

УДК 533.72

О СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА НАГРЕТУЮ СФЕРИЧЕСКУЮ КАПЛЮ, ДВИЖУЩУЮСЯ В ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ

Н. В. Малай, К. С. Рязанов, Е. Р. Щукин*, А. А. Стукалов

Белгородский государственный университет, 308015 Белгород

* Объединенный институт высоких температур РАН, 127412 Москва

E-mail: malay@bsu.edu.ru

В приближении Стокса выполнено теоретическое описание процесса обтекания нагретой капли сферической формы в вязкой неизотермической газообразной среде, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности. Предполагалось, что средняя температура поверхности капли может существенно отличаться от температуры окружающей ее газообразной среды. При решении гидродинамических уравнений с учетом зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры получено аналитическое выражение для силы сопротивления и скорости ее дрейфа в поле силы тяжести.

Ключевые слова: движение нагретых капель в газе, гравитационное движение, приближение Стокса, сила сопротивления.

1. Постановка задачи. В ряде случаев, представляющих как теоретический, так и практический интерес, необходимо проводить исследование влияния нагрева поверхности и циркуляционного движения жидкости внутри капли на силу ее сопротивления и скорость движения, например, при проектировании экспериментальных установок с направленно движущимися в них частицами, при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц, при математическом моделировании процесса осаждения частиц в плоскопараллельных каналах с различной температурой среды в них и т. п. Кроме того, существуют проблемы очистки промышленных отходов от аэрозольных частиц, для решения которых требуется оценка величины силы сопротивления движению частицы со стороны окружающей ее среды.

В данной работе для силы сопротивления нагретой капли, внутри которой действуют равномерно распределенные источники тепла, и скорости ее дрейфа в поле силы тяжести при произвольных перепадах температуры между поверхностью капли и областью вдали от нее в приближении Стокса получены аналитические выражения, представляющие собой обобщения формулы Адамара — Рыбчинского [1].

Рассмотрим стационарное обтекание нагретой сферической капли радиусом R с плотностью ρ_l потоком газа, движущимся вдоль оси Oz со скоростью вдали от капли, равной U_∞ . Внутри капли действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности q_l , за счет чего происходит нагрев поверхности частицы. Действие этих источников может быть обусловлено, например, протеканием объемной химической

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № 1923 от 26.10.09 г.) и Федеральной целевой программы научно-образовательного центра “Управляемые электромагнитные процессы в конденсированных средах” (госконтракт № 02.740.11.0545).

реакции [2], процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т. п. Происходящее при этом повышение температуры поверхности капли оказывает влияние на теплофизические характеристики газообразной среды и тем самым может существенно повлиять на поля скорости и давления в окрестности капли, а значит, и на величину силы сопротивления.

Предполагается, что капля имеет достаточно большие размеры ($R \lesssim 100$ мкм), ее теплопроводность значительно больше теплопроводности газа ($\lambda_l \gg \lambda_g$) и она имеет сферическую форму (поверхностное натяжение, действующее на поверхности раздела жидкость — газ, противодействует сдвиговым напряжениям, стремящимся деформировать сферическую форму капли). Поскольку $\lambda_l \gg \lambda_g$, термокапиллярный эффект (эффект Марангони) в задаче не учитывается [3] (температура постоянна вдоль поверхности капли) и в течение характерного промежутка времени обтекания капли ее радиус практически не изменяется.

В известных работах о движении сферических капель в вязких жидких и газообразных средах достаточно подробно исследовано движение капель при малых относительных перепадах температуры в их окрестности [4–6]. Под перепадом температуры понимается разность между температурами поверхности частицы и среды вдали от нее. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_{ls} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \ll 1$, и значительным, если $(T_{ls} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \sim O(1)$ (T_{ls} — средняя температура поверхности частицы; $T_{g\infty}$ — температура газообразной среды вдали от частицы; индексы g, l соответствуют газообразной среде и нагретой капле; индексом “ ∞ ” отмечены параметры газа на бесконечности в невозмущенном потоке, индексом s — значения физических величин при средней температуре поверхности частицы, равной T_{ls}).

Движение нагретых твердых частиц (при значительных перепадах температуры) в вязких жидких и неизотермических газообразных средах рассматривалось в ряде работ (см., например, [7–10]), в которых показано, что нагрев поверхности оказывает существенное влияние на силу сопротивления и скорость движения частиц.

При рассмотрении обтекания нагретой капли при произвольных относительных перепадах температуры в уравнениях газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В данной работе при описании свойств газообразной среды рассматриваются степенные зависимости этих коэффициентов от температуры:

$$\mu_g = \mu_{g\infty} t_g^\beta, \quad \lambda_g = \lambda_{g\infty} t_g^\alpha, \quad \rho_g = \rho_{g\infty} / t_g.$$

Здесь $\mu_{g\infty} = \mu_g(T_{g\infty})$; $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_{g\infty})$; $\rho_{g\infty} = \rho_g(T_{g\infty})$; $t_g = T_g/T_{g\infty}$; $0,5 \leq \alpha \leq 1,0$, $0,5 \leq \beta \leq 1,0$ (для воздуха $\alpha = 0,81$, $\beta = 0,72$, для азота $\alpha = 0,71$, $\beta = 0,69$, относительная погрешность аппроксимации не превышает 4 %) [11].

В рамках принятых допущений в приближении Стокса уравнения для массовой скорости \mathbf{U} , давления P и температуры T внутри нагретой капли и вне ее записываются в виде [1, 12, 13]

$$\frac{\partial P_g}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_g \left(\frac{\partial U_j^g}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^g}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m^g}{\partial x_m} \right) \right], \quad \text{div}(\rho_g \mathbf{U}_g) = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_l \left(\frac{\partial U_j^l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^l}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m^l}{\partial x_m} \right) \right], \quad \text{div}(\rho_l \mathbf{U}_l) = 0; \quad (1.2)$$

$$\text{div}(\lambda_g \nabla T_g) = 0, \quad \text{div}(\lambda_l \nabla T_l) = -q_l, \quad P_g = n_g k T_g. \quad (1.3)$$

Задача (1.1)–(1.3) решается в системе координат, связанной с каплей, при следующих граничных условиях (в сферической системе координат (r, θ, φ) , в которой координата r отсчитывается от центра капли, а угол θ — от направления скорости набегающего потока):

$$r = R, \quad U_r^g = U_r^l = 0, \quad U_\theta^g = U_\theta^l, \quad T_g = T_l, \quad \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial r} = \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_l^4 - T_{g\infty}^4),$$

$$\mu_g \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta^g}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^g}{\partial \theta} \right] = \mu_l \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta^l}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^l}{\partial \theta} \right]; \quad (1.4)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{U}_g \rightarrow U_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad P_g \rightarrow P_{g\infty}, \quad T_g \rightarrow T_{g\infty}; \quad (1.5)$$

$$r \rightarrow 0, \quad |\mathbf{U}_l| \neq \infty, \quad P_l \neq \infty, \quad T_l \neq \infty. \quad (1.6)$$

Здесь U_r, U_θ — радиальная и тангенциальная компоненты массовой скорости; μ, λ, ρ — вязкость, теплопроводность и плотность; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; σ_1 — интегральная степень черноты; $q_l = \text{const}$ — постоянная плотность тепловых источников, действующая внутри капли [14]; $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ — единичные орты сферической системы координат.

В граничных условиях на поверхности капли (1.4) учтены условия непроницаемости и непрерывности для нормальной и касательной компонент скорости, равенства температур, а также условия непрерывности потоков тепла и касательных составляющих тензора напряжений. На большом расстоянии от капли справедливы граничные условия (1.5), условие конечности физических величин сформулировано в (1.6).

Сила, действующая на частицу со стороны потока, определяется по формуле [1, 12]

$$F_z = \int_S (-P_g \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (1.7)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ — компоненты тензора полных напряжений, выражения для которых в сферической системе координат имеют вид

$$\sigma_{rr} = \mu_g \left(2 \frac{\partial U_r^g}{\partial r} - \frac{2}{3} \text{div } \mathbf{U}_g \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_g \left(\frac{\partial U_\theta^g}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^g}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^g}{r} \right).$$

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $\mu_{g\infty}, \rho_{g\infty}, \lambda_{g\infty}$ и не меняющиеся в процессе обтекания сферической капли величины $R, T_{g\infty}, U_\infty$. Из этих параметров можно составить безразмерный комплекс — число Рейнольдса $\text{Re}_\infty = \varepsilon = \rho_{g\infty} U_\infty R / \mu_{g\infty} \ll 1$.

При $\varepsilon \ll 1$ набегающий поток вызывает лишь малое возмущение, поэтому при решении газодинамических уравнений можно ограничиться нулевым приближением по ε .

Выражения для полей скорости, давления и температуры будем искать в виде

$$U_r(r, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta(r, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta, \quad P(r, \theta) = h(y) \cos \theta, \quad (1.8)$$

где $G(y), g(y), h(y)$ — произвольные функции, зависящие от координаты $y = r/R$.

2. Поле скорости и распределение температуры. Определение силы сопротивления и скорости дрейфа капли. Для того чтобы найти силу, действующую со стороны газа на каплю, и скорость ее дрейфа в поле силы тяжести, нужно знать распределения температуры, массовой скорости и давления в ее окрестности. Интегрируя уравнения (1.3), получаем

$$t_{g0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad t_{l0}(y) = B_0 + \frac{D_0}{y} + \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0 \, dy - \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} \, dy. \quad (2.1)$$

Здесь B_0, D_0 — константы, определяемые из соответствующих граничных условий на поверхности капли (1.4); $\Gamma_0 = t_{is}^{1+\alpha} - 1$ — безразмерный параметр, характеризующий перепад температуры между поверхностью капли и средой вдали от нее; $\psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_{g\infty}T_{g\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_l dx$; $x = \cos \theta$; $t_{ls} = T_{ls}/T_{g\infty}$; T_{ls} — средняя температура поверхности нагретой капли, определяемая из решения системы уравнений

$$t_{ls} = t_{gs}, \quad \frac{l_s}{1+\alpha} \frac{\lambda_{gs}}{\lambda_{ls}} t_{gs} = \frac{R^2}{3\lambda_{ls}T_{g\infty}} q_l - \sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{l\infty}^3}{\lambda_{ls}} (t_{ls}^4 - 1), \quad (2.2)$$

$$\lambda_{gs} = \lambda_{g\infty} t_{gs}^\alpha, \quad \lambda_{ls} = \lambda_{l\infty} t_{ls}^\omega, \quad t_{ls} = t_{l0}|_{y=1}, \quad t_{gs} = t_{g0}|_{y=1}, \quad l_s = \Gamma_0/(1 + \Gamma_0).$$

С учетом (2.1) выражение для динамической вязкости можно представить в виде

$$\mu_g = \mu_{g\infty} t_{g0}^\beta. \quad (2.3)$$

Далее формула (2.3) используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности нагретой капли.

Подставляя (1.8) в уравнение непрерывности (1.1) и учитывая зависимость плотности от температуры $\rho_g = \rho_{g\infty}/t_{g0}$, находим связь между функциями $G(y), g(y)$:

$$g(y) = G(y) + \frac{1}{2} y \left(\frac{dG(y)}{dy} - fG(y) \right). \quad (2.4)$$

Здесь

$$f = \frac{1}{t_{g0}} \frac{dt_{g0}}{dy} = -\frac{l}{y(1+\alpha)}.$$

Найдем выражения для компонент скорости и давления газообразной среды. Подставляя (2.3), (1.8), (2.4) в линеаризованное по скорости уравнение Навье — Стокса (1.1) и разделяя в нем переменные, в результате преобразований получаем неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $G(y)$, решение которого будем искать в виде обобщенных степенных рядов (см. [10]). Рекуррентные формулы для коэффициентов степенного ряда определяются методом неопределенных коэффициентов. Общие выражения для компонент массовой скорости, удовлетворяющие условию ограниченности решения при $y \rightarrow \infty$, имеют вид

$$U_r^g(y, \theta) = U_\infty \cos \theta (A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + A_3 G_3(y)),$$

$$U_\theta^g(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + A_3 G_6(y)),$$

где

$$G_1 = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} l^n, \quad G_2 = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} l^n + \frac{\omega_2}{y^3} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} l^n,$$

$$G_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} l^n + \omega_3 \ln y \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} l^n, \quad G_k = \left(1 + \frac{l}{2(1+\alpha)} \right) G_{k-3} + \frac{1}{2} y G_{k-3}^I \quad (k = 4, 5, 6),$$

G_1^I, G_2^I, G_3^I — первые производные по y от функций G_1, G_2, G_3 соответственно.

Выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}$ ($n \geq 1$), $C_n^{(3)}$ ($n \geq 4$) и $C_n^{(2)}$ ($n \geq 3$), найденных методом неопределенных коэффициентов, записываются в виде

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \{ [(n-1)(3n^2+13n+8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2)]C_{n-1}^{(1)} - \\ - [(n-1)(n-2)(3n+5) + 2\gamma_1(n^2-4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3)]C_{n-2}^{(1)} + \\ + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3]C_{n-3}^{(1)} \},$$

$$C_n^{(2)} = \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \left\{ [(n-1)(3n^2+n-6) + \gamma_1n(n+1) + n\gamma_2]C_{n-1}^{(2)} - \right. \\ - [\gamma_3(n+1) + (n-1)(n-2)(3n-1) + 2\gamma_1n(n-2) + \gamma_2(n-2)]C_{n-2}^{(2)} + \\ + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_3 + \gamma_1(n-3)]C_{n-3}^{(2)} + \\ \left. + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)\Delta_k - 6 \frac{\omega_0(\omega_0-1) \cdots (\omega_0-n+1)}{n!} \right\},$$

$$C_n^{(3)} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \left\{ (n-1)(3n^2-5n-4 + \gamma_1n + \gamma_2)C_{n-1}^{(3)} - \right. \\ - [(n-1)(n-2)(3n-4) + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3]C_{n-2}^{(3)} + \\ + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3]C_{n-3}^{(3)} + \\ \left. + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1)\Delta_k \right\},$$

$$\Delta_k = (3k^2 + 16k + 15)C_k^{(1)} - [(k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2]C_{k-1}^{(1)} + \\ + [3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3]C_{k-2}^{(1)}.$$

При вычислении коэффициентов $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $C_n^{(3)}$ по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что

$$C_0^{(1)} = 1, \quad C_0^{(3)} = 1, \quad C_1^{(3)} = 0, \quad C_2^{(3)} = \gamma_3/4, \quad C_3^{(3)} = 1, \\ \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60} (10 + 3\gamma_1 + \gamma_2), \quad C_0^{(2)} = 1, \quad C_2^{(2)} = 1, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{1+\alpha}, \\ \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4} (2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\omega_0)(4 + 3\gamma_1 + \gamma_2) + 3\gamma_3 + 3\omega_0(\omega_0 - 1) \right),$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{8} (2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\omega_0).$$

При $n < 0$ $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ равны нулю.

Для того чтобы учесть влияние циркуляционного движения жидкости внутри нагретой капли, найдем решение уравнений (1.2). Решение гидродинамической части уравнений для области внутри капли представляет собой сферический вихрь Хилла [1]. Общее решение этих уравнений имеет вид [1]

$$U_r^l(y, \theta) = U_\infty \cos \theta (A_4 + A_5 y^2), \quad U_\theta^l(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_4 + 2A_5 y^2),$$

$$P_l(y, \theta) = P_0 + 10 \frac{\mu_{ls} U_\infty}{R} \cos \theta y^2 A_5.$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2, \dots, A_5 , входящие в формулы для полей скоростей, определяются из соответствующих граничных условий на поверхности частицы:

$$A_1 = -A_2 \frac{G_2}{G_1} - \frac{G_3}{G_1}, \quad A_2 = -\frac{N_2 + \mu_{gs} N_3 / (3\mu_{ls})}{N_1 + \mu_{gs} N_4 / (3\mu_{ls})},$$

$$A_3 = 1, \quad A_4 = -A_5, \quad A_5 = \frac{1}{2G_1} (A_2 N_1 + N_2). \quad (2.5)$$

Здесь

$$N_1|_{y=1} = G_1(1)G_2^I(1) - G_2(1)G_1^I(1), \quad N_2|_{y=1} = G_1(1)G_3^I(1) - G_3(1)G_1^I(1),$$

$$N_3|_{y=1} = G_3(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_3^{II}(1) + (2 + l_s/(1 + \alpha))(G_3(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_3^I(1)),$$

$$N_4|_{y=1} = G_2(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_2^{II}(1) + (2 + l_s/(1 + \alpha))(G_2(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_2^I(1)),$$

$G_1^{II}, G_2^{II}, G_3^{II}$ — вторые производные по y от функций G_1, G_2, G_3 соответственно.

Общая сила, действующая на нагретую каплю, определяется в результате интегрирования тензора напряжений по ее поверхности (см. (1.7)). Подставляя в (1.7) полученные выше выражения, после интегрирования получаем

$$\mathbf{F}_z = -4\pi R \mu_{g\infty} U_\infty A_2 \mathbf{n}_z,$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси Oz .

С учетом постоянной A_2 в (2.5) получаем следующее выражение для силы, действующей на нагретую каплю сферической формы:

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi R \mu_{g\infty} f_\mu U_\infty \mathbf{n}_z, \quad f_\mu = \frac{2}{3} \frac{N_2 + \mu_{gs} N_3 / (3\mu_{ls})}{N_1 + \mu_{gs} N_4 / (3\mu_{ls})}. \quad (2.6)$$

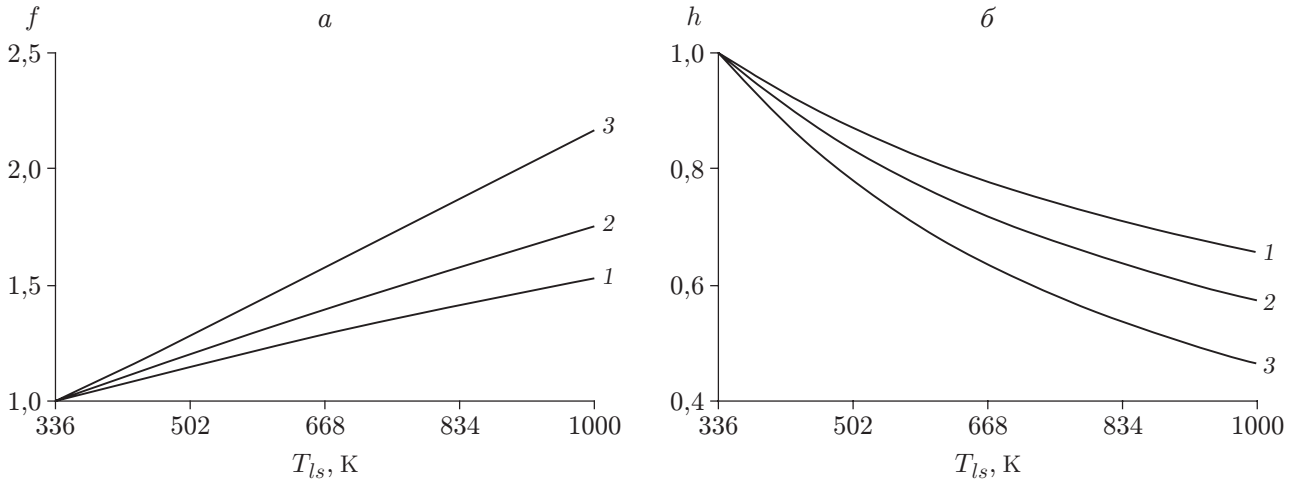
Формула (2.6) позволяет оценить силу сопротивления нагретой капли, т. е. капли, внутри которой действуют равномерно распределенные источники тепла постоянной мощности. Формула (2.6) справедлива при произвольных относительных перепадах температуры в окрестности капли с учетом степенной зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

В качестве примера найдем скорость дрейфа нагретой капли в поле силы тяжести. Для этого выражение (2.6) необходимо приравнять к выражению для силы тяжести, в котором учитывается выталкивающая сила (сила Архимеда). В результате получаем формулу

$$U_p = h_\mu \mathbf{n}_z, \quad h_\mu = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho_{ls} - \rho_{gs}}{\mu_{g\infty}} \frac{N_1 + \mu_{gs} N_4 / (3\mu_{ls})}{N_2 + \mu_{gs} N_3 / (3\mu_{ls})} g, \quad (2.7)$$

где g — ускорение свободного падения.

Формула (2.7) обобщает формулу Адамара — Рыбчинского [1] и позволяет вычислять скорость дрейфа капли в поле силы тяжести при произвольных относительных перепадах температуры в окрестности частицы.



Зависимости функций f (а) и h (б) от средней температуры поверхности капли T_{ls} :

1 — $\alpha = \beta = 0,5$; 2 — $\alpha = \beta = 0,7$; 3 — $\alpha = \beta = 1,0$

Если в выражениях (2.6), (2.7) перейти к пределу при $\mu_{ls} \rightarrow \infty$ (значение динамической вязкости капли очень велико), то получаем формулы

$$F_\mu = 6\pi R\mu_{g\infty} \frac{2N_2}{3N_1} U_\infty, \quad U_p = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho_{ls} - \rho_{gs}}{\mu_{g\infty}} \frac{N_1}{N_2} g,$$

совпадающие с выражениями для силы и скорости гравитационного движения равномерно нагретой твердой частицы сферической формы [10].

В случае если величина нагрева поверхности капли достаточно мала, т. е. средняя температура поверхности капли незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от нее ($\Gamma_0 \rightarrow 0$), зависимостью плотности и коэффициентов молекулярного переноса от температуры можно пренебречь. Тогда при $y = 1$ $G_1 = 1$, $G_1^I = -3$, $G_1^{II} = 12$, $G_2 = 1$, $G_2^I = -1$, $G_2^{II} = 2$, $G_3 = 1$, $G_3^I = 0$, $G_3^{II} = 0$, $G_4 = -1/2$, $G_5 = 1/2$, $G_6 = 1$, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $N_3 = 6$ и $N_4 = 6$. В этом случае формула (2.7) принимает вид

$$U = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho_l - \rho_g}{\mu_{g\infty}} \frac{1 + \mu_{g\infty}/\mu_{l\infty}}{1 + 2\mu_{g\infty}/(3\mu_{l\infty})} g$$

и переходит в формулу Адамара — Рыбчинского [1], т. е. выполняется предельный переход.

На рисунке приведены зависимости силы сопротивления и скорости гравитационного дрейфа капли калия, движущейся в азоте, от температуры T_{ls} . Численные оценки проведены по формулам (2.6), (2.7), связывающим значения $f = f_\mu/f_\mu|_{T_{ls}}$ и $h = h_\mu/h_\mu|_{T_{ls}}$ ($T_{ls} = 336$ К) со значениями T_{ls} для капли радиусом $R = 100$ мкм, при $T_{g\infty} = 336$ К, $P_g = 1$ атм. Кривые $f(T_{ls})$, $h(T_{ls})$ строились при $\alpha = \beta = 0,5; 0,7; 1,0$.

На рисунке видно, что при малых перепадах температуры в окрестности капли нагрев ее поверхности несуществен. Этот результат согласуется с экспериментальными данными [1]. С увеличением средней температуры нагрев поверхности капли оказывает существенное влияние на скорость ее гравитационного движения и силу сопротивления окружающей среды. Аналогичный результат имеет место в случае равномерно нагретой твердой частицы сферической формы. Это показано в работе [10], где проведено сравнение с экспериментальными данными [15].

Заключение. С учетом зависимости плотности газообразной среды и коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры получены выражения для силы сопротивления и скорости дрейфа нагретой капли сферической формы

в поле силы тяжести в вязкой неизотермической газообразной среде при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. Эти выражения являются обобщением формулы Адамара — Рыбчинского.

В ряде работ предполагалось, что при решении задач с неизотермическими течениями дополнительно необходимо учитывать барнеттовские температурные напряжения [16]. Например, в работе [17] с учетом барнеттовских напряжений численно решена задача об обтекании сильнонагретой сферы. Барнеттовские температурные напряжения могут оказывать значительное влияние на движение частиц при числах Маха, существенно меньших единицы ($M \rightarrow 0$), и числах Рейнольдса порядка или менее единицы [18]. В настоящей работе рассмотрено обтекание нагретой капли при числах Рейнольдса и Пекле, значительно меньших единицы. В этом случае даже при относительном перепаде температуры порядка единицы температурными напряжениями можно пренебречь. Учитывая, что $Re = M / Kn$, можно получить оценку для чисел Маха и Кнудсена и соответственно определить область применимости рассматриваемой теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. М.: Мир, 1976.
2. Антановский Л. К., Копбосынов Б. К. Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ. 1986. № 2. С. 59–64.
3. Редников А. Е., Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении капли с однородным внутренним тепловыделением // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 2. С. 271–277.
4. Яламов Ю. И., Санасарян А. С. Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде // Инж.-физ. журн. 1974. Т. 48. С. 2693–2696.
5. Яламов Ю. И. Динамика капель в неоднородных вязких средах / Ю. И. Яламов, В. С. Галоян. Ереван: Луйс, 1985.
6. Гупало Ю. П., Редников А. Е., Рязанцев Ю. С. Термокапиллярный дрейф капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 3. С. 433–442.
7. Kassoy D. R., Adomcon T. C., Messiter J. R., Messiter A. F. Compressible low Reynolds number flow around a sphere // J. Phys. Fluids. 1966. V. 9, N 4. P. 671–681.
8. Щукин Е. Р., Малай Н. В. Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54, № 4. С. 628–635.
9. Малай Н. В., Щукин Е. Р., Яламов Ю. И. К вопросу о гидродинамическом сопротивлении сфероидальной частицы с однородным внутренним тепловыделением // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 73–78.
10. Малай Н. В., Щукин Е. Р., Стукалов А. А., Рязанов К. С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 74–80.
11. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966.
12. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. 6. Гидромеханика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
13. Гершуни Г. З. Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.
14. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д. Хафмен. М.: Мир, 1986.

15. **Бабий В. И., Иванов И. П.** Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях // Теплоэнергетика. 1965. № 9. С. 19–23.
16. **Коган М. Н., Галкин В. С., Фридендер О. Г.** О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119, вып. 1. С. 111–124.
17. **Галкин В. С., Коган М. Н., Фридендер О. Г.** Обтекание сильно нагретой сферы потоком газа при малых числах Рейнольдса // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 5. С. 880–885.
18. **Александров В. Ю., Фридендер О. Г.** Медленные течения газа и эффект отрицательного сопротивления сильно нагретой сферической частицы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 3. С. 168–177.

*Поступила в редакцию 11/III 2009 г.,
в окончательном варианте — 22/VII 2010 г.*
