К.т.н., доц.. М.Ф. Тубольцев, к.т.н., доц. В.М. Михелев
(Белгородский госуниверситет)

M.F. Tuboltsev, V.M. Mikhelev

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА В ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

COMPUTER REALISATION OF A TOPOLOGICAL METHOD OF LOCALISATION OF ROOTS OF A POLYNOM IN THE FIELD OF COMPLEX NUMBERS

Описан алгоритм локализации корней полинома в поле комплексных чисел, использующий топологические инварианты векторного поля, порождаемого полиномом Локализация корней в некоторой области поля комплексных чисел осуществляется на основе вычисления индекса поля, порождаемого полиномом на границе области

Key words a field of complex numbers, a polynom, an index of a vector field, a continuous vector field

Введение

Задача вычисления или хотя бы локализации корней полинома наряду с численными методами линейной алгебры имеет важнейшее прикладное значение. Так, например, вопрос об устойчивости положения равновесия динамической системы при весьма общих предположениях сводится к вопросу о том, все ли корни характеристического уравнения линеаризованной системы расположены в комплексной плоскости левее мнимой оси. Этим объясняется непрекращающийся интерес математиков и инженеров к устойчивым многочленам (полиномам). Эта тематика стала актуальной с появлением паровых машин и впервые была рассмотрена в теоретическом плане Максвеллом в 1868 году. Задача исследования полиномов комплексного переменного на устойчивость ставится следующим образом. Пусть дан произвольный полином степени n с комплексными коэффициентами:

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$$

При каких условиях на коэффициенты полинома все его корни расположены в левой полуплоскости. В теоретическом плане данная задача может считаться решенной благодаря усилиям большой группы выдающихся математиков и инженеров (Максвелл, Эрмит, Раус, Штурм, Гурвиц, Шур, Чеботарев, Понтрягин и др.). Однако практическое применение разработанных ими необходимых и достаточных условий устойчивости наталкивается на многочисленные трудности вычислительного плана и эффективно лишь для полиномов небольшой степени. Помимо этого, данные методы локализации корней плохо ставятся на компьютер из-за наличия символьных вычислений и логических условий. Наконец, эти методы решают задачу локализации только для левой полуплоскости, но существует ряд задач, в которых требуется установить наличие корней полинома в других областях. Так, в финансовой математике при исследовании финансовых потоков требуется установить наличие и количество корней полиномиального уравнения на отрезке действительной оси [0, 1]. Если задан финансовый поток $\{(C_i, t_i)\ i=1,2,\ldots,n\}$, где C_i – выплаты и поступления средств в моменты времени t_i, то поскольку на практике время вычисляется в днях, для вычисления уровня внутренней доходности необходимо решить полиномиальное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i z^{t_i} = 0$$

Здесь интересуются не всеми корнями полинома, а теми, которые находятся на отрезке [0, 1] действительной оси. В ряде случаев, например при агрегировании доходностей финансовых операций, важен факт наличия на этом отрезке только одного корня [1-4].

Отметим, что задачи вычисления корней полинома и их локализации в заданной области поля комплексных чисел, являются взаимосвязанными и взаимно дополняемыми. Их не следует противопоставлять. Так, при вычислении корней полинома с помощью итерационного алгоритма необходимо выбрать начальное значение корня, от этого выбора зависит очень многое. Отмечено [5], например, что область сходимости метода Ньютона к какому-либо корню на комплексной плоскости, так называемая зона притяжения, образует фрактальную структуру. Даже если корни полинома вычисляются в поле действительных чисел, предварительно должна быть решена задача их достаточно точной локализации, чтобы начальные значения для итерационного алгоритма сходились к различным корням.

Приведенные примеры показывают, что естественно ставить вопрос локализации не только для всех корней полинома сразу, но и для отдельных корней. При этом нельзя ограничиваться в выборе областей, для которых решается задача локализации, только каким-то узким классом областей, например с гладкой границей. При этом желательно, чтобы алгоритм локализации хорошо ставился на компьютер и допускал распараллеливание.

Теоретический анализ

Теоретической основой предлагаемого метода локализации корней полинома в поле комплексных чисел являются две теоремы, доказываемые в курсе теории функций комплексного переменного: теорема Руше и принцип аргумента [6. с.139]. Принцип аргумента утверждает, что если взять на комплексной плоскости произвольную простую замкнутую кривую, ограничивающую область G, то индекс векторного поля, порожденного некоторым полиномом, на данной кривой равен числу корней этого полинома в области G с учетом их кратности. При этом область обходится по границе в положительном направлении (область должна быть слева), а углы отсчитываются против часовой стрелки. Важным является то, чтобы на границе области полином не обращался в нуль. На рис. 1 показана ситуация, когда векторное поле, создаваемое полиномом, имеет на границе области ∂G индекс 1. Согласно принципу аргумента внутри области G должен находиться ровно один корень полинома z_1.

Рис. 1

В области G находится один корень полинома Pn(z), поэтому индекс поля на границе области равен 1

Если бы индекс поля на ∂G равнялся 2, то оставался бы открытым вопрос: содержит ли область G два различных корня полинома или один корень кратности 2. Ответить на подобный вопрос можно только разбиением исходной области G на подобласти и вычислением индексов поля на их границах. Как только индекс поля становится 1, это означает, что область содержит 1 корень. Контуры, для которых индекс поля равен 0, не содержат внутри себя корней полинома. Теоретически таким способом можно разделить все корни и установить их кратности. Однако, при реализации на компьютере, возникает ряд вопросов связанных с ошибками округления.

На поле полинома $P_n(z)$, которое является аналитическим (и как следствие обладает перечисленными свойствами) накладывается случайное поле ошибок вычислений. Суммарное поле при обходе границы области не обязательно сделает целое число оборотов и не ясно, как посчитать индекс. Покажем, что индекс, при достаточно общих условиях на ошибки округления и значения полинома на границе области, равен ближайшему целому от числа оборотов (которое будет не целым).

Пусть на границе области G контуре ∂G выполнены условия:

$$|P_n(z)| > |\Delta P_n(z)|, \tag{1}$$

где $\Delta P_n(z)$ – ошибка при вычислении значения полинома $P_n(z)$ в точке z. Тогда в любой точке контура ∂G зашумленное поле $P_n(z)+\Delta P_n(z)$ имеет направление, не более чем на 90° отличающееся от направления поля $P_n(z)$. (Достаточно вычислить скалярное произведение полей и, используя условие 1, убедиться в его положительности). Поскольку угол между полями не мотет быть больше четверти круга, то индекс поля $P_n(z)$ может быть вычислен округлением до ближайшего целого индекса поля $P_n(z)+\Delta P_n(z)$. Поэтому, при выполнении условия 1, индекс поля полинома может быть вычислен, несмотря на ошибки округления. Положение меняется, если контур проходит вблизи корня и условие 1 нарушается. Ошибки округления оказывают тем меньшее влияние, чем дальше от корня полинома проходит контур. Для более точной оценки этого влияния необходимо использовать результаты теории статистического оценивания параметров.

Таким образом, топологический метод локализации корней полинома в поле комплексных чисел (далее ТМ метод) позволяет разделить корни (с учетом их кратности), если удается обеспечить выполнение условия 1.

Методика применения

Поскольку ТМ метод предназначен для реализации на компьютере дадим методику его применения, позволяющую обходить проверку условия 1. Для начала нужно указать априорные границы расположения корней полинома в поле комплексных чисел. Элементарно проверяется, что все корни полинома находятся внутри круга радиуса R с центром в начале координат, где

$$R = 1 + \max\left(\frac{c_i}{c_n}\right), i = 0,1,..n-1.$$

Опишем вокруг этой окружности квадрат. Он содержит все корни полинома и, следовательно, индекс поля на границе квадрата равен степени полинома n. Перейти к квадратам (возможно прямоугольникам) нужно потому, что итерационный процесс, уточняющий область локализации корней, требует разбиения исходной области (круг), а сделать это с помощью кругов без пересечения нельзя. Поскольку корень может находиться в пересечении кругов, он будет посчитан дважды, что приведет к ошибкам.

На рис. 2 показан процесс разбиения квадрата на 4 части.

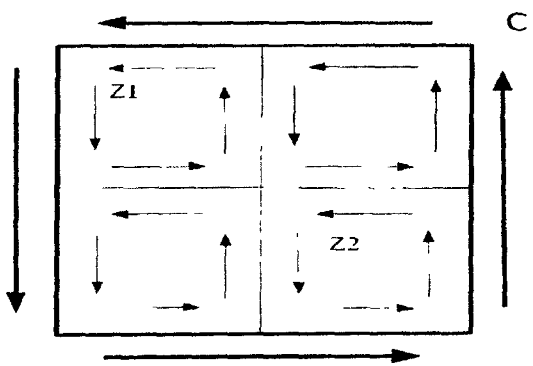

Рис. 2

Область локализации корней может последовательно уточняться: квадрат содержит 2 корня, после его разбиения на 4 меньших квадрата корни уже разделены

Разбиение можно осуществлять на произвольное число частей, но при этом соблюдать некоторые правила, учитывающие особенности организации параллельных вычислений. При разбиении исходной области с коэффициентом подобия N^{-1} для организации параллельных вычислений потребуется N^2 ядер. При этом общий объем вычислений увеличится в N раз, но за счет распараллеливания время вычислений уменьшится в N раз. Число N нужно брать таким, чтобы N^2 было больше n на первой итерации, а на следующих итерациях немного превосходило значение индекса поля на границе разбиваемого квадрата.

При сравнительно небольших степенях полиномов (в пределах нескольких тысяч) алгоритм ТМ метода завершится раньше, чем может нарушиться условие 1, что снимает необходимость его постоянной проверки. Предварительные тесты показали работоспособность ТМ метода.

Литература

1. Зубова Р.И. и Тубольцев М.Ф. Регулярная методика агрегирования показателей доходности краткосрочных кредитных операций. – "Вопросы статистики", 2000, № 11.

2. Тубольцев М.Ф. Системная методика агрегирования показателей доходности в финансовых операциях. – "Известия ТРТУ", Тематич. вып. «Системный анализ в экономике и управлении», 2005, № 8(52), с.94-98.

3. Тубольцев М.Ф. Реинжиниринг систем финансовых операций. – "Научные ведомост", сер. История, Политология, Экономика, 2007, № 4(35), вып. 3, с. 226-231.

4. Тубольцев М.Ф. Математические методы в системном анализе финансовых операций. – "Вестник ВГУ", сер. Системный анализ и информационные технологии, 2008, № 1, с.124 – 133.

5. Калиткин Н.Н. и Пошивайло И.П. О вычислении простых и кратных корней нелинейного уравнения. – "Матем. Моделирование", 2008, т. 20, № 7, с. 57-64.

6. Постников М.М. Устойчивые многочлены. М., Наука, 1981. 176 с.

Статья поступила 12.10. 2010