Известия вузов. Математика
2016, №6,

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. ГЛУШАК

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

Аннотация. Найдены условия однозначной разрешимости нелокальных задач для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Нелокальные условия содержат либо оператор Эрдейи-Кобера, либо оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: Нелокальное условие, однозначная разрешимость, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, оператор Эрдейи-Кобера, оператор Римана-Лиувилля.

УДК: 517.983

Abstract. Found conditions for the unique solvability of nonlocal problems for abstract differential equation of the Euler-Poisson-Darboux equation. Nonlocal conditions contain either Erdelyi-Kober operator or fractional integration operator of Riemann-Liouville.

Keywords: Nonlocal condition, unique solvability, equation of Euler-Poisson-Darboux, Erdelyi-Kober operator, Riemann-Liouville operator.

1. Нелокальная задача с оператором Эрдейи-Кобера. Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k > 0$ на интервале $(0, 1]$ рассмотрим дифференциальное уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t \in (0, 1]. \tag{1}$$

Будем искать решение $u(t) \in C^2([0, 1], E) \cap C((0, 1], D(A))$ уравнения (1), удовлетворяющее нелокальному интегральному условию

$$\lim_{t\to 1} I_{\nu,\beta}\ u(t) = u_1 \tag{2}$$

и условию

$$u'(0) = 0, \tag{3}$$

где $\nu = (k - 1)/2$, $\beta > 0$, $I_{\nu,\beta}$ — оператор Эрдейи-Кобера, определяемый равенством (см. [1], с. 246)

$$I_{\nu,\beta}\ u(t) = \frac{2}{\Gamma(\beta)\ t^{2(\beta+\nu)}} \int_0^t s^{2\nu+1}(t^2 - s^2)^{\beta-1} u(s)\ ds.$$

Задача (1) – (3) с нелокальным условием (2), вообще говоря, не является корректной. В работе устанавливаются условия, налагаемые на оператор A и элемент $u_1 \in E$, обеспечивающие её однозначную разрешимость.

Поступила XX.XX.200X

Среди публикаций, посвящённых исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным условием для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка отметим работы [2] и [3]. Критерий единственности решения установлен в [4]. Что касается нелокальной задачи (1) – (3), то она рассматривается впервые.

Как следует из результатов работы [5], корректная постановка начальных условий для уравнения ЭПД (1) состоит в задании в точке $t = 0$, помимо условия (3), которое снимается при $k \geq 1$, начального значения

$$u(0) = u_0 \in D(A). \tag{4}$$

В работе [5] приводятся также и условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1), (3), (4). В дальнейшем будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 1. Оператор A таков, что задача (1), (3), (4) равномерно корректна.

В частности, если оператор A ограничен, то условие 1 автоматически выполнено и решение задачи (1), (3), (4) имеет вид

$$u(t) = Y_k(t)u_0 = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t/2)^{2j}A^j u_0}{j!\,\Gamma\left((k+1)/2+j\right)} = {}_0F_1\left(\frac{k+1}{2};\frac{t^2}{4}A\right)u_0,\ \ u_0 \in E, \tag{5}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, ${}_pF_q(\cdot)$ — обобщённая гипергеометрическая функция.

В случае неограниченного оператора A, удовлетворяющего условию 1, при $u_0 \in D(A)$ решение задачи (1), (3), (4) имеет вид (см. [5])

$$u(t) = Y_k(t)u_0 = \frac{2^{(k-1)/2}\Gamma((k+1)/2)}{i\pi\ t^{(k-1)/2}}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{(3-k)/2}I_{(k-1)/2}(t\lambda)R(\lambda^2)u_0\,d\lambda,\quad \sigma > \omega, \tag{6}$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, λ^2 при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, а $R(\lambda^2) = (\lambda^2 I - A)^{-1}$ — его резольвента.

В формулах (5), (6) через $Y_k(t)$ обозначена операторная функция Бесселя (ОФБ) — разрешающий оператор задачи (1), (3), (4).

Для ОФБ справедлива (см. [5]) формула сдвига по параметру, записываемая с помощью оператора Эрдейи-Кобера, а именно: если $m > k$, то

$$Y_m(t) = \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2)}\ I_{(k-1)/2,(m-k)/2}Y_k(t). \tag{7}$$

Наличие в формуле (7) оператора Эрдейи-Кобера и известное свойство композиции этих операторов (см. [1], с. 247) удобны для исследования нелокальной задачи именно с условием (2), хотя, как будет показано в п. 2, можно рассмотреть нелокальное условие, содержащее дробный интеграл Римана-Лиувилля.

Дальнейшие исследования посвящены нахождению начального элемента u_0 в условии (4) по нелокальному условию (2).

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный оператор и $u_1 \in E$. Для того, чтобы задача* (1) – (3) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие*

$${}_0F_1\left(\frac{k+1}{2}+\beta;\frac{\lambda}{4}\right) \neq 0,\qquad \lambda \in \sigma(A). \tag{8}$$

Доказательство. Для нахождения начального элемента u_0 к равенству (5) применим оператор Эрдейи-Кобера $I_{\nu,\beta}$. Учитывая формулу сдвига по параметру (7), получим

$$I_{\nu,\beta}\ u(t) = I_{\nu,\beta}\ Y_k(t)u_0 = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2+\beta)}\ Y_{k+2\beta}(t)u_0 =$$

$$= \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2+\beta)}{}_0F_1\left(\frac{k+1}{2}+\beta; \frac{t^2}{4}A\right)u_0,$$

откуда, в силу условия (2) приходим к уравнению

$$\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2+\beta)}{}_0F_1\left(\frac{k+1}{2}+\beta; \frac{1}{4}A\right)u_0 = u_1. \tag{9}$$

Введём в рассмотрение целую функцию

$$\chi_{k,\beta}(\lambda) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2+\beta)}{}_0F_1\left(\frac{k+1}{2}+\beta; \frac{\lambda}{4}\right),$$

которая называется характеристической функцией нелокального условия (2).

Пусть Ω — открытое множество комплексной плоскости, содержащее спектр $\sigma(A)$ ограниченного оператора A, и граница которого $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда, записывая для оператора, стоящего в левой части (9), представление через резольвенту, перепишем уравнение (9) в виде

$$Bu_0 \equiv \int\limits_{\partial\Omega} \chi_{k,\beta}(\lambda)R(\lambda)u_0\ d\lambda = u_1. \tag{10}$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1) – (3) с ограниченным оператором A является разрешимость уравнения (10), т.е. отсутствие в спектре $\sigma(B)$ оператора B точки $\lambda = 0$. Равенство (10) означает, что оператор B является аналитической функцией оператора A, $B = \chi_{k,\beta}(A)$. По теореме об отображении спектра ограниченного оператора $\sigma(B) = \chi_{k,\beta}(\sigma(A))$. Таким образом, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора B только тогда, когда на спектре $\sigma(A)$ не обращается в нуль функция $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ или, что тоже самое, выполнено условие (8).

При выполнении условия (8) начальный элемент $u_0 = B^{-1}u_1$, а решение задачи (1) – (3) с ограниченным оператором A определяется равенством (5). □

Из доказанной теоремы 1 следует, что расположение нулей функции $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ определяет однозначную разрешимость задачи (1) – (3) с ограниченным оператором A. Для уравнения ЭПД с неограниченным оператором A условие вида (8) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль. Поскольку функция $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ выражается через модифицированную функцию Бесселя,

$$\chi_{k,\beta}(\lambda) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right)^{(k-1)/2+\beta} I_{(k-1)/2+\beta}\left(\sqrt{\lambda}\right),$$

то распределение и асимптотика нулей $\mu_j = \mu_j\left((k-1)/2+\beta\right)$, $j = 1, 2, ...$ функции $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ известно (см. [6], гл. 15), а именно: все нули простые, отрицательные и

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\mu_j}{j^2} = -\pi^2. \tag{11}$$

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1) – (3) с неограниченным оператором A.

Теорема 2. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что нелокальная задача (1) – (3) имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль $\mu_j,\ j=1,2,...$ целой функции $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ не являлся собственным значением оператора A.*

Доказательство. Пусть некоторый нуль μ_0 из счётного множества нулей функции $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $h_0 \neq 0$.

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\vartheta_k(t;\mu_0) = {}_0F_1\left(\frac{k+1}{2};\frac{\mu_0 t^2}{4}\right)$$

является решением скалярной задачи

$$\vartheta_k''(t;\mu_0) + \frac{k}{t}\vartheta_k'(t;\mu_0) = \mu_0\vartheta_k(t;\mu_0), \quad t \in (0,1],$$

$$\lim_{t\to 1} I_{\nu,\beta}\ \vartheta_k(t;\mu_0) = 0, \qquad \vartheta_k'(0;\mu_0) = 0.$$

Отметим лишь, что имеет место именно нулевое нелокальное условие, поскольку μ_0 — нуль функции $\chi_{k,\beta}(\lambda)$. Поэтому функция $u(t) = \vartheta_k(t;\mu_0)h_0$ является ненулевым решением однородной ($u_1 = 0$) нелокальной задачи (1) – (3). Тем самым решение задачи (1) – (3) будет заведомо неединственным, если оно будет существовать. $\square$

Переходим теперь к достаточному условию однозначной разрешимости задачи (1) – (3). Также как и при доказательстве теоремы 1, нам предстоит найти начальный элемент u_0 из уравнения

$$\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2+\beta)}\ Y_{k+2\beta}(1)u_0 = u_1,$$

которое, учитывая (6), на элементах $u_0 \in D(A)$ перепишем в виде

$$Bu_0 \equiv \frac{2^{(k-1)/2+\beta}\Gamma((k+1)/2)}{i\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{(3-k)/2-\beta} I_{(k-1)/2+\beta}(\xi)R(\xi^2)u_0\, d\xi = u_1. \tag{12}$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1) – (3) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора $B : D(A) \to E$, заданного соотношением (12) и продолженного по непрерывности на E, обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из $D(A)$.

Учитывая теорему 2, на резольвенту оператора A наложим дополнительное условие.

Условие 2. Каждый нуль $\mu_j,\ j=1,2,...$ функции $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ и существует такое $d > 0$, что $\sup\limits_{j=1,2,...} \|R(\mu_j)\| \le d$.

Поскольку каждый нуль $\mu_j,\ j=1,2,...$ функции $\chi_{k,\beta}(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $\dfrac{1}{d}$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим γ_j. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\mathrm{Re}\ z = \sigma_0 > \omega$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении $w = z^2$ ($z \in \Upsilon_0,\ w \in \Upsilon_0^2$), и $\Xi = \Upsilon_0^2 \bigcup\limits_{j=1,2,...} \gamma_j$.

Возьмём $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\mathrm{Re}\ \lambda_0 > \sigma > \sigma_0$ и выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$n > \max\{(k+\beta+1)/2, (k/2+\beta+2)/2\}. \tag{13}$$

Введём в рассмотрение ограниченный оператор
$$Hv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R\,(z)\,v\;dz}{\chi_{k,\beta}(z)(z-\lambda_0)^n},\quad H: E\to E. \tag{14}$$

Покажем, что интеграл в (14) при выполнении условия 2 абсолютно сходится.

Действительно, в силу выбора контура Υ_0^2, неравенства (см. [5])
$$\|\lambda^{1-k/2}R(\lambda^2)\| \le \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{k/2+1}},\quad \mathrm{Re}\lambda>\omega$$
и асимптотического поведения модифицированной функции Бесселя
$$I_\nu(\lambda)=\frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}}\left(1+O(\lambda^{-1})\right),\quad \lambda\to\infty,\ |\arg\lambda|<\pi/2$$
интеграл
$$\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R\,(z)\;dz}{\chi_{k,\beta}(z)\;(z-\lambda_0)^n}=\frac{2^{(3-k)/2-\beta}}{\Gamma((k+1)/2)}\int\limits_{\Upsilon_0}\frac{\lambda^{k+\beta}\;\lambda^{1-k/2}R\left(\lambda^2\right)\;d\lambda}{\sqrt{\lambda}\;I_{(k-1)/2+\beta}(\lambda)\;(\lambda^2-\lambda_0)^n}$$
абсолютно сходится, поскольку, как следует из (13), $2n>k+\beta+1$.

Рассмотрим теперь интеграл по $\bigcup\limits_{j=1,2,\dots}\gamma_j$. Имеем
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bigcup\limits_{j=1,2,\dots}\gamma_j}\frac{R\,(z)\;dz}{\chi_{k,\beta}(z)\;(z-\lambda_0)^n}=-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R\,(\mu_j)}{\chi'_{k,\beta}(\mu_j)\;(\mu_j-\lambda_0)^n}=$$
$$=-\frac{2^{(3-k)/2-\beta}}{\Gamma((k+1)/2)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu_j^{k/4+\beta/2+1/2}\;R\,(\mu_j)}{\mu_j^{1/4}\;I_{(k+1)/2+\beta}\left(\sqrt{\mu_j}\right)\;(\mu_j-\lambda_0)^n},$$
и абсолютная сходимость полученного ряда вытекает из условия 2, асимптотического поведения модифицированной функции Бесселя и асимптотики (11) нулей μ_j, поскольку, как следует из (13), $2n>k/2+\beta+2$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Если* $u_1\in D(A^{n+1})$, *где* $n\in\mathbb{N}$ *выбрано так, чтобы выполнялось неравенство* (13), *то задача* (1) – (3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Как мы уже выяснили, существование единственного решения задачи (1) – (3) сводится к существованию обратного у ограниченного оператора B, определяемого равенством (12). Покажем, что оператор B имеет обратный оператор $B^{-1}: D\,(A^n)\to E$.

Пусть $v\in D\,(A)$, $\sigma_0<\sigma<\mathrm{Re}\lambda$. Тогда, подставляя (12) в (14) и применяя тождество Гильберта
$$R(z)R(\xi^2)=\frac{R(z)-R(\xi^2)}{\xi^2-z},$$
получаем равенство
$$HBv=\frac{2^{(k+1)/2+\beta}\;\Gamma((k+1)/2)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\frac{R\,(z)}{\chi_{k,\beta}(z)\;(z-\lambda_0)^n}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{(3-k)/2-\beta}I_{(k-1)/2+\beta}(\xi)\;R(\xi^2)v\;d\xi dz=$$
$$=\frac{2^{(k+1)/2+\beta}\;\Gamma((k+1)/2)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\xi^{(3-k)/2-\beta}\;I_{(k-1)/2+\beta}(\xi)\;R\,(z)\,v}{\chi_{k,\beta}(z)\;(z-\lambda_0)^n\;(\xi^2-z)}-\right.$$

$$-\frac{\xi^{(3-k)/2-\beta}\ I_{(k-1)/2+\beta}(\xi)\ R(\xi^2)v}{\chi_{k,\beta}(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)}\Bigg)\ d\xi dz. \tag{15}$$

Интеграл в (15) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HBv=\frac{2^{(k+1)/2+\beta}\ \Gamma((k+1)/2)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\xi^{(3-k)/2-\beta}\ I_{(k-1)/2+\beta}(\xi)\ R(z)v\ d\xi dz}{\chi_{k,\beta}(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)}-$$

$$-\frac{2^{(k+1)/2+\beta}\ \Gamma((k+1)/2)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{(3-k)/2-\beta}\ I_{(k-1)/2+\beta}(\xi)\ R(\xi^2)v\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi_{k,\beta}(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)}\ d\xi. \tag{16}$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup\limits_{j=1,2,\ldots}\gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (16) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (16), используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$HBv=\frac{2^{(k+1)/2+\beta}\ \Gamma((k+1)/2)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon}\frac{\xi^{(3-k)/2-\beta}\ I_{(k-1)/2+\beta}(\xi)\ R(z)v\ d\xi dz}{\chi_{k,\beta}(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)}=$$

$$=\frac{2^{(k-1)/2+\beta}\ \Gamma((k+1)/2)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon^2}\frac{\lambda^{(1-k)/4-\beta/2}\ I_{(k-1)/2+\beta}(\sqrt{\lambda})\ R(z)v\ d\lambda dz}{\chi_{k,\beta}(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\lambda-z)}=$$

$$=\frac{2^{(k-1)/2+\beta}\ \Gamma((k+1)/2)}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{z^{(1-k)/4-\beta/2}\ I_{(k-1)/2+\beta}(\sqrt{z})\ R(z)v\ dz}{\chi_{k,\beta}(z)\ (z-\lambda_0)^n}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)v\ dz}{(z-\lambda_0)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)v\ dz}{(z-\lambda_0)^n}=\frac{-1}{(n-1)!}R^{(n-1)}(\lambda_0)v=(-1)^nR^n(\lambda_0)v.$$

Коммутирующие операторы $H,\ B,\ R^n(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E, поэтому равенство $HBv=(-1)^nR^n(\lambda_0)v$ справедливо и для $v\in E$, и при этом $HB:E\to D\left(A^n\right)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}v=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHv$ при $v\in D\left(A^n\right)$ является обратным по отношению к B, $B^{-1}:D\left(A^n\right)\to E$. Действительно,

$$BB^{-1}v=(-1)^nB(\lambda_0I-A)^nHv=(-1)^nBH(\lambda_0I-A)^nv=R^n(\lambda_0)(\lambda_0I-A)^nv=v,\quad v\in D\left(A^n\right),$$

$$B^{-1}Bv=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHBv=(\lambda_0I-A)^nR^n(\lambda_0)v=v,\quad v\in E.$$

Возвращаясь к задаче (1) – (3), определим принадлежащий $D(A)$ начальный элемент $u_0=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHu_1$, где $u_1\in D\left(A^{n+1}\right)$, оператор H задан равенством (14), $\lambda_0\in\rho(A)$, $\mathrm{Re}\lambda_0>\sigma_0>\omega$. Тогда единственное решение $u(t)$ задачи (1) – (3) имеет вид $u(t)=Y_k(t)u_0$, где ОФБ $Y_k(t)$ определена равенством (6). $\square$

2. Нелокальная задача с оператором Римана-Лиувилля. Наличие в формуле (7) оператора Эрдейи-Кобера оказалось весьма удобным для исследования нелокальной задачи. Рассмотрим далее задачу нахождения решения уравнения ЭПД (1), удовлетворяющего условию (3) и нелокальному условию

$$\lim_{t\to1}I^{\beta}\ u(t)=u_2, \tag{17}$$

где $I^\beta,\ \beta>0$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля, определяемый равенством (см. [1], с. 41)

$$I^\beta\ u(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1}u(s)\ ds.$$

Выясним далее, как можно определить начальный элемент u_0 в условии (4) по нелокальному условию (17).

Теорема 4. *Пусть A — ограниченный оператор и $u_2\in E$. Для того, чтобы задача* (1), (3), (17) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие*

$$ {}_2F_3\left(\frac{1}{2},1;\frac{k+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{\beta+2}{2};\frac{\lambda}{4}\right)\neq 0,\qquad \lambda\in\sigma(A). \tag{18}$$

Доказательство. Для нахождения начального элемента u_0 к равенству (5) применим дробный интеграл Римана-Лиувилля I^β. Учитывая интеграл 2.15.2.1 [7], получим

$$I^\beta\ u(t)=I^\beta\ {}_0F_1\left(\frac{k+1}{2};\frac{t^2}{4}A\right)u_0=\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\ {}_2F_3\left(\frac{1}{2},1;\frac{k+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{\beta+2}{2};\frac{t^2}{4}A\right)u_0,$$

откуда, в силу условия (17) приходим к уравнению

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\ {}_2F_3\left(\frac{1}{2},1;\frac{k+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{\beta+2}{2};\frac{1}{4}A\right)u_0=u_2. \tag{19}$$

Введём в рассмотрение целую функцию

$$\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\ {}_2F_3\left(\frac{1}{2},1;\frac{k+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{\beta+2}{2};\frac{\lambda}{4}\right)$$

которая называется характеристической функцией нелокального условия (17), и также как и при доказательстве теоремы 1, перепишем уравнение (19) в виде

$$\tilde{B}u_0\equiv\int\limits_{\partial\Omega}\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)R(\lambda)u_0\ d\lambda=u_2. \tag{20}$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1), (3), (17) с ограниченным оператором A является разрешимость уравнения (20), т.е. отсутствие в спектре $\sigma(\tilde{B})$ оператора $\tilde{B}$ точки $\lambda=0$, которая не является точкой спектра оператора $\tilde{B}$ только тогда, когда на спектре $\sigma(A)$ не обращается в нуль функция $\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)$ или, что тоже самое, выполнено условие (18). При выполнении условия (18) начальный элемент $u_0=\tilde{B}^{-1}u_2$, а решение задачи (1), (3), (17) с ограниченным оператором A определяется равенством (5). □

Аналогично теореме 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что нелокальная задача* (1), (3), (17) *имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль $\tilde{\mu}_j,\ j=1,2,...$* целой функции *$\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)$ не являлся собственным значением оператора A.*

Расположение, кратность и асимптотика нулей нулей характеристической функции $\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)$ в общем случае нам неизвестны, что приводит к дополнительным трудностям при доказательстве достаточного условия однозначной разрешимости задачи (1), (3), (17) с неограниченным оператором A.

Возьмём $\lambda_0 \in \rho(A)$, Re $\lambda_0 > \sigma > \sigma_0$ и выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы
$$n > (k + \beta + 1)/2. \tag{21}$$

Условие 3. Каждый нуль $\tilde{\mu}_j,\ j = 1, 2, ...$ функции $\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, существует такое $d > 0$, что $\sup\limits_{j=1,2,...} \|R(\tilde{\mu}_j)\| \le d$ и ряд
$$\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\tilde{\gamma}_j} \frac{R(z)\ dz}{\tilde{\chi}_{k,\beta}(z)\ (z - \lambda_0)^n}$$
при $n > (k + \beta + 1)/2$ абсолютно сходится.

Поскольку каждый нуль $\tilde{\mu}_j,\ j = 1, 2, ...$ функции $\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью $\tilde{\Omega}_j$ радиуса $\dfrac{1}{d}$, границу которой, проходимую по часовой стрелке мы обозначили $\tilde{\gamma}_j$. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой Re $z = \sigma_0 > \omega$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении $w = z^2$ и $\tilde{\Xi} = \Upsilon_0^2 \bigcup\limits_{j=1,2,...} \tilde{\gamma}_j$.

Введём в рассмотрение ограниченный оператор
$$\tilde{H}v = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\Xi}} \frac{R(z)\, v\ dz}{\tilde{\chi}_{k,\beta}(z)(z - \lambda_0)^n}, \quad \tilde{H} : E \to E. \tag{22}$$

Абсолютная сходимость интеграла (22) по контуру Υ_0^2 устанавливается аналогично абсолютной сходимости интеграла (14) по тому же контуру, а абсолютная сходимость интеграла (22) по контуру $\bigcup\limits_{j=1,2,...} \tilde{\gamma}_j$ вытекает из условия 3.

Аналогично теореме 3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 3. *Если* $u_2 \in D(A^{n+1})$, *где* $n \in \mathbb{N}$ *выбрано так, чтобы выполнялось неравенство* (21), *то задача* (1), (3), (17) *имеет единственное решение.*

Условие 3 сформулировано в весьма общем виде. Дополнительная информация о нулях характеристической функции $\tilde{\chi}_{k,\beta}(\lambda)$ позволит конкретизировать условие 3. Например, если вместо условия (17) задаётся финальное значение $u(1) = u_2$ (формально $\beta = 0$), то $\tilde{\chi}_{k,0}(\lambda) = \chi_{k,0}(\lambda)$, и распределение нулей известно. Тогда вместо условия 3 можно потребовать выполнения условия 2 при $\beta = 0$.

Литература

[1] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, "Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения". Минск, Наука и техника, 1987.

[2] И.В. Тихонов, "О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве". Дифференц. уравнения, 34, № 6, 841 – 843 (1998).

[3] Ю.Т. Сильченко, "Уравнение параболического типа с нелокальными условиями". СМФН, 17, 5 – 10 (2006).

[4] И.В. Тихонов, "Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений". Изв. РАН. Сер. матем., **67**: 2, 133 – 166 (2003).

[5] А.В. Глушак, "Операторная функция Бесселя". *ДАН*, **352**: 5, 587 – 589 (1997).

[6] Г.Н. Ватсон, "Теория бесселевых функций". М.: Иностранная литература, 1949.

[7] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, "Интегралы и ряды. Специальные функции". М.: Наука, 1983.