MSC 35F10

РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Е.Ю. Панов

Новгородский государственный университет,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Россия, e-mail:
Eugeny.Panov@novsu.ru

Ключевые слова: энтропийные решения, квазилинейные уравнения, функция Каратеодори, корректность, ренормализация решений.

В слое $(t,x) \in \Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$ рассматривается задача Коши для неоднородного квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \mathrm{div}_x \varphi(u) = g(t,x,u), \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{1}$$

где вектор потока $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, а функция-источник $g(t,x,u)$ является функцией Каратеодори, такой что $|g(t,x,k)| \in L^1_{loc}(\Pi_T)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет одностороннему условию Липшица: $\exists L = L(g) \ge 0$: $g(t,x,v) - g(t,x,u) \le L(v-u)$ $\forall v,u \in \mathbb{R}$, $v > u$. Начальная функция $u_0(x)$ предполагается лишь измеримой. В случае $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \equiv 0$ хорошо известен классический результат С.Н. Кружкова [1] о существовании и единственности ограниченного обобщенного энтропийного решения задачи (1). Для неограниченных решений теряется свойство конечности скорости распространения начального возмущения, что может приводить к потере корректности задачи Коши. В частности, естественные требования $u, g(t,x,u) \in L^1_{loc}(\Pi_T)$, $\varphi(u) \in L^1_{loc}(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$ могут оказаться слишком ограничительными. Однако, отказавшись от этих требований, мы не можем рассматривать энтропийные условия (и даже само уравнение) в рамках теории распределений. Для корректного определения таких решений $u = u(t,x)$ (называемых *ренормализованными*) используются энтропийные условия для суперпозиций $s(u)$, где s - ограниченные функции. Ренормализованные энтропийные решения (р.э.р.) задачи (1) были впервые введены в работе [2] в случае $g \equiv 0$ и $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. В [2] доказаны существование и единственность р.э.р. В статье [3] эти результаты были обобщены на случай произвольных измеримых начальных данных. В настоящей работе мы распространяем результаты [3] на неоднородный случай. Пусть $s_{a,b}(u) = \max(\min(u,b),a)$ - срезающая функция на уровнях $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\chi_{(a,b]}(u)$ – характеристическая функция промежутка $(a,b]$.

Определение. *Измеримая функция $u = u(t,x)$ на Π_T называется ренормализованным энтропийным субрешением (р.э.субр.) задачи (1), если $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$:*

$$(s_{a,b}(u))_t + \mathrm{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u) g(t,x,u) = \mu_b - \mu_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \tag{2}$$

где μ_k, $k \in \mathbb{R}$ – семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T и

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u>k}(g(t,x,k))^- dtdx\right) = 0\,, \quad \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(s_{a,b}(u(t,x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^+ = 0$$

в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Измеримая функция $u = u(t,x)$ на Π_T называется ренормализованным энтропийным суперрешением (р.э.суперр.) задачи (1), если выполнено (2) для некоторого семейства неотрицательных локально конечных мер $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{R}}$ на Π_T и

$$\lim_{k\to-\infty}\left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u<k}(g(t,x,k))^+ dtdx\right) = 0\,, \quad \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(s_{a,b}(u(t,x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^- = 0$$

в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Наконец, р.э.р. задачи (1) называется измеримая функция $u = u(t,x)$, которая одновременно является р.э.субр. и р.э.суперр. этой задачи.

С использованием варианта метода удвоения переменных установлен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть измеримые функции $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$ являются, соответственно, р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1) с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t,x,u)$, $h(t,x,u)$. Пусть $L = \min(L(g), L(h))$ и $q(t,x) = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}}(g(t,x,u) - h(t,x,u))^+$. Тогда, для почти всех $t \in (0,T)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u(t,x) - v(t,x))^+ dx \le e^{Lt}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x) - v_0(x))^+ dx + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}^n} q(\tau,x)d\tau dx\right).$$

Из Теоремы 1 вытекает следующий принцип сравнения:

Следствие. *Пусть функции $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$ являются р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1), с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t,x,u)$, $h(t,x,u)$, соответственно. Тогда, если $u_0(x) \le v_0(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, $g(t,x,u) \le h(t,x,u)$ почти всюду на $\Pi_T \times \mathbb{R}$, то и $u(t,x) \le v(t,x)$ почти всюду на Π_T.*

Из принципа сравнения следует единственность р.э.р. Существование р.э.р. в общем случае может нарушаться. Так, например, задача $u_t + (u^2)_x = x^2$, $u(0,x) \equiv 0$ не имеет р.э.р. Поэтому, для существования р.э.р. нужны дополнительные условия на входные данные задачи. Мы предположим, что $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^1(\mathbb{R}^n)$, $g(t,x,0) \in L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$. Справедлива следующая

Теорема 2. *При сделанных предположениях существует р.э.р. задачи (1).*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-01-00230-а.

Литература

1. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. – 1970. – 81, №2. – С.228-255.

2. Bénilan Ph., Carrillo J., Wittbold P. Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 2000. – 29. – P.313-327.

3. Лысухо П.В., Панов Е.Ю. Ренормализованные энтропийные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Проблемы математического анализа. – 2010. – 51. – С.3-20.

RENORMALIZED ENTROPY SOLUTIONS OF NONUNIFORM QUASI LINEAR EQUATIONS OF FIRST ORDER

E.Yu. Panov

Novgorod State University,
Bolshaya Sankt-Peterburgskaya Str., 41, Velikii Novgorod, 173003, Russia, e-mail:
Eugeny.Panov@novsu.ru

Key words: entropy solutions, quasilinear equations, Karatheodory's function, correctness, renormalization of solutions.