно числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, для которых справедливо соотношение (**). А значит, система (1) линейно зависима.

Заметим, что требование $n > k$ является существенным, и сформулированное не совсем строго свойство 5 звучит так: если «большая» система линейно выражается через «меньшую», то «большая» линейно зависима.

Базисом линейного векторного пространства V называется линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается любой вектор пространства. Если базис линейного пространства содержит конечное число векторов, то такое линейное пространство называется *конечномерным*, в противном случае – *бесконечномерным.*

Для конечномерных линейных пространств часто используется другое определение базиса.

Базисом линейного векторного пространства V называется максимальная линейно независимая система векторов, т.е. такая ЛНЗ система, добавление к которой любого другого вектора пространства превращает ее в линейно зависимую систему.

Доказательство эквивалентности этих определений следует из свойств (2) и (4) линейно зависимых и независимых векторов.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис линейного пространства V, a – произвольный вектор этого пространства. Тогда, по определению базиса,

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами* вектора a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Теперь вектор a можно записать в следующем виде:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Координаты вектора в базисе определяются однозначно. Действительно, предположим, что $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ и $a = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$. Тогда $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0$. Отсюда, в силу линейной независимости базисных векторов, получаем: $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$, или $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Пусть даны два вектора

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n.$$

Согласно аксиомам линейного пространства

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \dots (\alpha_n + \beta_n)e_n =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n),$$

т.е. при сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются. Аналогично, при умножении вектора на число все координаты вектора умножаются на это число

$$\lambda a = (\lambda\alpha_1)e_1 + (\lambda\alpha_2)e_2 + \dots + (\lambda\alpha_n)e_n = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n).$$

Теорема **1.2.1.** *Два базиса линейного векторного пространства V состоят из одинакового числа векторов.*

Доказательство. Утверждение следует из свойства (5) линейной зависимости и независимости векторов. Действительно, предположим, что базисы $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_k$ состоят из разного числа векторов, пусть для определенности $n > k$. Так как любой вектор пространства выражается через базисные вектора, то каждый вектор $a_i, \quad i = 1, \dots, n$ выражается через векторы $b_1, \dots, b_k$, а значит, как следует из свойства (5), система векторов $a_1, \dots, a_n$ – линейно зависима, что невозможно, так как эти векторы образуют базис. □

Таким образом, количество векторов в базисе есть число, постоянное для данного пространства. Это дает возможность дать следующее определение.

Размерностью линейного векторного пространства называется число векторов в базисе,что обозначается через $\dim V$.

Обратимся еще раз к примерам векторных пространств.

1. $V = \mathbb{R}^n$. В качестве базиса этого пространства можно взять систему следующих векторов

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Следовательно, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2. $V = M$. На любую матрицу размерности $m \times n$ можно смотреть, как на вектор (строку) длины nm, поэтому $M = \mathbb{R}^{nm}$, а значит, $\dim M = nm$. Базис этого пространства состоит из nm матриц размерности $n \times m$, у которых единственный ненулевой элемент равен 1, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. В качестве бесконечномерного линейного пространства рассмотрим, например, множество всех многочленов $F = \{f(x)\}$ с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 0.$$

Частным случаем многочленов являются одночлены, например,

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, \ldots, f_k(x) = x^k,$$

где k – любое натуральное число. Эти одночлены образуют линейно независимую систему. Действительно, пусть некоторая линейная комбинация этих одночленов с коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_k$ равна нулевому вектору, т.е. тождественно равному нулю многочлену

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k \equiv 0,$$

но тогда все коэффициенты $c_0, \ldots, c_k$ должны равняться нулю. Таким образом, в линейном пространстве всех многочленов можно найти линейно независимую систему, состоящую из любого числа элементов, что и означает бесконечномерность рассматриваемого пространства.

Заметим, что если рассмотреть пространство F_k всех многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей некоторого фиксированного числа k, то такое пространство будет конечномерным, и в качестве его базиса можно взять, например, одночлены

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \ldots, f_k(x) = x^k.$$

1.3 Изоморфизм векторных пространств

Два линейных векторных пространства V и V' над одним числовым множеством P называются *изоморфными,* если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие φ: $V \longrightarrow V,'$ при котором сумме векторов пространства V отвечает сумма соответствующих векторов пространства V', а произведению числа на вектор пространства V отвечает произведение того же числа на соответствующий вектор пространства V':

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall a, b \in V, \quad \varphi(a), \varphi(b) \in V';$$
$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a), \quad \forall a \in V, \quad \forall \lambda \in P, \quad \varphi(a) \in V'.$$

Вектор a будем называть прообразом вектора $a' = \varphi(a)$, а вектор a' – образом вектора a при отображении φ.

Из определения изоморфизма следует, что для любых двух векторов $a \in V$ и $a' \in V'$, соответствующих друг другу при данном изоморфизме

$$\varphi(a) = a',$$

выполняются равенства

$$\varphi(0) = \varphi(0a) = 0\varphi(a) = 0 \in V',$$

$$\varphi(-a) = \varphi((-1)a) = (-1)\varphi(a) = -\varphi(a) = -a'.$$

А это означает, что при изоморфном отображении двух пространств их нулевые векторы соответствуют друг другу, и противоположный вектор для a соответствует противоположному вектору для a'. Из определения изоморфизма, а также условий векторного пространства следует, что линейная комбинация векторов переходит в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2) + \cdots + \lambda_n\varphi(a_n).$$

Из инъективности отображения φ и равенства $\varphi(0) = 0'$ следует, что, если $a_i \neq 0$, то $\varphi(a_i) \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что при изоморфном отображении двух пространств линейно независимые системы одного пространства переходят в линейно независимые системы другого пространства. Действительно, предположим, что система $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима, а система образов $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$ линейно зависима. Тогда существуют числа $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1\varphi(a_1) + \alpha_1\varphi(a_2) + \cdots + \alpha_1\varphi(a_n) = 0.$$

Биективность отображения φ гарантирует существование обратного отображения φ^{-1}. Применим его к обеим частям последнего равенства:

$$\varphi^{-1}(\alpha_1\varphi(a_1) + \alpha_1\varphi(a_2) + \cdots + \alpha_1\varphi(a_n)) = \varphi^{-1}(0).$$

Учитывая, что $\varphi^{-1}\varphi(a_i) = a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, получим

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_1 a_2 + \cdots + \alpha_1 a_n = 0,$$

причем не все $\alpha_i = 0$, что противоречит линейной независимости системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Аналогично доказывается, что изоморфным образом линейно зависимой системы будет линейно зависимая система. В частности, базис пространства V переходит в базис пространства V'. А значит, доказана следующая теорема

Теорема **1.3.1.** *Изоморфные конечномерные линейные пространства имеют одинаковую размерность.*

Докажем обратную теорему:

Теорема **1.3.2.** *Если два конечномерных линейных векторных пространства имеют одинаковую размерность, то они изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть $\dim V = \dim V' = n$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – базис пространства V; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ – базис пространства V' и произвольный вектор a пространства V имеет в базисе $a_1, a_2, \ldots, a_n$ координаты: $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Поставим в соответствие вектору $a \in V$ вектор $a' \in V'$, имеющий такие же координаты в базисе $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$:

$$a' = \varphi(a) = \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \cdots + \alpha_n a'_n.$$

Так как координаты вектора в базисе определяются единственным образом, то заданное соответствие φ пространств V и V' будет взаимно однозначным. Проверим другие условия изоморфизма. Если

$$x = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n, \quad y = y_1a_1 + y_2a_2 + \dots + y_na_n,$$

то

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) = \varphi(x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n + y_1a_1 + y_2a_2 + \dots + y_na_n) = \\ = \varphi((x_1+y_1)a_1 + (x_2+y_2)a_2 + \dots + (x_n+y_n)a_n) = \\ = (x_1+y_1)a_1' + (x_2+y_2)a_2' + \dots + (x_n+y_n)a_n' = \\ = (x_1a_1' + x_2a_2' + \dots + x_na_n') + (y_1a_1' + y_2a_2' + \dots + y_na_n') = \varphi(x) + \varphi(y).\end{aligned}$$

Аналогично проверяем второе условие:

$$\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda(x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n)) = \varphi(\lambda x_1a_1 + \lambda x_2a_2 + \dots + \lambda x_na_n) =$$

$$= \lambda x_1a_1' + \lambda x_2a_2' + \dots + \lambda x_na_n' = \lambda\varphi(x).$$

□

Замечание. Поскольку $\mathbb{R}^n$ имеет размерность n, то все линейные пространства размерности n изоморфны арифметическому векторному пространству. Отсюда следует корректность употребления слова *вектор* для обозначения элементов произвольного линейного пространства.

1.4 Связь между базисами

Пусть в пространстве V заданы два базиса:

$$e_1, e_2, \dots, e_n; \tag{1}$$

$$e_1', e_2', \dots, e_n'. \tag{2}$$

Каждый вектор базиса (2) единственным образом раскладывается по векторам базиса (1)

$$\begin{aligned} e_1' &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_{n1}, \\ e_2' &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_{n1}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e_n' &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_{n1}. \end{aligned}$$

Матрица T, составленная из координат векторов базиса (2) в базисе (1), записанных в строчку, называется *матрицей перехода* от базиса (1) к базису (2)

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если записать базисы (1) и (2) в виде строк

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_n), \qquad e' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n),$$

то связь между базисами можно выразить в виде матричного равенства

$$e' = eT. \tag{3}$$

Аналогично и базис (1) выражается через базис (2) с помощью матрицы T_1. Выясним, как связаны между собой матрицы T и T_1:

$$e = e'T_1 = eTT_1,$$

$$e' = eT = e'T_1T.$$

Отсюда следует,что, в силу линейной независимости базисов e и e', $TT_1 = E$ и $T_1T = E$, а значит, $T_1 = T^{-1}$.

Так как матрица T имеет обратную, то можно сделать вывод о том, что *матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной.*

Пример **1.4.1.** *Найти матрицу перехода от базиса* $1, x, \dots, x^n$ *к базису* $1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n$.

□ Решение. Роль базисных элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$ играют многочлены $1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n$. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} &1 = 1, \\ &x - a = -a + x, \\ &(x-a)^2 = a^2 - 2ax + x^2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(x-a)^n = (-a)^n + C_n^1(-a)^{n-1}x + \dots + C_n^k(-a)^k x^{n-k} + \dots + x^k. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица перехода получается если транспонировать следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -2a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-a)^n & C_n^1(-a)^{n-1} & C_n^2(-a)^{n-2} & \dots & C_n^{(n-1)}(-a) & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad \square$$

Пусть a – произвольный вектор пространства V. Разложим его по векторам базиса (1) и (2):

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

$$a = \alpha'_1 e'_1 + \alpha'_2 e'_2 + \dots + \alpha'_n e'_n.$$

Учитывая формулу (3), получим

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j,$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \sum_{k=1}^{n} t_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i t_{ji}) e_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j.$$

Отсюда следует

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i t_{ji}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Формулы (4) можно записать в матричном виде:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)(T')^{-1} \tag{5}$$

или

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) T'. \tag{5'}$$

Формулы (5) и (5′) позволяют найти координаты вектора a в одном базисе, зная его координаты в другом базисе пространства V и матрицу перехода.

Глава 2

Подпространства

Подмножество $L \subseteq V$ называется *подпространством* линейного пространства V, если оно само является пространством.

Теорема **2.0.1** (Критерий подпространства.). *Подмножество L пространства V будет подпространством тогда и только тогда, если для всех векторов $a, b \in L$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in P$ справедливо $\alpha a + \beta b \in L$.*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из определения пространства.

Для доказательства достаточности проверим все аксиомы пространства.

1, 2. Коммутативность и ассоциативность выполняются для всех элементов V, а значит, и для его части L.

3. Нулевой вектор принадлежит L, так как при $\alpha = \beta = 0$, получим $0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b \in L$.

4. Для произвольного вектора $a \in L$ при $\alpha = -1, \beta = 0$, получаем

$$-1 \cdot a + 0 \cdot b = -a \in L.$$

5—8. Выполняются для всего пространства, а значит, и для его части L. □

Пусть L_1 и L_2 два подпространства пространства V.

- *Суммой* двух подпространств L_1 и L_2 называется множество

$$L_1 + L_2 = \{l_1 + l_2 \in V | l_1 \in L_1, l_2 \in L_2\}.$$

- *Пересечением* двух подпространств L_1 и L_2 называется множество

$$L_1 \cap L_2 = \{l \in V | l \in L_1 \wedge l \in L_2\}.$$

- *Прямой суммой* двух подпространств L_1 и L_2 называется множество

$$L_1 \oplus L_2 = L_1 + L_2, \quad L_1 \cap L_2 = \{0\}.$$

Используя критерий подпространства, легко доказать следующее утверждение:

Если L_1 и L_2 – подпространства пространства V, то $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$ и $L_1 \oplus L_2$ – подпространства.

Замечание. Поскольку любое подпространство является пространством, то оно обладает базисом.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – произвольный набор векторов из V^n Рассмотрим все возможные линейные комбинации этих векторов. По критерию подпространства полученное множество векторов будет подпространством пространства V^n. Обозначается это подпространство так: $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ и называется *линейной оболочкой, натянутой на систему векторов* или *подпространством, порожденным системой векторов.* Базис этого подпространства состоит из максимальной линейно независимой подсистемы системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема **2.0.2.** *Пусть L_1 и L_2 – подпространства пространства V. Тогда*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Доказательство. Пусть

$$\dim(L_1 + L_2) = n, \dim L_1 = k, \dim L_2 = s, \dim(L_1 \cap L_2) = r.$$

Выберем в пространстве $L_1 \cap L_2$ базис $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Дополним эти векторы до базисов L_1 и L_2:

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_{k-r} \quad - \text{базис} \quad L_1,$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, c_1, c_2, \ldots, c_{s-r} \quad - \text{базис} \quad L_2.$$

Рассмотрим систему векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_{k-r}, c_1, c_2, \ldots, c_{s-r}. \qquad (*)$$

Докажем, что система (*) является базисом подпространства $L_1 + L_2$. Очевидно, что любой вектор подпространства $L_1 + L_2$ является линейной комбинацией векторов системы (*). Для доказательства того, что система (*) – ЛНЗ, воспользуемся определением ЛНЗ. Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{k-r} b_{k-r} + \gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_{s-r} c_{s-r} = 0. \qquad (**)$$

Перепишем это равенство следующим образом

$$g = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{k-r} b_{k-r} =$$

$$= -\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \dots - \gamma_{s-r} c_{s-r}.$$

Отсюда следует, что $g \in L_1$ и $g \in L_2$, значит $g \in L_1 \cap L_2$, следовательно существуют числа $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ такие, что $g = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots \delta_r a_r$ Поэтому, вектор g представим двумя способами через две ЛНЗ системы векторов, причем одна является подсистемой другой. Чего не может быть в силу однозначности разложения по базису. А значит, все коэффициенты $\beta_i = 0$. Подставляя вместо β_i нули в равенство (**), получим, что линейная комбинация векторов базиса пространства L_2 равна нулю. Отсюда следует, что все коэффициенты $\alpha_i = 0$ и $\gamma_i = 0$. Таким образом, все коэффициенты линейной комбинации (**) равны нулю. Это и означает, что система (*) – ЛНЗ, т.е. векторы этой системы образуют базис подпространства $L_1 + L_2$. Количество векторов в системе (*) должно равняться размерности подпространства, поэтому имеем $n = k + s - r$. Теорема доказана. □

Пример **2.0.2.** *Найти базисы суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов*

$$a_1 = (1, 2, 1), \quad a_2 = (1, 1, -1), \quad a_3 = (1, 3, 3),$$

$$b_1 = (2, 3, -1), b_2 = (1, 2, 2), b_3(1, 1, -3). \qquad \square$$

□ Решение. Введем обозначение $L_1 =< a_1, a_2, a_3 >, L_2 =< b_1, b_2, b_3 >$. Эта запись означает, что любой элемент из L_1 является линейной комбинацией элементов a_1, a_2, a_3, а каждый элемент из L_2 является линейной комбинацией элементов b_1, b_2, b_3. По определению суммы подпространств любой элемент из $L_1 + L_2$ является линейной комбинацией элементов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Поэтому для нахождения базиса попространства $L_1 + L_2$ достаточно найти максимальную линейно независимую подсистему этой системы. С этой целью выпишем матрицу, составленную из координат данных векторов и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из предпоследней матрицы видно, что векторы a_1, a_2, b_1 образуют максимальную линейно независимую подсистему. Таким образом, базис подпространства $L_1 + L_2$ состоит из векторов a_1, a_2, b_1 (заметим, что вместо вектора b_1 можно было бы взять вектор b_2 или b_3). В качестве базиса подпространства L_1 можно взять векторы a_1, a_2. Найдем базис подпространства L_2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $b_1,\ b_2$ составляют базис подпространства L_2. Из теоремы о размерности суммы двух подпространств получаем равенство

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Следовательно, в качестве базисного вектора подпространства $L_1 \cap L_2$ можно взять любой вектор из $L_1 \cap L_2$, обозначим его через x. Так как $x \in L_1$ и $x \in L_2$, то x является линейной комбинацией векторов a_1, a_2 и b_1, b_2, поэтому можно записать

$$x = k_1 a_1 + k_2 a_2 = c_1 b_1 + c_2 b_2,$$

где k_1, k_2, c_1, c_2 – неизвестные коэффициенты. Переходя к координатам, т.е. приравнивая соответствующие координаты, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - 2c_1 - c_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - 3c_1 - 2c_2 = 0 \\ k_1 - k_2 - c_1 - 2c_2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - 2c_1 = c_2 \\ \qquad\quad k_2 - c_1 = 0 \\ \qquad\qquad\quad c_1 = c_2. \end{cases}$$

Таким образом, $x = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3, 5, 1)$. Этот вектор является базисом подпространства $L_1 \cap L_2$. $\square$

В следующем разделе вводятся понятия линейного преобразования и оператора линейного пространства, рассматриваются их свойства, примеры, способы задания в разных базисах, действия над линейными преобразованиями. Определяются понятия ядра и области значений преобразования, доказывается теорема о сумме ранга и дефекта линейного преобразования. Определяются и подробно изучаются собственные векторы и собственные числа, их связь с характеристическим многочленом оператора.

Глава 3

Линейные преобразования векторных пространств

3.1 Определение линейного преобразования

Пусть V и W – два линейных векторных пространства над числовым множеством P. Отображение $\varphi : V \longrightarrow W$ пространства V в пространство W называется *линейным преобразованием*, если выполняются следующие условия:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall a, b \in V;$$
$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a), \quad \forall a \in V, \quad \forall \lambda \in P.$$

Если $V = W$, то линейное преобразование называется *линейным оператором.*

Обобщая условия линейности линейного преобразования, можно доказать, что

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(a_i). \tag{$*$}$$

Доказательство формулы (*) проведем методом математической индукции по числу векторов n.

1. Пусть $n = 2$. Тогда, учитывая условия линейности преобразования φ, получим:

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \varphi(\lambda_1 a_1) + \varphi(\lambda_2 a_2) = \lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2).$$

2. Предположим, что для $n - 1$ вектора формула (*) справедлива.

3. Докажем справедливость (*) для n векторов. Действительно, так как формула (*) выполняется для двух векторов, то получим:

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i + \lambda_n a_n) = \varphi(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i) + \varphi(\lambda_n a_n).$$

Учитывая предположение индукции, можно продолжить равенство и получить

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\varphi(a_i) + \lambda_n\varphi(a_n) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(a_i).$$

Будем называть два преобразования φ, ψ *равными*, если образы любого вектора a из пространства V совпадают, т.е.

$$\varphi = \psi \Longleftrightarrow \forall a \in V, \varphi(a) = \psi(a).$$

Пусть в пространстве V задан базис e:

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

и выбран произвольный вектор $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$. Найдем образ вектора a при действии преобразования φ:

$$\varphi(a) = \varphi(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(e_i).$$

Отсюда следует, что для нахождения образа произвольного вектора пространства V, а, значит, и для задания преобразования φ достаточно задать образы базисных векторов:

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{n1}e_n,\\
\varphi(e_2) &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{n2}e_n,\\
\ldots \quad & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
\varphi(e_n) &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \cdots + \alpha_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Матрица A, составленная из координат образов базисных векторов пространства, записанных построчно

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного преобразования* φ *в заданном базисе.*

Теорема **3.1.1.** *Пусть* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– произвольно выбранные векторы пространства* W*,* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *– базис пространства* V*. Тогда, полагая*

$$\varphi(e_1) = c_1,\ \varphi(e_2) = c_2,\ \ldots,\ \varphi(e_n) = c_n,$$

получим однозначно определенное линейное преобразование пространства V *в пространство* W*.*

Доказательство. Определим отображение φ пространства V в пространство W следующим образом

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$$

для любого элемента

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Проверим два условия линейности преобразования.

$$\forall a, b \in V, a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

$$\varphi(a + b) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) c_i == \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\lambda a) = \varphi(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i c_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \lambda \varphi(a).$$

Докажем единственность преобразования φ. Предположим, что существует преобразование ψ такое, что

$$\psi(e_1) = c_1, \quad \psi(e_2) = c_2, \quad \ldots, \psi(e_n) = c_n.$$

Тогда для любого элемента $a \in V$

$$\psi(a) = \psi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \varphi(a).$$

Из определения равенства преобразований следует, что $\psi = \varphi$. Теорема доказана. □

В конце этого параграфа ответим на вопрос: как связаны между собой матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах?

Пусть φ – линейный оператор пространства V, в котором заданы два базиса: $e : e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e' : e'_1, e'_2, \dots, e'_n$; φ имеет в базисе e матрицу A и матрицу B в базисе e', и пусть T – матрица перехода от базиса e к базису e'.

$$\varphi(e) = eA, \tag{1}$$

$$\varphi(e') = e'B, \tag{2}$$

$$e' = eT. \tag{3}$$

Тогда можно записать:

$$\varphi(eT) = eTB. \tag{4}$$

Рассмотрим i-ю строку левой части равенства (4):

$$\varphi(t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + \dots + t_{ni}e_n) = t_{1i}\varphi(e_1) + t_{2i}\varphi(e_2) + \dots + t_{ni}\varphi(e_n) =$$

$$= (\varphi(e_1)\varphi(e_2)\dots\varphi(e_n)) \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \dots \\ t_{ni} \end{pmatrix}.$$

Получили i–ю строку матрицы $\varphi(e)T$, т.е. $\varphi(eT) = \varphi(e)T$. Учитывая равенства (4) и (1), получим:

$$eAT = eTB.$$

В силу линейной независимости базисных векторов получим равенство матриц: $AT = TB$. Умножая это равенство на T^{-1} справа и слева, соответственно получим следующие формулы, связывающие матрицы одного и того же оператора в разных базисах:

$$B = T^{-1}AT \qquad A = TBT^{-1}. \tag{5}$$

Матрицы A и B, связанные равенствами (5), называются *подобными.*

Пример **3.1.1.** *Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе f_1, f_2, f_3, где

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.\square$$

$\square$ Решение. Матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису f_1, f_2, f_3 имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица B линейного преобразования φ в базисе f_1, f_2, f_3 связана с матрицей A равенством $B = T^{-1}AT$. Вычислим матрицу T^{-1}.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ T' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 30 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ T^* = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим матрицу B по формуле $B = T^{-1}AT$.

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица является искомой матрицей линейного преобразования φ в базисе f_1, f_2, f_3 $\square$

Учитывая теорему об определителе произведения матриц (см. [7], часть 1, Теорема 4.1.3) можно сделать следующий вывод:

определители матриц линейного оператора пространства в разных базисах равны.

Прежде чем сравнить ранги матриц линейного оператора в разных базисах, докажем следующую теорему.

Теорема **3.1.2.** *Ранг произведения матриц не выше ранга каждого из сомножителей.*

Доказательство. Пусть $AB = C$, $rangA = r_1$, $rangB = r_2$. $a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}$ – столбцы матрицы A, образующие базис. $b_1, b_2, \ldots, b_{r_2}$ – строки матрицы B, образующие базис.

Произвольный элемент матрицы C вычисляется по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \qquad (*)$$

Зафиксируем j и, меняя i от 1 до n, получим столбец матрицы C:

$$c_{1j} = a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1n}b_{nj},$$

$$c_{2j} = a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \cdots + a_{2n}b_{nj},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$c_{nj} = a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \cdots + a_{nn}b_{nj},$$

Заметим, что полученный j-ый столбец матрицы C линейно выражается через столбцы матрицы A, а, значит, через базисные столбцы $a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}$. По свойству (5) линейно зависимых векторов число базисных столбцов матрицы C не должно быть больше, чем r_1. Это и означает, что $rangC \leqslant rangA$.

Зафиксировав в (*) i и меняя j , получим аналогичный вывод относительно строк матрицы C: число базисных строк матрицы C не может быть больше, чем r_2. А, значит, $rangC \leqslant rangB$. Теорема доказана. □

Следствие. *Ранг произведения матрицы A на невырожденную матрицу совпадает с рангом матрицы A.*

Действительно, если $C = AT$, где T – невырожденная матрица, то имеем $rangC \leqslant rangA$. Выразим матрицу A через матрицу C: $A = CT^{-1}$, откуда получим $rangA \leqslant rangC$. Отсюда следует, что ранги матриц A и C равны.

Принимая во внимание, что матрицы линейного оператора в разных базисах связаны формулами (5), можно сделать следующий вывод:

матрицы линейного оператора, заданные в разных базисах, имеют одинаковый ранг.

3.2 Действия над линейными преобразованиями

Рассмотрим два линейных преобразования φ и ψ, действующих из пространства V в пространство W. Оба пространства рассматриваются над одним и тем же числовым множеством P.

- *Суммой* двух линейных преобразований φ и ψ называется отображение $\varphi + \psi$, которое задается следующим образом:

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a), \quad \forall a \in V.$$

Докажем, что множество линейных преобразований замкнуто относительно операции сложения, т.е., что сумма двух линейных преобразований есть линейное преобразование.

$$(\varphi+\psi)(a+b)=\varphi(a+b)+\psi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)+\psi(a)+\psi(b)=$$

$$=(\varphi+\psi)(a)+(\varphi+\psi)(b).$$

$$(\varphi+\psi)(\lambda a)=\varphi(\lambda a)+\psi(\lambda a)=\lambda(\varphi(a)+\psi(a))=\lambda(\varphi+\psi)(a).$$

Найдем матрицу суммы линейных преобразований. Пусть в некотором базисе e пространства V преобразование φ имеет матрицу $A_\varphi=(\alpha_{ij})$, а преобразование ψ в том же базисе имеет матрицу $B_\psi=(\beta_{ij})$. Это означает, что

$$\varphi(e)=A_\varphi e \qquad \psi(e)=B_\psi e$$

Найдем образ произвольного базисного вектора $e_i, i=1,\ldots,n$:

$$(\varphi+\psi)e_i=\varphi(e_i)+\psi(e_i)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}e_k+\sum_{k=1}^{n}\beta_{ki}e_k=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ki}+\beta_{ki})e_k.$$

Отсюда по определению матрицы линейного преобразования следует, что

матрица суммы двух линейных преобразований пространства V в пространство W равна сумме матриц этих преобразований, заданных в одном и том же базисе пространства V:

$$C_{\varphi+\psi}=A_\varphi+B_\psi.$$

- *Произведением* линейного преобразования φ на число λ называется отображение $\lambda\varphi$, которое задается следующим образом:

$$(\lambda\varphi)(a)=\lambda\varphi(a), \forall a\in V.$$

Линейность произведения преобразования на число доказывается аналогично доказательству линейности суммы двух преобразований. Найдем матрицу преобразования $\lambda\varphi$. Для этого найдем образ каждого базисного вектора $e_i, i=1,\ldots,n$:

$$(\lambda\varphi)(e_i)=\lambda\varphi(e_i)=\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}e_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda\alpha_{ki}e_k.$$

Отсюда можно сделать вывод:

матрица произведения линейного преобразования на число равна произведению матрицы преобразования на это число: $B_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$.

Нетрудно убедиться, что множество всех линейных преобразований, действующих из пространства V в пространство W, образует *линейное пространство.*

Для этого необходимо проверить выполнимость всех восьми условий пространства. Отметим, что роль нулевого элемента выполняет нулевой оператор $\theta : \theta(a) = 0, \quad \forall a \in V$. Для примера докажем выполнимость четвертого условия – существование противоположного элемента. Определим для любого преобразования φ отображение $-\varphi$ следующим образом:

$$(-\varphi)(a) = -\varphi(a), \quad \forall a \in V.$$

Очевидно, что это линейное преобразование. Кроме того, $\forall a \in V$:

$$(\varphi + (-\varphi))(a) = \varphi(a) + (-\varphi(a)) = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$$

Это и означает, что $\varphi + (-\varphi) = \theta$, т.е. условие 4. линейного пространства выполняется.

Далее рассмотрим случай, когда пространства V и W совпадают. В этом случае линейное преобразование называется *линейным оператором* пространства.

- *Произведением* двух линейных операторов φ и ψ, действующих в пространстве V, называется отображение $\varphi\psi$, которое задается следующим образом:

$$(\varphi\psi)(a) = \varphi(\psi(a)), \quad \forall a \in V.$$

Докажем линейность этого оператора. Возьмем произвольные a, b из V.

$$(\varphi\psi)(a + b) = \varphi(\psi(a + b)) = \varphi(\psi(a) + \psi(b)) = \varphi(\psi(a)) + \varphi(\psi(b)) =$$
$$= (\varphi\psi)(a) + (\varphi\psi)(b).$$

Аналогично проверяем второе условие линейности. Для любого числа λ из множества P и вектора a получаем:

$$(\varphi\psi)(\lambda a) = \varphi(\psi(\lambda a)) = \varphi(\lambda\psi(a)) = \lambda(\varphi\psi(a)) = \lambda(\varphi\psi)(a).$$

Найдем матрицу линейного оператора $\varphi\psi$:

$$\varphi\psi(e_i) = \varphi(\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} e_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}\varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\beta_{ki}) e_j.$$

Заметим, что выражение, стоящее в круглых скобках последнего равенства, равно элементу матрицы AB, находящемуся в j-ой строке и в i-ом столбце. Это и означает, что

матрица произведения двух операторов равняется произведению матриц этих операторов.

Глава 4

Область значений и ядро линейного преобразования

Рассмотрим преобразование φ, действующее из пространства V в пространство W. *Областью значений* линейного преобразования φ называется множество

$$\mathrm{Im}\ \varphi = \{\omega \in W | \exists v \in V, \varphi(v) = \omega\}.$$

Ядром линейного преобразования φ называется множество

$$Ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = 0 \in W\}.$$

Теорема **4.0.1.** *Пусть φ — линейное преобразование, действующее из пространства V в пространство W, оба пространства над множеством P. Тогда $\mathrm{Im}\ \varphi$ – подпространство пространства W, а $Ker\varphi$ – подпространство пространства V.*

Доказательство. Воспользуемся критерием подпространства. Пусть a и b – произвольные векторы множества $\mathrm{Im}\ \varphi$, α, β – любые числа множества P.

Тогда существуют $v_1, v_2 \in V$ такие, что $\varphi(v_1) = a$, $\varphi(v_2) = b$. Так как V – пространство, то $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$, а значит, $\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \mathrm{Im}\ V$. В силу линейности преобразования φ получим: $\alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2) = \alpha a + \beta b \in \mathrm{Im}\ \varphi$. Отсюда следует, что $\mathrm{Im}\ \varphi$ является подпространством пространства W.

Выберем два произвольных вектора $a, b \in Ker\varphi$. Это означает, что $\varphi(a) = 0$ и $\varphi(b) = 0$. Тогда для любых чисел $\alpha, \beta \in P$ получаем:

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = 0 + 0 = 0.$$

По определению ядра получим, что $\alpha a + \beta b \in Ker\varphi$. А значит, $Ker\varphi$ – подпространство пространства V. Теорема доказана. $\square$

Рангом линейного преобразования φ пространства V в W называется ранг матрицы этого преобразования в каком-нибудь базисе этого пространства.

Так как ранги матриц линейного преобразования в разных базисах равны, то определенный таким образом ранг не зависит от выбора базиса пространства V.

ТЕОРЕМА **4.0.2.** *Пусть φ– линейное преобразование, действующее из пространства V в пространство W. Тогда ранг преобразования φ совпадает с размерностью подпространства* $\mathrm{Im}\ \varphi$*: $rang\varphi = \dim(\mathrm{Im}\ \varphi)$.*

Доказательство. Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – базис пространства V, $e' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ – базис пространства W, A_φ – матрица линейного преобразования φ в базисе e.

$$\varphi(e_1) = \alpha_{11}e'_1 + \alpha_{21}e'_2 + \dots + \alpha_{n1}e'_n,$$

$$\varphi(e_2) = \alpha_{12}e'_1 + \alpha_{22}e'_2 + \dots + \alpha_{n2}e'_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(e_n) = \alpha_{1n}e'_1 + \alpha_{2n}e'_2 + \dots + \alpha_{nn}e'_n.$$

$\mathrm{Im}\ \varphi$ является подпространством пространства W, и поэтому обладает базисом. В качестве базиса можно выбрать максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$. Действительно, любой вектор $v \in \mathrm{Im}\ \varphi$ имеет прообраз

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in V :$$

$$v = \varphi(b) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(e_i).$$

Это означает, что v линейно выражается через векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$, а, значит, и через линейно независимую подсистему этих векторов.

Но

$$\varphi(e_1) = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{n1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(e_n) = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn}).$$

Отсюда следует, что количество векторов в максимальной линейно независимой подсистеме векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ совпадает с максимальным числом линейно независимых строк матрицы A_φ. Поэтому $rang\varphi = \dim(Im\varphi)$.
$\square$

Дефектом линейного преобразования $\varphi : V \longrightarrow W$ называется размерность его ядра $Ker\varphi$.

Связь между рангом и дефектом линейного преобразования устанавливает следующая теорема:

Теорема **4.0.3.** *Пусть $\varphi : V \longrightarrow W$ – линейное преобразование. Тогда сумма ранга и дефекта этого преобразования совпадает с размерностью пространства V:*

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}\ \varphi) + \dim(Ker\varphi).$$

Доказательство. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – базис подпространства $\mathrm{Im}\ \varphi$ пространства W. По определению для каждого элемента из образа φ существует прообраз, т.е. существуют элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ такие, что

$$\varphi(a_1) = b_1, \quad \varphi(a_2) = b_2, \quad \ldots, \quad \varphi(a_k) = b_k.$$

Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ образуют линейно независимую систему. Действительно, предположим, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = 0.$$

Тогда и

$$\varphi(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) = 0.$$

Откуда следует, что

$$\alpha_1 \varphi(a_1) + \alpha_2 \varphi(a_2) + \cdots + \alpha_k \varphi(a_k) = 0,$$

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k = 0.$$

Из линейной независимости векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ получаем:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0.$$

Обозначим через L подпространство, порожденное векторами $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Отметим, что $\dim L = k = \dim(\mathrm{Im}\ \varphi)$. Докажем, что

$$L \cap Ker\varphi = \{0\}.$$

Пусть $l = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k$ – элемент из L такой, что $\varphi(l) = 0$. Тогда получим

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = 0,$$

$$\beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \cdots + \beta_k \varphi(a_k) = 0,$$

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = 0.$$

Отсюда следует, что $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$, т.е. $l = 0$.

Теперь докажем, что произвольный вектор v из пространства V представим в виде суммы элементов из ядра и подпространства L. Пусть $\varphi(v) = b$, $b \in \mathrm{Im}\ \varphi$. Для вектора b найдется прообраз a, принадлежащий подпространству L, так как a может быть выражен через прообразы векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$: $\varphi(a) = b$. Следовательно,

$$\varphi(v) - \varphi(a) = 0, \qquad \varphi(v - a) = 0.$$

Это означает, что $v - a = c \in Ker\varphi$. Тем самым мы показали, что $v = a + c$, где $a \in L$, $c \in Ker\varphi$. Таким образом получено $V = L + Ker\varphi$. По теореме о размерности суммы подпространств имеем

$$\dim V = \dim(L + Ker\varphi) = \dim L + \dim Ker\varphi - \dim(L \cap Ker\varphi) =$$

$$= \dim(\mathrm{Im}\ \varphi) + \dim(Ker\varphi).$$

Теорема доказана. □

Преобразование назовем *невырожденным*, если его матрица в каком-нибудь базисе невырожденна.

Замечание. Следующие утверждения для линейных преобразований векторного пространства V эквивалентны:

(1) $rangA_\varphi = n$,

(2) $\dim(\mathrm{Im}\ \varphi) = rang(A)$,

(3) $\dim(Ker\varphi) = 0$,

(4) преобразование φ – взаимно однозначно,

(5) для преобразования φ существует обратное преобразование φ^{-1}.

Глава 5

Собственные векторы и собственные значения

Рассмотрим оператор φ, действующий в векторном пространстве V над числовым множеством P, и пусть A – его матрица в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу $A - \lambda E$, где λ – произвольное число из множества P, а E – единичная матрица.

Найдем определитель этой матрицы:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Определитель $|A-\lambda E|$ представляет собой многочлен степени n относительно переменной λ и называется *характеристическим* многочленом матрицы A, а его корни, принадлежащие множеству P, называются *характеристическими* корнями этой матрицы.

Теорема **5.0.4.** *Характеристические многочлены матриц линейного оператора φ в разных базисах пространства совпадают.*

Доказательство. Пусть A_φ и B_φ – матрицы линейного оператора φ векторного пространства V, заданные в разных базисах этого пространства.

Учитывая, что матрицы A_φ и B_φ подобны и произведение любой матрицы на единичную коммутативно, а так же, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, получим:

$$|B - \lambda E| = |T^{-1}AT - \lambda ET^{-1}T| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| =$$
$$= |E^{-1}||A - \lambda E||T| = |A - \lambda E|.$$

□

Ненулевой вектор b пространства V называется *собственным* вектором оператора φ, соответствующим *собственному значению* λ_0, если выполняется равенство $\varphi(b) = \lambda_0 b$.

Теорема **5.0.5.** *Собственными значениями линейного оператора, действующего в пространстве V над множеством R, если они есть, являются действительные характеристические корни и только они.*

Доказательство. Пусть $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – собственный вектор линейного оператора φ, соответствующий действительному собственному значению λ_0, $A = (\alpha_{ij})$ – действительная матрица оператора в некотором базисе пространства V. Тогда

$$\varphi(b) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A' = (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \ldots, \lambda\beta_n).$$

Записывая это матричное равенство в виде системы уравнений, получим:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (\alpha_{11} - \lambda_0)\beta_1 & + & \alpha_{12}\beta_2 & +\ldots & + & \alpha_{1n}\beta_n = 0 \\ \alpha_{21}\beta_1 & +(\alpha_{22} - \lambda_0)\beta_2 & & +\ldots & + & \alpha_{2n}\beta_n = 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\ \alpha_{n1}\beta_1 & + & \alpha_{n2}\beta_2 & +\ldots & & +(\alpha_{nn} - \lambda_0)\beta_n = 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Эта однородная система уравнений имеет по условию ненулевое решение, следовательно определитель матрицы равен нулю. А значит, равен нулю и определитель транспонированной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda_0 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda_0 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda_0 \end{vmatrix} = 0 = |A - \lambda_0 E|. \qquad (2)$$

Это и означает, что λ_0 является характеристическим корнем матрицы. Обратно, пусть λ_0 – действительный корень характеристического многочлена матрицы A, т.е. выполняется равенство (2).

Тогда система (1) имеет ненулевое решение b, а это означает, что оператор φ имеет собственный вектор b, соответствующий собственному значению λ_0. $\square$

Замечание. Если бы мы рассматривали комплексное линейное пространство, то требование действительности характеристического корня было бы лишним, т.е. справедливо утверждение:

Характеристические корни линейного оператора комплексного линейного пространства и только они служат собственными значениями этого оператора.

Отсюда, в частности, следует, что

в комплексном линейном пространстве всякий линейный оператор обладает собственными векторами.

Пример **5.0.1.** *Найти собственные значения и собственные векторы оператора, задаваемого матрицей*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Решение. Вычислим характеристический многочлен и его корни

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3+6\lambda^2-8\lambda+8-4\lambda = -\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8,$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3=0, \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2.$$

Все собственные значения оператора оказались равными. Найдем теперь собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda=2$. Составим матрицу $A-\lambda E$ для $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все строки матрицы пропорциональны. Поэтому система для нахождения векторов состоит из одного уравнения $-2x_1+x_2=0$.

$$2x_1 = x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \quad x_2 = 2x_1,$$

x_1	x_2	x_3
1	2	0
0	0	1

Собственные векторы оператора φ имеют вид $c_1(1,2,0)+c_2(0,0,1)$, где c_1, c_2 – произвольные числа не равные нулю одновременно. $\square$

Свойства собственных векторов.

(1) Множество собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению, и нуль-вектор образуют подпространство пространства V.

Доказательство. Воспользуемся критерием подпространства. Пусть b_1 и b_2– собственные векторы оператора φ, соответствующие собственному значению λ_0. Т.е. $\varphi(b_1)=\lambda_0 b_1$ и $\varphi(b_2)=\lambda_0 b_2$. Рассмотрим вектор $b=t_1b_1+t_2b_2$, где t_1, t_2 – произвольные числа из множества P. Найдем образ этого вектора при действии линейного оператора φ:

$$\varphi(b)=\varphi(t_1b_1+t_2b_2)=t_1\varphi(b_1)+t_2\varphi(b_2)=t_1\lambda_0b_1+t_2\lambda_0b_2=$$

$$=\lambda_0(t_1b_1+t_2b_2)=\lambda_0 b.$$

Это означает, что b является собственным вектором оператора φ, соответствующим собственному значению λ_0. $\square$

(2) Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям линейного оператора, образуют линейно независимую систему.

Доказательство. Пусть φ – линейный оператор пространства V, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$. Воспользуемся методом математической индукции по количеству собственных векторов.

1. При $k=1$ утверждение справедливо, т.к. один ненулевой вектор является линейно независимым.

2. Предположим, что свойство выполняется для $k-1$ собственного вектора.

3. Пусть линейная комбинация k собственных векторов равна нулю с некоторыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$:

$$\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\cdots+\alpha_kb_k=0. \tag{3}$$

Тогда

$$\varphi(\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\cdots+\alpha_kb_k)=0,$$

$$\alpha_1\varphi(b_1)+\alpha_2\varphi(b_2)+\cdots+\alpha_k\varphi(b_k)=0,$$

$$\lambda_1\alpha_1b_1+\lambda_2\alpha_2b_2+\cdots+\lambda_k\alpha_kb_k=0. \tag{4}$$

Умножим равенство (3) на какое-нибудь собственное число, например, на λ_1

$$\lambda_1\alpha_1 b_1 + \lambda_1\alpha_2 b_2 + \cdots + \lambda_1\alpha_k b_k = 0. \tag{5}$$

Вычтем из равенства (4) равенство (5), получим

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)b_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)b_3 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)b_k = 0. \tag{6}$$

Равенство (6) означает, что линейная комбинация $k-1$ собственного вектора равна нулю. По предположению индукции эти векторы линейно независимы, а значит, все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0, \qquad i = 2, 3, \ldots, k.$$

Т.к. по условию $\lambda_i \neq \lambda j$, при $i \neq j$, то отсюда получаем

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Из равенства (3) следует, что и $\alpha_1 = 0$. Следовательно, векторы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ линейно независимы. $\square$

Замечание. В этом разделе мы рассматривали линейные операторы, действующие в линейном векторном пространстве V над числовым множеством P. Если $P = \mathbb{C}$ (множество комплексных чисел), то характеристический многочлен имеет ровно n комплексных корней. Этот факт доказан в теории многочленов. Если $P = \mathbb{R}$ (множество действительных чисел), то характеристический многочлен может не иметь действительных корней вовсе, или их число может быть меньше степени многочлена.

Оператор φ называется *оператором с простым спектром*, если все его собственные значения различны и действительны.

Пусть оператор φ имеет простой спектр. Если взять n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, каждый из которых соответствует разным собственным значениям, то эти векторы образуют базис пространства V. Найдем матрицу линейного оператора в этом базисе.

$$\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad \varphi(e_2) = \lambda_2 e_2, \quad \ldots, \quad \varphi(e_n) = \lambda_n e_n,$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \qquad i \neq j,$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Мы получили матрицу диагонального вида и тем самым доказали следующую теорему.

Теорема **5.0.6.** *Если оператор φ имеет простой спектр, то его матрица подобна матрице диагонального вида.*

Пример **5.0.2.** *Выяснить можно ли привести к диагональному виду матрицу линейного оператора A путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Решение. Найдем собственные значения оператора, заданного этой матрицей

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0,$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

Найдем корни многочлена, разложив его на множители

$$\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - (\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Вычислим собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Подставим $\lambda = 1$ в матрицу $A - \lambda E$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель данной матрицы равен 0, то строки матрицы линейно зависимы, и по крайней мере одну из них можно заменить нулевой строкой, например, первую. Тогда система для определения собственного вектора состоит из двух уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 & = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 & = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 & = 4x_2 \quad x_1 = x_2 \\ x_1 & = x_2 \quad x_3 = x_2 \end{cases},$$

x_1	x_2	x_3
1	1	1

В качестве первого базисного вектора можно взять собственный вектор $a_1 = (1, 1, 1)$

Вычислим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Система состоит из одного уравнения $-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, откуда

$$x_3 = -3x_1 + 3x_2, \qquad \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \text{-3} \end{array}$$

Таким образом, векторы $a_2 = (1, 0, -3), a_2 = (0, 2, 3)$ являются недостающими базисными векторами. Матрица данного линейного оператора в базисе a_1, a_2, a_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Глава 6

Евклидовы пространства

Раздел посвящен изучению особого вида векторных пространств, называемых евклидовыми пространствами. Определяется ортонормированный базис, описывается процесс ортогонализации базиса, доказывается изоморфизм евклидовых пространств, вводятся понятия ортогонального дополнения и ортогональной проекции вектора.

6.1 Скалярное произведение

Рассмотрим линейное пространство V над множеством действительных чисел.

Будем говорить, что в пространстве V задано *скалярное произведение*, если определено отображение $V \times V \longrightarrow R$, которое каждой паре векторов a, b ставит в соответствие действительное число, обозначаемое $\alpha = (a, b)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(a, b) = (b, a), \quad \forall a, b \in V$;
2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c), \quad \forall a, b, c \in V$;
3. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b), \quad \forall a, b \in V, \quad \forall \lambda \in R$;
4. $(a, a) > 0, \quad \forall a \neq 0, \quad a \in V$.

Число $\alpha = (a, b)$ будем называть скалярным произведением, а пространство V, с введенным на нем скалярным произведением, называется *евклидовым векторным пространством.* Если векторное пространство V имеет размерность n, то евклидово пространство будем обозначать E^n.

Из условий, определяющих скалярное произведение, следует, что скалярный квадрат нулевого вектора равен нулю. Действительно,

$$(0, 0) = (0 \cdot a, 0 \cdot a) = 0(a, a) = 0.$$

Обобщая условия 2 и 3, можно при помощи метода математической индукции доказать следующее свойство:

$$(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (a_i, b_j). \tag{1}$$

Выберем в пространстве E^n какой-нибудь базис: $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда произвольные элементы a и b из E^n раскладываются по этому базису:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n.$$

Найдем скалярное произведение этих элементов, учитывая свойство (1):

$$(a, b) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j).$$

Отсюда видно, что для нахождения скалярного произведения любых двух элементов достаточно знать, как задается скалярное произведение на базисных векторах, т.е. необходимо знать n^2 чисел, каждое из которых равно скалярному произведению двух базисных векторов. Такое задание осуществляется при помощи матрицы, называемой *матрицей Грама* :

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Так как скалярное произведение коммутативно, то $(e_i, e_j) = (e_j, e_i)$ и в матрице Грама симметричные относительно главной диагонали числа равны. Обратное утверждение также верно: любая матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали (такая матрица называется *симметрической*), задает скалярное произведение базисных векторов, а значит, задает евклидово пространство. Скалярное произведение на линейном пространстве можно задавать разными способами, и каждый раз будем получать разные евклидовы пространства. Например, скалярное произведение можно задать следующей матрицей Грама:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда скалярное произведение двух произвольных векторов пространства выражается через их координаты следующим образом:

$$(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

Ниже мы докажем, что как бы ни было определено скалярное произведение, найдется такой базис, в котором скалярное произведение любых двух векторов будет вычисляться как сумма произведений соответственных координат векторов в этом базисе.

Введем некоторые определения.

Два элемента a и b евклидова пространства E^n называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(a, b) = 0$.

Система элементов $a_1, a_2, \dots, a_k$ из евклидова пространства E^n называется *ортогональной*, если ее векторы попарно ортогональны:

$$(a_i, a_j) = 0, \quad i \neq j. \tag{2}$$

Элемент a евклидова пространства называется *нормированным*, если его скалярный квадрат равен 1: $(a, a) = 1$.

Система элементов $a_1, a_2, \dots, a_k$ евклидова пространства E^n называется *ортонормированной*, если выполняются следующие условия

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

т.е. система ортогональна и нормирована.

Теорема **6.1.1.** *Любая ортогональная система ненулевых элементов евклидова пространства является линейно независимой.*

Доказательство. Пусть система $a_1, a_2, \dots, a_k$ является ортогональной, т.е. выполняются условия (2), причем $(a_i, a_i) > 0, \quad i = 1, \dots, k$. Рассмотрим линейную комбинацию :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = 0. \tag{4}$$

Умножив обе части равенства (4) на любой элемент системы, например, на a_i, получим:

$$\alpha_1(a_1, a_i) + \alpha_2(a_2, a_i) + \cdots + \alpha_i(a_i, a_i) + \cdots + \alpha_k(a_k, a_i) = 0.$$

Учитывая равенства (2), получим:

$$\alpha_i(a_i, a_i) = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha_i = 0$, для всех $i = 1, \dots, k$. По определению линейной независимости это означает, что данная система линейно независима. $\square$

6.2 Ортогональный базис

В этом параграфе будет описан процесс ортогонализации, с помощью которого из произвольного базиса пространства можно получить базис, состоящий из ортогональных векторов. Основывается процесс ортогонализации на следующей теореме:

Теорема **6.2.1** (Грама-Шмидта)**.** *Из любой линейно независимой системы можно получить ортогональную систему векторов.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – произвольная линейно независимая система векторов пространства E^n. Наша цель построить ортогональную систему векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Положим $b_1 = a_1$.
Вектор b_2 найдем в виде $b_2 = a_2 + \alpha_{21} b_1$.
Подберем коэффициент α_{21} так, чтобы векторы b_1 и b_2 были ортогональны:

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, a_2 + \alpha_{21} b_1) = (b_1, a_2) + \alpha_{21}(b_1, b_1).$$

Отсюда получаем:

$$\alpha_{21} = -\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}.$$

Так как система $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – линейно независима, то она не может содержать нулевой вектор, а значит, представление b_2 через $b_1 = a_1$ и a_2 возможно.

Дальнейшее построение системы векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ продолжим воспользовавшись методом математической индукции, первый шаг которой уже сделан.

Предположим что построена ортогональная система векторов $b_1, \ldots, b_{k-1}$. Положим $b_k = a_k + \alpha_{k1} b_1 + \cdots + \alpha_{kk-1} b_{k-1}$. Умножим скалярно последнее равенство последовательно на каждый вектор $b_i, i = 1, \ldots, k-1$:

$$(b_i, b_k) = (b_i, a_k + \alpha_{k1} b_1 + \cdots + \alpha_{kk-1} b_{k-1}) =$$
$$= (b_i, a_k) + \alpha_{k1}(b_i, b_1) + \cdots + \alpha_{kk-1}(b_i, b_{k-1}).$$

Так как по предположению индукции векторы $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ попарно ортогональны, то $(b_j, b_i) = 0$ для всех $j = 1, \ldots, k-1, \quad i \neq j$. Поэтому получаем

$$(b_i, b_k) = (b_i, a_k) + \alpha_{ki}(b_i, b_i).$$

Чтобы найденный вектор b_k был ортогонален каждому вектору системы $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$, приравняем к нулю правую часть равенства и найдем α_{ki}:

$$\alpha_{ki} = -\frac{(b_i, a_k)}{(b_i, b_i)}.$$

Полученная таким образом система векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ортогональна. Теорема доказана. $\square$

Используя предыдущую теорему, можно описать **процесс ортогонализации** линейно независимой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

1. Первый вектор оставляем без изменения: $b_1 = a_1$.

2. Следующие векторы находим по формуле

$$b_i = a_i - \frac{(b_1, a_i)}{b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_i)}{b_2, b_2)} b_2 - \cdots - \frac{(b_{i-1} a_i)}{(b_{i-1}, b_{i-1})} b_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, k.$$

Если число векторов в заданной системе равнялось $n = \dim E$, то полученные векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ образуют ортогональный базис, так как их число равняется размерности пространства и они, в силу теоремы 3.1.1, линейно независимы. Таким образом, справедливо утверждение, что *всякое евклидово пространство обладает ортогональным базисом.* Если каждый вектор базиса умножить на число обратное его скалярному квадрату, т.е. определить

$$e_i = \frac{1}{(b_i, b_i)} b_i,$$

то получим ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Пример **6.2.1.** *Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов*

$$a_1 = (1, 2, 2, -1), \quad a_2 = (1, 1, -5, 3), \quad a_3 = (3, 2, 8, -7).$$

$\square$ Решение. Прежде всего найдем базис подпространства $L =< a_1, a_2, a_3 >$. Для этого найдем максимальную линейно независимую подсистему системы a_1, a_2, a_3.

Запишем матрицу, составленную из векторов a_1, a_2, a_3 и приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 30 & -20 \end{pmatrix}.$$

Первые три столбца последней матрицы образуют ненулевой минор порядка 3. Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы, т.е. образуют базис этого подпространства, и к ним можно применить процесс ортогонализации.

Обозначим через b_1, b_2, b_3 искомый ортогональный базис. Согласно теореме они представимы в виде

$$b_1 = a_1 = (1, 2, 2, -1), \quad b_2 = \alpha_{21} b_1 + a_2, \quad b_3 = \alpha_{31} b_1 + \alpha_{32} b_2 + a_3.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты

$$\alpha_{21} = -\frac{(b_1, a_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1 + 2 - 10 - 3}{1 + 4 + 4 + 1} = 1,$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} = -\frac{3 + 4 + 16 + 7}{1 + 4 + 4 + 1} = -3,$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} = -\frac{6 + 6 - 24 - 14}{4 + 9 + 9 + 4} = 1.$$

Откуда получаем

$$b_2 = (1, 2, 2, -1) + (1, 1, -5, 3) = (2, 3, -3, 2),$$

$$b_3 = -3(1, 2, 2, -1) + (2, 3, -3, 2) + (3, 2, 8, -7) = (2, -1, -1, -2).$$

Искомый базис имеет вид

$$b_1 = (1, 2, 2, -1), \quad b_2 = (2, 3, -3, 2), \quad b_3 = (2, -1, -1, -2). \quad \square$$

Теорема **6.2.2.** *Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства E^n тогда и только тогда будет ортонормированным, когда скалярное произведение любых двух векторов пространства равно сумме произведений соответственных координат этих векторов в данном базисе.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в евклидовом пространстве E^n задан базис $e: \quad e_1, e_2, \ldots, e_n$, и если векторы a и b имеют в нем координаты:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

то скалярное произведение этих векторов находится по формуле:

$$(a, b) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_n \beta_n.$$

Запишем базисные векторы в виде координатных строк

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Найдем скалярное произведение любых двух неравных векторов e_i и e_j по указанной формуле

$$(e_i, e_j) = 0 \cdot 0 + \dots + 1 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 0 = 0.$$

Для любого вектора e_i скалярный квадрат равен

$$(e_i, e_i) = 0 \cdot 0 + \dots + 1 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 0 = 1.$$

По определению это означает, что базис e – ортонормированный.
Достаточность. Пусть базис $e: \quad e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный, т.е.

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Возьмем два произвольных вектора пространства

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \qquad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j.$$

Найдем их скалярное произведение:

$$(a, b) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Теорема доказана. □

В параграфе 1.3 рассматривались изоморфные векторные пространства. Для евклидовых пространств E и E' понятие изоморфного соответствия $\varphi : E \longrightarrow E'$ дополняется выполнением еще одного условия:
3. $(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b)), \quad \forall a, b \in E, \quad \varphi(a), \varphi(b) \in E'$.
Справедлива теорема:

Теорема **6.2.3.** *Любые два евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны.*

Доказательство. Пусть даны два евклидовых пространства E и E' одинаковой размерности n. Выберем в каждом из них ортонормированные базисы. $e = e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства E, $e' = e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – базис пространства E'. Рассмотрим отображение φ, которое произвольному вектору $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ пространства V ставит в соответствие вектор $a' = \varphi(a) = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n$ пространства V'.

Взаимно однозначное соответствие φ, определенное таким образом, является изоморфизмом пространств E и E', как векторных пространств (смотри доказательство теоремы 1.3.1). Докажем выполнимость условия 3.

Возьмем два произвольных вектора пространства E

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i.$$

Так как базис e – ортонормированный, то

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Найдем скалярное произведение образов этих векторов, учитывая, что и базис e' также ортонормированный:

$$(\varphi(a), \varphi(b)) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Это и означает, что евклидовы пространства E и E' изоморфны. $\square$

6.3 Ортогональное дополнение

Пусть K – подпространство евклидова пространства E^n. Вектор a будем называть *ортогональным* подпространству K и обозначать $a \perp K$, если он ортогонален любому вектору подпространства K, т.е.

$$(a, b) = 0, \quad \forall b \in K.$$

Множество $K_\perp$ всех векторов, ортогональных подпространству K, будем называть *ортогональным дополнением* подпространства K:

$$K_\perp = \{a \in E^n | a \perp K\}.$$

Свойства ортогонального дополнения

(1) $K_\perp$ есть подпространство пространства E^n.

Для доказательства воспользуемся критерием подпространства. Пусть a и b принадлежат $K_\perp$. Это означает, что для всех x из подпространства K

$$(a, x) = 0, \qquad (b, x) = 0.$$

Найдем скалярное произведение вектора $\alpha a + \beta b$ и произвольного вектора x из подпространства K

$$(\alpha a + \beta b, x) = \alpha(a, x) + \beta(b, x) = 0$$

А это значит, что $\alpha a + \beta b$ принадлежит $K_\perp$.

(2) Пересечение K и $K_\perp$ состоит только из нулевого вектора .

Предположим, что вектор a принадлежит как подпространству K так и подпространству $K_\perp$. Тогда $(a, a) = 0$, а значит, $a = 0$, т.е.

$$K \cap K_\perp = \{0\}.$$

(3) Прямая сумма подпространств K и $K_\perp$ есть все пространство E^n.

Докажем, что любой вектор $v \in E^n$ представим в виде суммы $a + b$, где $a \in K$, а $b \in K_\perp$.

Выберем в K ортонормированный базис $e: \quad e_1, e_2, \ldots, e_s$. Найдем в K вектор $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_s e_s$ такой, что вектор $b = a - v$ принадлежит подпространству $K_\perp$. Для этого достаточно, чтобы b был ортогонален каждому $e_i, \quad i = 1, \ldots, s$.

$$(v - a, e_i) = (v - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \cdots - \alpha_s e_s, e_i) =$$

$$= (v, e_i) - \alpha_1(e_1, e_i) - \cdots - \alpha_s(e_s, e_i) = (v, e_i) - \alpha_i.$$

Приравнивая нулю полученные скалярные произведения, получим значения $\alpha_i = (v, e_i)$ такие, что вектор $b = v - a \in K_\perp$, а значит, $v = a + b$. Отсюда следует, что

$$K \oplus K_\perp = E^n.$$

Если вектор $v \in E^n$ представим в виде суммы $a+b$, где $a \in K$, а $b \in K_\perp$, то вектор a называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство K (обозначают $a = {}_K v$), а вектор b называют *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства K.

Пример **6.3.1.** *Найти ортогональную проекцию a и ортогональную составляющую b вектора $v = (4, -1, -3, 4)$ относительно линейного подпространства L, натянутого на векторы*

$$a_1 = (1, 1, 1, 1), \quad a_1 = (1, 2, 2, -1), \quad a_1 = (1, 0, 0, 3).$$

□ Решение. Прежде всего найдем базис подпространства L.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы a_1, a_2 составляют базис подпространства L. Ортогонализируем этот базис.

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = \alpha_{21} e_1 + a_2, \quad \alpha_{21} = -\frac{(e_1, a_2)}{(e_1, e_1)} = -1$$

$$e_2 = (-1, -1, -1, -1) + (1, 2, 2, -1) = (0, 1, 1, -2).$$

Теперь вычислим коэффициенты из представления вектора
$v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \ + \ b$:

$$\beta_1 = \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)} = \frac{4 - 1 - 3 + 4}{1 + 1 + 1 + 1} = 1, \quad \beta_2 = \frac{(e_2, x)}{(e_2, e_2)} = \frac{-1 - 3 - 8}{1 + 1 + 4} = -2.$$

$$a = \beta_1 e_1 + \beta_{22} = (1, 1, 1, 1) - 2(0, 1, 1, -2) = (1, -1, -1, 5),$$

$$b = v - a = (4, -1, -3, 4) - (1, -1, -1, 5) = (3, 0, -2, -1).$$

Таким образом, $a = (1, -1, -1, 5), \quad b = (3, 0, -2, -1).$ □

Глава 7

Квадратичные формы.

В этом разделе вводится понятие квадратичной формы, определяются ее канонический и нормальный вид, доказывается закон инерции для квадратичных форм, рассматриваются положительно определенные квадратичные формы.

7.1 Определение квадратичной формы

Квадратичной формой от n переменных называется линейная комбинация квадратов переменных или произведений двух разных переменных. Квадратичная форма будет называться действительной (комплексной), если коэффициенты при слагаемых действительны (комплексны). Обозначается квадратичная форма следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad x_i x_j = x_j x_i.$$

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить матрицу, которая называется *матрицей квадратичной формы*, а ее ранг –*рангом квадратичной формы*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому матрица квадратичной формы симметрична относительно главной диагонали. Справедливо и обратное утверждение: любая симметрическая матрица задает некоторую квадратичную форму.

Введем следующие обозначения

$$X = (x_1 \quad x_2 \quad \dots x_n), \quad X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда квадратичную форму можно записать в матричном виде:

$$f = XAX'.$$

7.2 Преобразования квадратичных форм

Рассмотрим квадратичную форму f от n переменных. Перейдем от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с помощью линейного преобразования с матрицей Q к переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \dots + q_{1n}y_n,$$

$$x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \dots + q_{2n}y_n,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \dots + q_{nn}y_n.$$

В матричном виде эти преобразования задаются следующим образом:

$$X' = QY', \quad X = YQ',$$

где X', Y', Q' – транспонированные матрицы соответственно к матрицам $X = (x_1 \quad x_2 \quad \dots x_n), \quad Y = (y_1 \quad y_2 \quad \dots y_n), \quad Q$. Тогда получим:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = XAX' = YQ'AQY' = YBY' = g(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

где $B = Q'AQ$. Покажем, что B – симметрическая матрица. Для этого достаточно показать, что $B' = B$. Воспользуемся формулой $(AB)' = B'A'$:

$$B' = (Q'AQ)' = Q'A'(Q')' = Q'AQ = B.$$

Таким образом, мы показали, что если на квадратичную форму подействовать линейным преобразованием переменных, то в результате получится квадратичная форма от новых переменных с матрицей $B = Q'AQ$. Если преобразование, а значит, и матрица Q – невырожденны, то при таком преобразовании не меняется ранг квадратичной формы.

Каноническим видом квадратичной формы называется квадратичная форма, содержащая только квадраты переменных, т.е. квадратичная форма вида

$$g = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2.$$

Нормальным видом действительной (комплексной) квадратичной формы называется квадратичная форма канонического вида, все коэффициенты которой равны 1, -1 или 0 (для комплексной – 1, 0).

Теорема **7.2.1** (основная теорема)**.** *Любую действительную (комплексную) квадратичную форму при помощи одного невырожденного преобразования неизвестных можно привести к каноническому виду, причем это преобразование будет иметь действительную (комплексную) матрицу.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу переменных в квадратичной форме.

1. Пусть $n = 1$. Тогда $f(x_1) = a_{11}x_1^2$ имеет канонический вид.

2. Предположим, что квадратичные формы от $n-1$ переменной обладают необходимым свойством.

3. Рассмотрим квадратичную форму от n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Возможны два случая:

1) Квадратичная форма f содержит квадрат хотя бы одной переменной. Не ограничивая общность доказательства, будем считать, что $a_{11} \neq 0$.

Введем новую переменную $y = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$. Рассмотрим выражение:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{1}{a_{11}}y^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 -$$

$$-\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 = g(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Квадратичная форма $g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ зависит от $n-1$ переменных, поскольку все слагаемые, содержащие x_1 взаимно уничтожатся после раскрытия скобок и приведения подобных. Применим к переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ невырожденное линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n \\ y_2 = & & x_2 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n = & & & & x_n \end{cases}$$

Тогда получим, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + g(y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Квадратичная форма g содержит $n-1$ переменную, поэтому, согласно предположения индукции, может с помощью невырожденного преобразования переменных быть приведена к каноническому виду. Например при помощи следующего линейного преобразования

$$\begin{cases} z_1 = & y_1 & & & & \\ z_2 = & & c_{22}y_2 & +c_{23}y_3 & +\dots & +c_{2n}y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n = & & c_{n2}y_2 & +c_{n3}y_3 & +\dots & +c_{nn}y_n \end{cases}$$

В результате этих преобразований исходная квадратичная форма примет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2.$$

Запишем преобразования переменных в матричном виде. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Матрицы T и C невырожденные, поэтому существуют обратные для них. Поэтому $Y = TX$ влечет $X = T^{-1}Y$, а из $Z = CY$ следует, что $Y = C^{-1}Z$. Окончательно получим $X = (T^{-1}C^{-1})Z$. Первый случай доказан.
2). Пусть все $a_{ii} = 0$, но какое-то из $a_{ij} \neq 0$. Примем для удобства записи, что $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим следующее преобразование переменных:

$$\begin{cases} x_1 = & y_1 & -y_2 & & & \\ x_2 = & y_1 & +y_2 & & & \\ x_3 = & & & y_3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n = & & & & & y_n \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Это означает, что преобразование переменных невырожденное. Квадратичная форма примет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + \dots + 2a_{n-1,n}y_{n-1}y_n =$$

$$= 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \dots + 2a_{n-1,n}y_{n-1}y_n.$$

Дальнейшее доказательство сводится к первому случаю.

Если исходная квадратичная форма имеет действительные (комплексные) коэффициенты, то, как следует из доказательства, матрица линейного преобразования переменных, приводящего квадратичную форму к каноническому виду, будет состоять из действительных (комплексных) чисел.

Теорема доказана. □

Рассмотрим квадратичную форму над множеством комплексных чисел. По предыдущей теореме ее можно привести к каноническому виду:

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \dots + b_ny_n^2.$$

Сделаем преобразование переменных, положив $z_i = \sqrt{b_i}y_i$. Это линейное преобразование, очевидно, невырожденное и приводит квадратичную форму к нормальному виду:

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2.$$

Если рассматривается действительная квадратичная форма, то ее можно привести к следующему каноническому виду:

$$f = b_1y_1^2 + \dots + b_ry_r^2 - b_{r+1}y_{r+1}^2 - \dots - b_ny_n^2,$$

где все $b_i > 0$. Тогда, применяя невырожденное линейное преобразование $z_i = \sqrt{b_i}y_i$, получим нормальный вид действительной квадратичной формы:

$$f = z_1^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_n^2.$$

Таким образом, справедливо утверждение, что *любую квадратичную форму можно привести к нормальному виду с помощью невырожденного линейного преобразования.*

Пример **7.2.1.** *Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование неизвестных, приводящее к этому виду, для квадратичной формы*

$$f = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

□ Решение. Выберем какое-нибудь неизвестное, например, x_1, и выпишем все слагаемые, содержащие x_1. В нашем случае $4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$. Поэтому, согласно теореме необходимо применить следующее линейное преобразование с невырожденной матрицей B:

$$\begin{array}{rrrr} y_1 = & 4x_1 & -2x_2 & +2x_3, \\ y_2 = & & x_2 & , \\ y_3 = & & & x_3, \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

К исходной квадратичной форме прибавим и вычтем выражение из нее

$$\frac{1}{4}(4x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2 :$$

$$f = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3 + \frac{1}{4}(4x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2 -$$

$$-4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = \frac{1}{4}y_1^2 + y_1y_3.$$

Последнее выражение получено в результате применения невырожденного линейного преобразования с матрицей B. Для того, чтобы избавиться от слагаемого y_1y_2 воспользуемся следующим стандартным невырожденным линейным преобразованием неизвестных с матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rll} y_1 = & z_1 & \\ y_2 = & & z_2 + z_3 \\ y_3 = & & z_2 - z_3 \end{array}$$

$$f = \frac{1}{4}y_1^2 + y_1y_3 = \frac{1}{4}z_1^2 + z_2^{+} z_3^2.$$

На этом этапе получен канонический вид. Для получения нормального вида квадратичной формы можно применить следующее линейное преобразование неизвестных

$$\begin{array}{rlll} z_1 = & 2u_1 & & \\ z_2 = & & u_2 & \\ z_3 = & & & u_3 \end{array} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После чего квадратичная форма примет вид
$$f = u_1^2 - u_2^2 + u_3^2.$$

Найдем теперь одно невырожденное линейное преобразование неизвестных, приводящее к этому нормальному виду первоначальную квадратичную форму. Обозначим через X столбец неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, через Y – столбец неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, через Z – столбец неизвестных $z_1, z_2, \ldots, z_n$, а через U – столбец неизвестных $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Тогда, полученные выше линейные преобразования неизвестных можно представить в матричном виде
$$Y = BX, \quad Y = CZ, \quad Z = DU.$$
Нам необходимо выразить X через U. Это достигается следующим образом
$$X = B^{-1}Y, \quad Y = CZ, \quad Z = DU.$$
Окончательно получаем равенство $X = B^{-1}CDU$. Вычислим матрицу B^{-1}:
$$|B| = 4, \quad B' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Найдем произведение $B^{-1}CD =$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Таким образом, при помощи невырожденного линейного преобразования неизвестных
$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}u_1 & &+u_3 \\ x_2 &= & u_2 &+u_3 \\ x_3 &= & u_2 &-u_3 \end{aligned}$$
квадратичная форма приводится к нормальному виду $f = u_1^2 - u_2^2 + u_3^2$. $\square$

Заметим, что если бы после применения первого линейного преобразования слагаемые, содержащие x_1^2, x_2^2 не уничтожились, то можно было бы выделить полный квадрат или действовать как с неизвестной x_1 в самом начале решения. Рассмотрим случай, когда квадратичная форма не содержит квадратов неизвестных.

Пример **7.2.2.** *Найти нормальный вид квадратичной формы*

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

□ Решение. Сначала применим линейное невырожденное преобразование, приводящее к квадратичной форме содержащей по крайней мере один квадрат неизвестной, а затем можно воспользоваться методом решения предыдущего примера.

$$\begin{array}{rllll} x_1 = & y_1 & -y_2 & & \\ x_2 = & y_1 & +y_2 & & \\ x_3 = & & & y_3 & \\ x_4 = & & & & y_4 \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

В результате получим квадратичную форму

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 - y_2y_4 + y_1y_3 - y_2y_4 + y_1y_3 + y_2y_3 + y_1y_4 + y_2y_4 + y_3y_4 =$$

$$= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_1y_4 + y_3y_4.$$

Теперь применим невырожденное линейное преобразование неизвестных

$$\begin{array}{rllll} z_1 = & y_1 & y_2 & +y_3 & +y_4 \\ z_2 = & & y_2 & & \\ z_3 = & & & y_3 & \\ z_4 = & & & & y_4. \end{array}$$

После этого квадратичная форма примет вид

$$f = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - 2y_1y_3 - 2y_3y_4 - 2y_1y_4 + y_1^2 - y_2^2 =$$

$$= (y_1 + y_2 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_3y_4 =$$

$$= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_3z_4 - z_4^2 = z_1^2 - z_2^2 - (z_3 + 2 \cdot \frac{1}{2}z_3z_4 + \frac{1}{4}z_4^2) + \frac{3}{4}z_4^2 =$$

$$= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Последнее равенство получается после применения следующего невырожденного линейного преобразования

$$\begin{array}{rllll} u_1 = & z_1 & & & \\ u_2 = & & z_2 & & \\ u_3 = & & & z_3 & +\frac{1}{2}z_4 \\ u_4 = & & & & \frac{\sqrt{3}}{2}z_4. \end{array}$$

Таким образом получен нормальный вид квадратичной формы

$$u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2. \quad \square$$

Преобразование, которое приводит квадратичную форму к каноническому, а значит и к нормальному виду, определяется неоднозначно. Однако, данная квадратичная форма имеет единственный, с точностью до порядка переменных, нормальный вид, т.е. число квадратов переменных, входящих в нормальный вид со знаком плюс, будем в дальнейшем называть их «положительными квадратами», и число квадратов переменных, входящих в нормальный вид со знаком минус («отрицательные квадраты»), остается одинаковым при любом невырожденном преобразовании переменных. Справедлива следующая

Теорема **7.2.2** (Закон инерции квадратичных форм.)**.** *Для любой действительной квадратичной формы, независимо от невырожденного линейного преобразования переменных, число «положительных» и «отрицательных» квадратов в нормальном виде является постоянным.*

Доказательство. При помощи двух невырожденных линейных преобразований переменных

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} z_j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad |S| \neq 0,$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} u_j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad |T| \neq 0$$

приведем квадратичную форму f к нормальному виду:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_1^2 + \cdots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \cdots - z_n^2 =$$

$$= u_1^2 + \cdots + u_l^2 - u_{i+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Предположим, что $k < l$. Поскольку линейные преобразования невырожденные, то существуют обратные преобразования переменных:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad A = S^{-1}, \tag{1}$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad B = T^{-1}. \tag{2}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ \dots \\ z_k = 0, \\ u_{l+1} = 0, \\ \dots \\ u_n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Заменим в этих равенствах все переменные соответствующими значениями из (1) и (2). Получим однородную систему линейных уравнений от n неизвестных, состоящую из $k + (n - l) = n - (l - k)$ уравнений. Так как по предположению $k < l$, то число уравнений меньше числа неизвестных, а значит, такая система будет иметь ненулевые решения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – ненулевое решение (3). Подставим эти значения вместо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в нормальный вид квадратичной формы:

$$f(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \dots + z_k^2(\alpha) - z_{k+1}^2(\alpha) - \dots - z_n^2(\alpha) =$$
$$= u_1^2(\alpha) + \dots + u_l^2(\alpha) - u_{l+1}^2(\alpha) - \dots - u_n^2(\alpha).$$

Отсюда получаем:

$$-z_{k+1}^2(\alpha) - \dots - z_n^2(\alpha) = u_1^2(\alpha) + \dots + u_l^2(\alpha).$$

Это равенство возможно только в том случае, когда все слагаемые в левой и правой частях равны нулю:

$$\begin{cases} z_{k+1} = 0, \\ \dots \\ z_n = 0, \\ u_1 = 0, \\ \dots \\ u_l = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ \dots \\ z_k = 0, \\ z_{k+1} = 0, \\ \dots \\ z_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

В матричном виде ее можно записать, учитывая (1), следующим образом:

$$AX = 0.$$

α является ненулевым решением этой однородной системы, но так как матрица A невырожденная, то система (5) имеет только нулевое решение. Полученное противоречие возникло из предположения, что $k < l$. Аналогичный результат мы получим, предположив, что $k > l$. Следовательно, $k = l$. Теорема доказана. □

Обозначим через d^+ число «положительных» квадратов в нормальном виде квадратичной формы, которое будем называть *положительным индексом инерции,* а через d^- – число «отрицательных» квадратов – *отрицательный индекс инерции.* Разность $s = d^+ - d^-$ называется *сигнатурой* квадратичной формы.

Теорема **7.2.3.** *Две квадратичные формы с помощью одного невырожденного линейного преобразования тогда и только тогда переводятся друг в друга, когда совпадают их ранги и сигнатуры.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма f линейным невырожденным преобразованием φ переводится в квадратичную форму g, а линейным невырожденным преобразованием ψ приводится к нормальному виду, т.е.

$$\varphi(f) = g, \quad \psi(f) = y_1^2 + \dots y_{d^+}^2 - y_{d^+-1}^2 - \dots - y_n^2$$

Тогда ранги квадратичных форм f и g совпадают, и квадратичная форма g линейным невырожденным преобразованием $\psi\varphi^{-1}$ приводится к тому же нормальному виду, что и f, следовательно, совпадают их сигнатуры.
Обратно, если у двух квадратичных форм равны их ранги и сигнатуры, то они имеют одинаковый нормальный вид:
$\varphi(f) = y_1^2 + \dots y_{d^+}^2 - y_{d^+-1}^2 - \dots - y_n^2$, φ – невырожденное преобразование,
$\psi(g) = y_1^2 + \dots y_{d^+}^2 - y_{d^+-1}^2 - \dots - y_n^2$, ψ– невырожденное преобразование.
Тогда линейное невырожденное преобразование $\varphi\psi^{-1}$ переводит квадратичную форму f в квадратичную форму g. Теорема доказана. □

7.3 Положительно определенные квадратичные формы

Действительную квадратичную форму назовем *положительно определенной*, если ее нормальный вид есть сумма «положительных» квадратов, т.е. $rangf = d_+ = n$.

Теорема **7.3.1.** *Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда для любого ненулевого набора значений переменных значение самой квадратичной формы строго положительно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – положительно определенная квадратичная форма. Это значит, что найдется линейное невырожденное преобразование переменных:

$$(*) \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad |B| \neq 0,$$

приводящее квадратичную форму к нормальному виду:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ произвольный ненулевой набор значений переменных x. Подставим эти значения в правые части равенств (*). Из невырожденности линейного преобразования следует, что среди полученных значений y_i найдется хотя бы одно ненулевое значение. Поэтому сумма квадратов этих значений в нормальном виде будет строго положительной.

Достаточность. Пусть для произвольного ненулевого набора переменных $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значение $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) > 0$. Предположим, что в нормальном виде квадратичной формы либо отсутствует квадрат одной из переменных, либо присутствует хотя бы один со знаком плюс, например, квадрат y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + b y_n^2, \quad b = 0 \vee b = -1.$$

Составим систему линейных уравнений из равенств невырожденного линейного преобразования, приводящего квадратичную форму к нормальному виду с ненулевым столбцом свободных членов, например,

$$\begin{cases} y_1 = & b_{11}x_1 & +b_{12}x_2 & +\ldots & +b_{1n}x_n & = 0 \\ y_2 = & b_{21}x_1 & +b_{22}x_2 & +\ldots & +b_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n = & b_{n1}x_1 & +b_{n2}x_2 & +\ldots & +b_{nn}x_n & = -1. \end{cases}$$

По правилу Крамера эта система имеет ненулевое решение ($|B| \neq 0$). Обозначим его $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Подставим это решение в квадратичную форму

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = b, \quad b = 0 \vee b = -1,$$

что противоречит условию. Теорема доказана. □

Назовем *главными минорами матрицы* все миноры, стоящие в левом верхнем углу.

Теорема **7.3.2** (Критерий Сильвестра). *Квадратичная форма будет положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры строго положительны.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу переменных в квадратичной форме.

1. При $n = 1$ имеем $f(x_1) = a_{11}x_1^2$. В этом случае единственный главный минор A равен a_{11}. Поэтому квадратичная форма будет положительно определенной тогда и только тогда, когда $a_{11} > 0$.

2. Предположим, что теорема справедлива для любой квадратичной формы от $n-1$ переменной.

3. Докажем справедливость утверждения теоремы для случая n переменных в квадратичной форме f.

Необходимость. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – положительно определенная квадратичная форма. Представим ее в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n} a_{in}x_ix_n + a_{nn}x_n^2. \qquad (**)$$

Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ является также положительно определенной. В противном случае есть такой ненулевой набор $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, что $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqslant 0$. Дополнив этот набор значением $x_n = 0$ и подставив в квадратичную форму f, получим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, по предположению индукции, все главные миноры матрицы квадратичной формы g строго положительны. Они же являются главными минорами матрицы f первого, второго и т.д. $n-1$ порядков.

Для завершения доказательства необходимости осталось доказать, что сама матрица A квадратичной формы f имеет определитель, строго больший нуля. По определению положительной определенности, квадратичная форма f с матрицей A линейным невырожденным преобразованием с матрицей C приводится к сумме n квадратов:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \cdots + b_ny_n^2, \quad b_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определитель матрицы полученной квадратичной формы равен:

$$|B| = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \dots b_n > 0.$$

Матрицы A, B, C связаны равенством

$$B = C'AC.$$

Отсюда следует, что

$$|B| = |C'||A||C| = |C|^2|A|.$$

Это означает, что определители матриц A и B имеют одинаковые знаки, и значит, $|A| > 0$.

Достаточность. Пусть все главные миноры квадратичной формы f строго положительны. Учитывая представление (**), можно сделать вывод, что все главные миноры квадратичной формы g строго положительны. По предположению индукции отсюда следует, что квадратичная форма g положительно определена, а по определению это означает, что она приводится к виду

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2$$

с помощью некоторого линейного невырожденного преобразования:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Дополнив это преобразование равенством $y_n = x_n$, подставим в (**):

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} y_i y_n. \qquad (***)$$

К последней квадратичной форме применим линейное невырожденное преобразование:

$$z_i = y_i + a_{in} y_n, \quad i = 1, \dots, n-1,$$
$$z_n = y_n,$$

получим

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \dots + c z_n^2.$$

Докажем, что $c > 0$. Так как линейные невырожденные преобразования не меняют знак определителя матрицы квадратичной формы, и по условию $|A| > 0$, как главный минор n-го порядка, то и определитель матрицы последней квадратичной формы должен быть больше нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c \end{vmatrix} = c > 0.$$

Таким образом, мы показали, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ приводится к сумме «положительных» квадратов, т.е. она положительно определена. Теорема доказана. □

Пример **7.3.1.** *Найти все значения параметра a, при которых будет строго положительной квадратичная форма*

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

□ Решение. Вычислим все главные миноры и найдем все те значения a, при которых они будут строго положительными.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5a^2 - 4a, \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2, |1| = 1.$$

Составим систему неравенств для нахождения a

$$\begin{cases} -5a^2 & -4a > 0 \\ 1 & -a^2 > 0 \end{cases} \begin{cases} 5a^2 + 4a < 0 \\ (1-a)(1+a > 0 \end{cases} \begin{cases} a(5a+4 > 0 \\ (1-a)(1+a) > 0 \end{cases}$$

$$-\frac{4}{5} < a < 0$$

Таким образом, для всех a из интервала $(-4/5, 0)$ наша квадратичная форма будет положительно определенной, т.е. на любом ненулевом наборе неизвестных будет принимать строго положительные значения. □

Глава 8

Операторы евклидовых пространств

В главе 8 вводятся понятия двух очень важных понятий: симметрического и ортогонального линейных операторов евклидовых пространств, устанавливается их связь с симметрической и ортогональной матрицей, изучаются их свойства. Изучение этих операторов оправдывается тем, что любой оператор евклидового пространства является композицией симметрического и ортогонального операторов. В качестве приложения приводится доказательство существования ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к главным осям.

8.1 Симметрические операторы

Линейный оператор евклидова пространства E^n назовем *симметрическим или самосопряженным,* если выполняется следующее равенство:

$$(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b)), \quad \forall a, b \in E^n.$$

Рассмотрим некоторые примеры симметрических операторов.

1. Тождественный оператор ε:

$$\forall a \in E^n, \varepsilon(a) = a$$

является симметрическим. Действительно,

$$(\varepsilon(a), b) = (a, b) = (a, \varepsilon(b)).$$

Матрицей этого оператора является единичная матрица.

2. Нулевой оператор ω ($\forall a \in E^n \quad \omega(a) = 0$) также будет симметрическим, так как

$$(\omega(a), b) = (0, b) = 0 = (a, 0) = (a, \omega(b)).$$

Его матрицей будет нулевая матрица.
3. Оператор, переводящий вектор в ему пропорциональный, т.е. $\varphi(a) = \lambda a$, является симметрическим:

$$(\varphi(a), b) = (\lambda a, b) = \lambda(a, b) = (a, \lambda(b)) = (a, \varphi(b)).$$

Найдем матрицу этого оператора:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Теорема **8.1.1.** *Симметрический линейный оператор евклидова пространства E^n в любом ортонормированном базисе задается симметрической матрицей. Обратно, если в некотором ортонормированном базисе линейный оператор задается симметрической матрицей, то он симметрический.*

Доказательство. 1. Пусть φ – симметрический оператор, и в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ он задается матрицей A:

$$\varphi(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} e_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Найдем произведения:

$$(\varphi(e_i), e_j) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} (e_k, e_j) = \alpha_{ji}, \tag{1}$$

$$(e_i, \varphi(e_j)) = (e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} (e_i, e_k) = \alpha_{ij}. \tag{2}$$

Так как левые части равенств (1) и (2), ввиду симметричности оператора φ, совпадают, то и их правые части должны быть равными:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

Это и означает, что матрица A – симметрическая.

2. Пусть матрицей линейного оператора φ в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ является симметрическая матрица A.

Рассмотрим два произвольных вектора

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, a_n)$$

пространства E^n и их образы:

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \quad \varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{ki}) e_k, \tag{3}$$

$$b = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j, \quad \varphi(b) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_{kj}) e_k. \tag{4}$$

Учитывая, что базис ортонормированный, найдем скалярные произведения:

$$(\varphi(a), b) = (\sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{ki}) e_k, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{1i} b_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{2i} b_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{ni} b_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{ji} b_j, \tag{5}$$

$$(a, \varphi(b)) = (\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_{kj}) e_k) =$$

$$= a_1 \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_{1j} + a_2 \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_{2j} + \dots + a_n \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_{nj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{ij} b_j. \tag{6}$$

Так как по условию матрица A – симметрическая, а значит, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, то правые части равенств (5) и (6) равны. Отсюда следует, что и левые части этих равенств совпадают:

$$(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b)).$$

Это означает, что оператор φ – симметрический.
Теорема доказана. □

Свойства симметрических операторов.

(1) Сумма симметрических операторов есть симметрический оператор.

(2) Произведение симметрического оператора на число есть симметрический оператор.

Доказательство свойств 1 и 2 сводится к доказательству симметричности соответствующих матриц.

(3) Все характеристические корни симметрической действительной матрицы действительны, а значит, все собственные числа симметрического оператора, действующего в пространстве E^n над множеством R – действительные числа.

Доказательство. Пусть A – действительная симметрическая матрица оператора φ, и λ_0 – один из ее характеристических корней, не обязательно действительный:

$$|A - \lambda_0 E| = 0.$$

Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – один из собственных векторов оператора φ, соответствующий собственному значению λ_0, где x_i, вообще говоря, могут быть и комплексными числами, то можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + & \alpha_{12}x_2 + & \cdots + & \alpha_{1n}x_n = \lambda_0 x_1, \\ \alpha_{21}x_1 + & \alpha_{22}x_2 + & \cdots + & \alpha_{2n}x_n = \lambda_0 x_2, \\ \quad\cdots & \quad\cdots & \cdots & \qquad\cdots \\ \alpha_{n1}x_1 + & \alpha_{n2}x_2 + & \cdots + & \alpha_{nn}x_n = \lambda_0 x_n. \end{cases}$$

Умножим каждое из равенств этой системы на число $\bar{x}_i$ – сопряженное x_i, и сложим полученные равенства:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\bar{x}_1 x_1 + & \alpha_{12}\bar{x}_1 x_2 + & \cdots + & \alpha_{1n}\bar{x}_1 x_n = \lambda_0 \bar{x}_1 x_1, \\ \alpha_{21}\bar{x}_2 x_1 + & \alpha_{22}\bar{x}_2 x_2 + & \cdots + & \alpha_{2n}\bar{x}_2 x_n = \lambda_0 \bar{x}_2 x_2, \\ \quad\cdots & \quad\cdots & \cdots & \qquad\cdots \\ \alpha_{n1}\bar{x}_n x_1 + & \alpha_{n2}\bar{x}_n x_2 + & \cdots + & \alpha_{nn}\bar{x}_n x_n = \lambda_0 \bar{x}_n x_n. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\bar{x}_i x_j = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i. \qquad (7).$$

Сумма, стоящая справа в равенстве (7), является действительным числом. Если мы докажем, что левая часть равенства (7) также действительна, то отсюда будет следовать,что λ_0 – действительное число.

$$\bar{S} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\bar{x}_i x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\bar{x}_i x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \bar{x}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\bar{x}_j x_i = S.$$

Итак, мы получили, что число S совпадает с сопряженным ему $\bar{S}$. Это означает, что $S \in R$. А значит, λ_0 – действительное число.

(4) Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.

Доказательство. Пусть φ – симметрический оператор,

$$\varphi(a) = \lambda_1 a, \qquad \varphi(b) = \lambda_2 b, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Найдем скалярные произведения:

$$(\varphi(a), b) = (\lambda_1 a, b) = \lambda_1 (a, b),$$

$$(a, \varphi(b)) = (a, \lambda_2 b) = \lambda_2 (a, b).$$

Так как левые части полученных равенств совпадают, то равны и их правые части, т.е.

$$\lambda_1 (a, b) = \lambda_2 (a, b).$$

Поскольку по условию теоремы $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то отсюда следует, что $(a, b) = 0$, а значит, векторы a и b – ортогональны.

Теорема **8.1.2.** *Линейный оператор φ евклидова пространства E^n будет симметрическим тогда и только тогда, когда в пространстве E^n существует ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора, в котором матрица φ будет симметрической.*

Доказательство. Необходимость. Воспользуемся методом математической индукции по размерности евклидова пространства E^n.

1. При $n = 1$ E^1 представляет собой пространство, натянутое на один вектор $e_1 \neq 0$. Вектор $\varphi(e_1)$ так же лежит в этом пространстве, а значит,

$$\varphi(e_1) = \lambda e_1$$

Поэтому базисный вектор e_1 является собственным вектором оператора. Если он не нормирован, нормируем его, при этом свойство быть собственным вектором не нарушится:

$$\varphi\Big(\frac{e_1}{\sqrt{(e_1, e_1)}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{(e_1, e_1)}}\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{(e_1, e_1)}}\lambda e_1 = \lambda\Big(\frac{1}{\sqrt{(e_1, e_1)}} e_1\Big).$$

Матрицей линейного оператора в базисе e_1 является число $A = \lambda$, что можно считать диагональной, а значит, и симметрической матрицей.

2. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех евклидовых пространств, размерность которых не превышает $n-1$.

3. Рассмотрим симметрический оператор φ, действующий в евклидовом пространстве E^n. Пусть λ_1 – одно из собственных чисел оператора, а x – один из собственных векторов, соответствующих этому собственному числу. Нормируя вектор x, получим собственный вектор e_1, соответствующий собственному значению λ_1. Дополним вектор e_1 до ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. Этот процесс состоит из нескольких этапов. Сначала e_1 дополняется до базиса пространства, затем к полученному базису применяется процесс ортогонализации, а затем векторы нормируются.

Рассмотрим подпространство L, порожденное векторами $e_2, e_3, \dots, e_n$. Докажем, что это подпространство обладает свойством: ему и только ему принадлежат векторы, ортогональные вектору e_1.

$$\forall l \in L \quad l = l_2 e_2 + l_3 e_3 + \dots + l_n e_n,$$

$$(l, e_1) = (l_2 e_2 + l_3 e_3 + \dots + l_n e_n, e_1) = l_2(e_2, e_1) + l_3(e_3, e_1) + \dots + l_n(e_n, e_1) = 0.$$

Обратно, пусть вектор l допускает разложение: $l = l_1 e_1 + l_2 e_2 + \dots + l_n e_n$ и обладает свойством: $(l, e_1) = 0$. Тогда получим, что

$$(l_1 e_1 + l_2 e_2 + \dots + l_n e_n, e_1) = l_1(e_1, e_1) + l_2(e_2, e_1) + \dots + l_n(e_n, e_1) =$$

$$= l_1(e_1, e_1) = l_1 = 0.$$

Это и означает, что вектор $l \in L$.

Покажем, что образы векторов подпространства L при действии оператора φ снова принадлежат подпространству L:

$$(\varphi(l), e_1) = (l, \varphi(e_1)) = (l, \lambda_1 e_1) = \lambda_1(l, e_1) = 0.$$

Итак, в подпространстве L размерности $n-1$ действует линейный симметрический оператор φ, следовательно по предположению индукции в L найдется ортонормированный базис $e_2', e_3', \dots, e_n'$, состоящий из собственных векторов.

Поскольку все векторы подпространства L ортогональны e_1, то $e_1, e_2', \dots, e_n'$ является искомым ортонормированным базисом пространства E^n, в котором матрица линейного оператора φ будет симметрической.

Достаточность. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E^n, составленный из собственных векторов линейного оператора φ.

Как было доказано в теореме 2.4.3, матрица оператора в этом базисе будет иметь диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

а значит, является симметрической матрицей.

По теореме о связи симметрической матрицы с симметрическим оператором получаем, что φ – симметрический оператор.

Теорема доказана. □

8.2 Ортогональные матрицы

Определение I. Матрица Q называется *ортогональной*, если линейное преобразование переменных квадратичной формы с этой матрицей переводит сумму квадратов в сумму квадратов.

Если есть квадратичная форма

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

и Q – ортогональная матрица, то после преобразований

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

получаем квадратичную форму

$$g = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Определение II. Матрица Q называется *ортогональной*, если ее транспонированная матрица равна обратной

$$Q' = Q^{-1} \tag{2}$$

Определение III. Матрица Q называется ортогональной, если строки матрицы, рассматриваемые как векторы, образуют ортонормированную систему.

Матрица

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

будет ортогональной, если выполняются условия:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ik}q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

Докажем эквивалентность этих определений.

$I \Longrightarrow II$. Матрицей квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является единичная матрица $A = E$, матрица квадратичной формы $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – так же единичная матрица $B = E$. Они связаны с матрицей Q формулой: $B = Q'AQ$. Отсюда получаем : $E = Q'EQ = Q'Q$, а это и означает, что $Q' = Q^{-1}$.

$II \Longrightarrow III$. Если $Q' = Q^{-1}$, то

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

По правилу умножения матриц получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ik}q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

$III \Longrightarrow I$. Пусть матрица Q обладает свойством (3), а квадратичная форма $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет единичную матрицу. Найдем матрицу квадратичной формы после применения преобразований (1):

$$B = Q'EQ =$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Это и означает, что квадратичная форма имеет нормальный вид

$$g(y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Свойства ортогональных матриц.

(1) Ортогональная матрица невырожденная.

Доказательство следует из второго определения, так как только у невырожденной матрицы существует обратная.

(2) Матрица, обратная к ортогональной, снова ортогональна.

Действительно, если Q – ортогональная матрица, то $Q^{-1} = Q'$, а значит, $(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}$, что означает по определению 2 – матрица Q^{-1} ортогональна.

(3) Произведение ортогональных матриц есть матрица ортогональная.

Пусть Q и R – ортогональные матрицы. Так как

$$(QR)' = R'Q',$$
$$(QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}$$

и правые части последних равенств одинаковы, поэтому совпадают и их левые части. По второму определения отсюда следует справедливость этого свойства.

(4) Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису является ортогональной матрицей.

Доказательство. Пусть $e : e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e' : e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ два ортонормированных базиса евклидова пространства, а Q – матрица перехода от e к e', тогда

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} e_k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

По определению ортонормированного базиса, а так же учитывая, что скалярное произведение векторов, заданных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений соответственных координат, получим:

$$(e'_i, e'_j) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

По третьему определению это означает, что матрица Q – ортогональна.

8.3 Ортогональные операторы

Линейный оператор евклидова пространства E^n назовем *ортогональным*, если он сохраняет скалярный квадрат, т.е.

$$(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b).$$

При действии ортогонального оператора скалярное произведение произвольных векторов евклидова пространства не меняется. Докажем это утверждение. Из определения ортогонального оператора имеем:

$$(\varphi(a+b),\varphi(a+b))=(a+b,a+b). \tag{1}$$

Найдем значение левой и правой части равенства (1):

$$\begin{aligned}(\varphi(a+b),\varphi(a+b))&=(\varphi(a)+\varphi(b),\varphi(a)+\varphi(b))=\\&=(\varphi(a),\varphi(a))+2(\varphi(a),\varphi(b))+(\varphi(b),\varphi(b)),\end{aligned} \tag{2}$$

$$(a+b,a+b)=(a,a)+2(a,b)+(b,b). \tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в равенство (1), получим

$$(\varphi(a),\varphi(b))=(a,b).$$

Теорема **8.3.1.** *Ортогональный оператор переводит ортонормированный базис пространства в ортонормированный базис. Обратно, если линейный оператор переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный базис, то этот оператор ортогонален.*

Доказательство. Пусть e: $e_1,e_2,\ldots,e_n$ – ортонормированный базис пространства E^n, в котором действует ортогональный оператор φ. Тогда

$$(\varphi(e_i),\varphi(e_j))=(e_i,e_j),$$

а так как базис e ортонормированный, то и e' : $e'_1,e'_2,\ldots,e'_n$, где $e'_k=\varphi(e_k)$, тоже будет ортонормированным.

Обратно, пусть φ – некоторый линейный оператор пространства E^n, а e: $e_1,e_2,\ldots,e_n$ и его образ e' : $e'_1,e'_2,\ldots,e'_n$ являются ортонормированными базисами. Возьмем произвольный вектор $a\in E^n$:

$$a=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i,\quad \varphi(a)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi(e_i)=\sum_{i=1}^n\alpha_ie'_i.$$

Найдем скалярные квадраты вектора a и его образа $\varphi(a)$:

$$(a,a)=(\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i,\sum_{j=1}^n\alpha_je_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\alpha_j(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_i^2,$$

$$(\varphi(a),\varphi(a))=(\sum_{i=1}^n\alpha_ie'_i,\sum_{j=1}^n\alpha_je'_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\alpha_j(e'_i,e'_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_i^2.$$

Отсюда получаем: $(\varphi(a),\varphi(a))=(a,a)$, следовательно, оператор φ ортогонален. Теорема доказана. □

Теорема **8.3.2.** *Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе задается ортогональной матрицей. Обратно, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе задается ортогональной матрицей, то он является ортогональным.*

Доказательство. Пусть φ – ортогональный оператор пространства, e – произвольный ортонормированный базис. По определению матрицы линейного оператора $\varphi(e) = Ae$, где e и $\varphi(e)$ соответственно столбцы заданного базиса и его образа. По предыдущей теореме, $\varphi(e)$ – ортонормированный базис, а значит, A есть матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному, следовательно, является ортогональной матрицей.

Обратно, пусть $A_\varphi = (\alpha_{ij})$ – ортогональная матрица линейного оператора φ в некотором ортонормированном базисе e: $e_1, e_2, \ldots, e_n$, тогда

$$e'_i = \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} e_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как матрица A_φ ортогональна, то имеем:

$$(e'_i, e'_j) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} e_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{mj} e_m) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{mj} (e_k, e_m) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Это означает, что базис e': $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ является ортогональным. Рассмотрим произвольный вектор

$$a = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in E^n$$

и найдем скалярные квадраты самого вектора a и его образа $\varphi(a)$:

$$(a, a) = (\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2,$$

$$(\varphi(a), \varphi(a)) = (\sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e'_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j (e'_i, e'_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2.$$

Отсюда получаем: $(\varphi(a), \varphi(a)) = (a, a)$, следовательно, оператор φ ортогонален. Теорема доказана. $\square$

8.4 Приведение квадратичной формы к главным осям

Теорема **8.4.1.** *Для любой симметрической матрицы A найдется ортогональная матрица Q такая, что матрица $B = Q^{-1}AQ$, будет диагональной.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое евклидово пространство E^n и в нем e:$e_1, e_2, \ldots, e_n$ – произвольный ортонормированный базис. На матрицу A можно смотреть, как на матрицу некоторого симметрического оператора φ (смотри теорему 5.1.1).

По теореме 5.1.2 для симметрического оператора φ существует ортонормированный базис $e' : e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, состоящий из собственных векторов оператора. Как известно матрица Q перехода от e к e' является ортонормированной матрицей. По формуле связи между матрицами одного и того же линейного оператора в разных базисах имеем

$$B = Q^{-1}AQ,$$

где B – матрица оператора в базисе e'. Так как базис e' состоит из собственных векторов, то матрица B' является диагональной. Теорема доказана. □

Так как для ортогональной матрицы $Q_{-1} = Q'$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Для любой симметрической матрицы A найдется ортогональная матрица Q такая, что $B = Q'AQ$ будет диагональной матрицей.*

Поскольку матрицей произвольной квадратичной формы является симметрическая матрица, а матрица квадратичной формы канонического вида является диагональной матрицей, то, переформулировав предыдущую теорему, получим **основную теорему о приведении квадратичной формы к главным осям**.

Теорема **8.4.2.** *Для любой квадратичной формы существует ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.*

Теорема **8.4.3.** *Каково бы ни было ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму f с матрицей A, коэффициентами этого канонического вида будут корни характеристического многочлена, взятые с их кратностями.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $f(x_1, \dots, x_n)$, с помощью ортогонального преобразования она приводится к каноническому виду $g(y_1, \dots, y_n) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_n y_n^2$. Так как ортогональное преобразование переводит сумму квадратов в сумму квадратов, то справедливо равенство:

$$f(x_1, \dots, x_n) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \qquad (1)$$

Запишем равенство определителей матриц, стоящих в левой и правой частях формулы (1):

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \mu_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda). \qquad (2)$$

Если λ – характеристический корень матрицы A, т.е. левая часть равенства (2) обращается в нуль, то равна нулю и правая часть, а значит, λ совпадает с одним из коэффициентов μ_i. И наоборот, если равна нулю правая часть равенства (2), а значит, λ совпадает с одним из коэффициентов μ_i, то равна нулю и левая часть , т.е. λ – характеристический корень матрицы A. Теорема доказана. □

Схема приведения квадратичной формы к главным осям.

1. Выписываем матрицу квадратичной формы A.

2. Составляем характеристическое уравнение и находим характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

3. Для каждого λ_i находим собственные векторы (фундаментальный набор решений соответственной однородной системы уравнений). Получим ровно n собственных векторов $a_1, \dots, a_n$, которые образуют базис пространства.

4. К полученному базису применим процесс ортогонализации, а затем нормируем каждый из полученных векторов. В результате получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. Координаты собственных векторов образуют ортогональную матрицу, которая и будет матрицей ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму к каноническому виду:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Пример **8.4.1.** *Найти ортогональное преобразование неизвестных, приводящее квадратичную форму f к каноническому виду.*

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

$\square$ Решение. Запишем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$, которые будут являться коэффициентами канонического вида.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5,$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0.$$

Целые корни кубического уравнения находятся среди делителей свободного члена. В нашем случае целые корни нужно искать среди чисел 1, -1, 5, -5. Корнями являются числа $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Теперь можно записать канонический вид

$$f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Как известно, действительные корни характеристического уравнения являются собственными значениями линейного оператора с матрицей A.

Следующим шагом вычислим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям.

(a) $\lambda = 5$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Запишем однородную систему линейных уравнений с этой матрицей

$$\begin{cases} -4z_1 & +2z_2 + 2z_3 = 0, \\ 2z_1 & -4z_2 + 2z_3 = 0, \\ 2z_1 & +2z_2 - 4z_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку определитель матрицы $A - \lambda E$ равен 0, то ее строки линейно зависимы и, по крайней мере, одно уравнение системы можно вычеркнуть, например, первое

$$\begin{cases} 2z_1 & -4z_2 + 2z_3 = 0, \\ 2z_1 & +2z_2 - 4z_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 & -2z_2 + z_3 = 0, \\ & z_2 - z_3 = 0, \end{cases} \qquad z_1 = z_2 = z_3.$$

z_1	z_2	z_3
1	1	1

$$a_1 = (1, 1, 1).$$

(б) $\lambda = -1$.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Все строки матрицы одинаковые. Поэтому система, соответствующая этой матрице, состоит из одного уравнения: $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 0$.

$$z_1 \quad + z_2 + z_3 = 0,$$
$$z_1 = -z_2 - z_3$$

z_1	z_2	z_3.
- 1	1	0
-1	0	1

$$a_2 = (-1, 1, 0), \quad a_3 = (-1, 0, 1).$$

Полученную систему векторов a_1, a_2, a_3 необходимо ортогонализировать. Положим $b_1 = a_1$. Поскольку $(a_1, a_2) = 0$, то $b_2 = a_2$. Найдем вектор b_3.

$$b_3 = \alpha_{31} b_1 + \alpha_{32} b_2 + a_3.$$
$$\alpha_{31} = -\frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} = -\frac{-1+1}{1+1+1} = 0,$$
$$\alpha_{32} = -\frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2},$$
$$b_3 = -\frac{1}{2}(-1, 1, 0) + (-1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{2}(1, 1, -2),$$

Коэффициент $-\frac{1}{2}$ можно опустить, от этого ортогональность не нарушится. Теперь мы можем выписать ортогональную систему собственных векторов.

$$f_1 = (1, 1, 1), \quad f_2 = (-1, 1, 0), \quad f_1 = (1, 1, -2).$$

Нормируем эту систему

$$e_1 = \frac{c_1}{\sqrt{(c_1, c_1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),$$
$$e_2 = \frac{c_2}{\sqrt{(c_2, c_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0),$$
$$e_3 \frac{c_3}{\sqrt{(c_3, c_3)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}).$$

Составим матрицу, элементами которой являются координаты полученных векторов. Поскольку система векторов является ортогональной и нормированной, то матрица будет ортогональной:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

По определению ортогональной матрицы, обратная к ней совпадает с транспонированной. Транспонируем эту матрицу и умножим ее на столбец Y неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. В результате получим столбец X неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е. $X = Q^{-1}Y$. Таким образом, получено искомое линейное преобразование неизвестных.

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \quad +\frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 \quad +\frac{1}{2}y_2 \quad +\frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \quad \square \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 \qquad\qquad -\frac{2}{\sqrt{6}}y_3. \end{array}$$

Список литературы

[1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры / Э. Б. Винберг. —М.: Факториал Пресс, 2002. –544 с.

[2] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру: учебник для студентов ун–тов. Ч. 2. Основы алгебры / А. И. Кострикин; М-во образования РФ. –2–е изд., испр. —М.: Физматлит, 2004. –272 с.

[3] *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. —М.: Высш. школа, 1979. –559 с.

[4] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. —М.: Наука, 1968. –432 с.

[5] *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра / Л. Я. Окунев. —М.: Просвещение, 1966. –336 с.

[6] Сборник задач по алгебре / И. В. Аржанцев и др. Под ред. А. И. Кострикина: учеб. пособ. для вузов. –Новое издание, исправленное. —М.: МЦНМО, 2009. –408 с.

[7] Алгебра / Н. А. Зинченко, Н. Н. Мотькина, А. Г. Сокольский. —Белгород: ИД «Белгород» НИУ «БелГУ», 2015. – 148 с.

Предметный указатель

Оглавление