Современная математика. Фундаментальные направления. Том 48 (2013). С. 120–133

УДК 517.9

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

© 2013 г. **А. П. СОЛДАТОВ**

Аннотация. Рассматриваются эллиптические системы второго порядка на плоскости с постоянными (и только старшими) матричными коэффициентами. Показано, что для этих систем понятие слабо связанности (по терминологии А.В. Бицадзе) равносильно выполнению известного условия дополнительности для задачи Дирихле. В рамках теоретико-функционального подхода введены аналоги потенциалов двойного слоя для решений слабо связанных систем. С помощью этих потенциалов получено полное описание решений слабо эллиптических систем как в классах Гельдера, так и в классах Харди $h^p(D)$ и $C(\overline{D})$.

Рассмотрим однородную эллиптическую систему второго порядка

$$a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

с постоянными и только старшими коэффициентами $a_j\in\mathbb{R}^{l\times l}$. Его регулярным решением служит вещественная l-вектор-функция $u=(u_1,\dots,u_l)$ класса C^2. С этой системой связан матричный трехчлен $p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2$. Условие эллиптичности означает, что $\det a_2\neq 0$ и характеристическое уравнение $\det p(z)=0$ не имеет вещественных корней. Множество этих корней в верхней полуплоскости обозначим σ и пусть k_ν есть кратность корня $\nu\in\sigma$.

Как установлено в [3], справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой эллиптической системы вида* (1) *найдутся такие матрицы* $b,J\in\mathbb{C}^{l\times l}$, *что спектр* J *совпадает с* σ, *выполнено матричное равенство*

$$a_0b+a_1bJ+a_2bJ^2=0 \tag{2}$$

и отображение $\eta\to(\operatorname{re}b\eta,\operatorname{re}bJ\eta)$ *обратимо* $\mathbb{C}^l\to\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l$. *При этом любая другая пара* (b_1,J_1) *с теми же свойствами связана с* (b,J) *соотношениями* $b_1=bd$, $J_1=d^{-1}Jd$ *с некоторой обратимой матрицей* d.

Последнее предложение леммы легко вытекает из соответствующих рассуждений, приведенных в [3]. Оно означает, что матрица J определена с точностью до подобия и ее естественно назвать характеристической матрицей системы (1). По отношению к равенству (2) говорим также, что матрица b приводит систему (1) к характеристической матрице J. Заметим, что в случае диагонализируемой системы, когда матрицы $a_2^{-1}a_0$ и $a_2^{-1}a_1$ диагональны, можно положить $b=1$ с характеристической диагональной матрицей J. В общем случае, очевидно, характеристическую матрицу всегда можно выбрать жордановой.

Полагая

$$a_0=a_{11},\ a_1=a_{12}+a_{21},\ a_2=a_{22}, \tag{3}$$

систему (1) можно представить в дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \tag{4}$$

Конечно, эта форма зависит от выбора в (3) произвольной матрицы $a_{12}\in\mathbb{R}^{l\times l}$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0357.

С системой (1), (3), записанной в форме (4), естественным образом связывается постановка задачи Неймана в области D, ограниченной гладким контуром Γ. Эта задача определяется краевым условием

$$\sum_{i=1,2} n_i \left(a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \bigg|_{\Gamma} = g, \tag{5}$$

где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль. Область D здесь может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае она является окрестностью ∞ на сфере Римана (т. е. содержит внешность некоторого круга) и на градиент решения u задачи накладывается условие

$$\operatorname{grad} u(z) = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \tag{6}$$

в частности, оно имеет предел $u(\infty) = \lim u(z)$. В дальнейшем удобно случаи конечной и бесконечной области D указывать обозначением, соответственно, $\varkappa_D = 1$ и $\varkappa_D = 0$.

Левую часть (5) можно представить в виде производной v' по касательному направлению, оставляющем область D слева, от так называемой сопряженной функции v к решению u эллиптической системы. Эта функция определяется соотношениями

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7}$$

В силу (4) необходимое условие существования функции v выполнено. Поэтому с точностью до аддитивного постоянного слагаемого $\xi \in \mathbb{R}^l$ она однозначно определена в каждой односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$. Во всей области эта функция может оказаться многозначной. Здесь и ниже под данным термином понимаются функции, частные производные которой однозначны. Функции этого типа допускают ветвления при обходе связных компонент контура.

Единичный касательный вектор $e = e_1 + ie_2$ в направлении, оставляющем область D слева, связан с n равенством $e = in$, так что в силу (7) касательная производная

$$v'_e = e_1 \frac{\partial v}{\partial x} + e_2 \frac{\partial v}{\partial y} \tag{8}$$

на Γ в точности совпадает с левой частью (5). Таким образом, краевое условие задачи Неймана можем переписать в форме

$$v'_e\big|_{\Gamma} = g. \tag{9}$$

Заметим, что (8) можно рассматривать как производную функции v на Γ по параметру длины дуги, которая отсчитывается в направлении, оставляющем область D слева.

С помощью представления А. В. Бицадзе [1] общего решения системы (1) через аналитические вектор-функции фредгольмова разрешимость задачи Неймана была установлена Н. Е. Товмасяном [8] в рамках общей задачи Пуанкаре. Другой теоретико-функциональный подход [3, 4] основывается на представлении общего решения через так называемые J-аналитические функции — решения эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

с матрицей J, фигурирующей в лемме 1. Эта система была изучена А. Дуглисом [9] для ганкелевых матриц J в рамках гиперкомплексных чисел и обобщает классическую систему Коши—Римана. Ее решения называем J-аналитическими функциями, поскольку их можно описать как функции класса C^1, допускающие в каждой точке z области определения обобщенную производную

$$\phi'(z) = \lim_{t \to z} (t - z)_J^{-1} [\phi(t) - \phi(z)],$$

которая совпадает с частной производной по x. Здесь и ниже с комплексным числом $z = x + iy$ связывается матрица $z_J = x + yJ$, где $x = x1$ означает скалярную матрицу. Аналогичный смысл имеет и матричный дифференциал $dz_J = dx + Jdy$ в криволинейных интегралах.

В обозначениях леммы 1 представление общего решения u системы (1) и отвечающей ему сопряженной функции v дается равенствами

$$u = \operatorname{re} b\phi, \ v = \xi + \operatorname{re} c\phi; \quad c = -(a_{21} b + a_{22} bJ), \tag{10}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^l$ — произвольный постоянный вектор. Этим представлением J-аналитическая вектор-функция ϕ определяется с точностью до постоянного слагаемого, более точно, ее частная производная $\phi' = \partial\phi/\partial x$ выражается по формуле

$$\phi' = 2\left(b^0\frac{\partial u}{\partial x} + b^1\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \begin{pmatrix} b^0 & b^1 \\ \overline{b}^0 & \overline{b}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{11}$$

Эта формула показывает, в частности, что в случае $\varkappa_D = 0$ бесконечной области производная $\psi = \phi'$ допускает в окрестности бесконечности оценку, аналогичную (6), т. е.

$$\psi(z) = O(|z|^{-2}) \ \text{ при } \ z \to \infty. \tag{12}$$

Для функций, аналитических по Дуглису, справедливы все основные результаты классической теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши [4]. В частности, в окрестности изолированной особой точки для J-аналитической функции имеем разложение в ряд Лорана $\phi(z) = \sum(z-z_0)^k_J c_k, \ \ c_k \in \mathbb{C}^l$, по целым степеням матрицы $(z-z_0)_J$. Если ϕ ограничена в окрестности этой точки, то она устранима и данное разложение переходит в ряд Тейлора

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k_J\frac{\phi^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k\phi}{\partial x^k}.$$

Если ϕ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной гладким контуром Γ, то имеют место теорема и формула Коши

$$\int_\Gamma dt_J\phi^+(t) = 0; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_J dt_J\phi^+(t) = \begin{cases} \phi(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь и ниже предполагается, что контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D и при $\varkappa_D = 0$ в окрестности бесконечности ϕ ведет себя как $o(|z|^{-1})$ в случае теоремы Коши и $o(1)$ в случае формулы Коши.

Аналогично (13) можно ввести обобщенный интеграл типа Коши

$$(I_J\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_J dt_J\varphi(t), \tag{14}$$

определяющий J-аналитическую функцию $\phi = I_J\varphi$, и соответствующий сингулярный интеграл Коши

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)^{-1}_J dt_J\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{15}$$

который понимается в смысле главного значения. Определяемый этим интегралом оператор I_J ограничен в пространствах Гельдера $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$, причем справедлива формула Сохоцкого—Племеля

$$2\phi^+ = \varphi + S_J\varphi \tag{16}$$

для граничных значений функции $\phi = I_J\varphi$. Если область D бесконечна, то в окрестности бесконечности ϕ имеет оценку $O(|z|^{-2})$ и раскладывается в ряд по степеням z^{-k}_J, $k \geqslant 1$.

Как и в случае обычных аналитических функций, для аналитических по Дуглису функций можно рассмотреть задачу Римана—Гильберта

$$\operatorname{re} G\phi\big|_\Gamma = f, \tag{17}$$

где $l \times l$-матрица-функция $G \in C(\Gamma)$ обратима всюду на Γ.

Эта задача рассматривается в классе Гельдера $C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < 1$, причем в случае бесконечной области функция ϕ предполагается ограниченной на бесконечности. Фредгольмовость и индекс этой задачи понимается по отношению к $\mathbb{R}$-линейному оператору $\phi \to \operatorname{re} G\phi$ ее краевого условия.

Произвольную J-аналитическую функцию $\phi \in C^\mu(\overline{D})$ можно представить интегралом типа Коши $I_J\varphi$ с вещественной плотностью φ и с помощью этого представления привести задачу Римана—Гильберта к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений на контуре Γ. На этом пути получается следующий результат [2, 3].

Теорема 1. *Пусть контур* $\Gamma = \partial D$ *составлен из* m *связных компонент и принадлежит классу* $C^{1,\mu+0}$ (*т. е.* $C^{1,\mu+\varepsilon}$ *с малым* $\varepsilon > 0$), *и* $G \in C^{\mu+0}(\Gamma)$. *Тогда задача* (17) *фредгольмова в классе* $C^{\mu}(\overline{D})$ *тогда и только тогда, когда* $\det G(t) \neq 0$ *всюду на* Γ, *и ее индекс* $\varkappa$ *дается формулой*

$$\varkappa = -2\mathrm{Ind}\, G - ml, \quad \mathrm{Ind}\, G = \frac{1}{2\pi} \arg\det G\big|_{\Gamma},$$

где приращение непрерывной ветви аргумента на Γ *берется в направлении, оставляющем область* D *слева.*

Если дополнительно $G \in C^{1,\mu+0}(\Gamma)$, *то любое решение* $\phi \in C^{\mu}(\overline{D})$ *задачи с правой частью* $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ *принадлежит* $C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Эта теорема сохраняет свою силу и по отношению к более широкому пространству Харди $H^p(D)$, $1 < p < \infty$. Это пространство J-аналитических функций проще всего ввести [6] как замыкание класса $C^{\mu}(\overline{D})$ по норме $|\phi| = |\phi^+|_{L^p(\Gamma)}$. Для элементов $\phi \in H^p(D)$ существуют угловые предельные значения, принадлежащие $L^p(\Gamma)$, интеграл типа Коши (14) как линейный оператор $\varphi \to \phi$ ограничен $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$ и сохраняется формула Сохоцкого—Племеля (16) для граничных значений. В условиях теоремы 1 задача (17) фредгольмова и в классе $H^p(D)$ с тем же индексом, причем любое решение $\phi \in H^p(\overline{D})$ задачи с правой частью $f \in C^{\mu}(\Gamma)$ принадлежит $C^{\mu}(\overline{D})$.

Известны и другие теоретико-функциональные подходы к исследованию эллиптических систем второго порядка на плоскости (см. например, [10, 11]).

Обратимся к представлению (10) решения системы (1) и отвечающей ему сопряженной функции. Согласно (11) производная ϕ' однозначна, хотя сама функция ϕ может оказаться и многозначной. Однако если вместе с u однозначна и сопряженная функция v, то J-аналитическая функция ϕ также однозначна. В самом деле, из определения $c = -(a_{21}b + a_{22}bJ)$ матрицы c и леммы 1 следует, что блочная матрица

$$\begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ c & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix} \tag{18}$$

обратима. Поэтому обратимо и линейное отображение $\mathbb{C}^l \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ по формуле $\eta \to (\mathrm{re}\, b\eta, \mathrm{re}\, c\eta)$.

Характер многозначности функции v в этом представлении удобно описать в виде отдельного слагаемого. Это же относится и к многозначному решению u, сопряженная функция v к которому однозначна.

Лемма 2. *Пусть гладкий контур* $\Gamma = \partial D$ *составлен из простых контуров* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ *и* z_0 — *фиксированная точка области* D, *причем в случае* $\varkappa_D = 0$ *контур* Γ_m *охватывает остальные* $m-1$ *компоненты и* $z_0 = \infty$. *Тогда в некоторой области* $\widetilde{D} \supseteq \overline{D}$ *существуют такие конечномерные пространства* U_0 *и* V_0 *размерности* $l(m-1)$, *соответственно, решений уравнения* (1) *и сопряженных к ним функций, обращающихся в точке* z_0 *в нуль, что справедливы следующие утверждения.*

1. *Любое решение уравнения* (1) *в области* D *представимо в виде*
$$u = \mathrm{re}\, b\phi + u_0, \quad u_0 \in U_0, \tag{19}$$
где J*-аналитическая функция* ϕ *однозначна и при* $\varkappa_D = 0$ *ее производная удовлетворяет условию* (12). *Равенство* $u = 0$ *в этом представлении влечет* $u_0 = 0$, *так что в силу леммы* 1 *функция* ϕ *постоянна.*
2. *Любая однозначная сопряженная функция* v *к некоторому* (*вообще многозначному*) *решению уравнения* (1) *в области* D *представима в виде*
$$v = \mathrm{re}\, c\phi + v_0, \quad v_0 \in V_0, \tag{20}$$
где J*-аналитическая функция* ϕ *однозначна и при* $\varkappa_D = 0$ *ее производная удовлетворяет условию* (12). *При этом* $v = 0$ *в этом представлении влечет* $v_0 = 0$.

Доказательство. Пусть в области D задана некоторая многозначная функция $w(z)$, т. е. ее частные производные непрерывны и однозначны в этой области. Кроме того, при $\varkappa_D = 0$ они удовлетворяют (6). Нетрудно описать условия, при выполнении которых эта функция однозначна. С этой целью рассмотрим в области D простые контура Γ'_j; $1 \leqslant j \leqslant m-1$, которые содержат внутри Γ_j, а снаружи — $\Gamma \setminus \Gamma_j$. В силу формулы Грина интегралы

$$\delta_j w' = \int\limits_{\Gamma'_j} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy, \ 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

не зависит от выбора Γ'_j. Из этих же соображений функция w однозначна тогда и только тогда, когда все указанные интегралы обращаются в нуль. В случае J-аналитической функции $w = \phi$ и ее производной $\psi = \phi'$ эти интегралы переходят в

$$\delta_j \psi = \int\limits_{\Gamma'_j} dt_J \psi(t), \ 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

и роль формулы Грина играет теорема Коши.

Выберем внутри Γ_j по точке a_j и при $\varkappa_D = 0$ выберем еще точку a_m внутри Γ_m. Обозначим M_0 класс рациональных J-аналитических функций вида

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{m-1} [(z-a_k)^{-1} - (1-\varkappa_D)(z-a_m)^{-1}]\eta_k, \quad \eta_k \in \mathbb{C}^l,$$

Очевидно, размерность этого класса равна $l(m-1)$ и отображение $\psi \to (\delta_1\psi, \ldots, \delta_{m-1}\psi)$ обратимо $M_0 \to (\mathbb{C}^l)^{m-1}$. Поэтому первообразная ϕ функции $\psi \in M_0$ однозначна тогда и только тогда, когда она постоянна. Кроме того, в силу обратимости матрицы (18) отображение

$$\psi \to (\operatorname{re} b\delta_j\psi, \operatorname{re} c\delta_j\psi)_1^{m-1} \tag{21}$$

также обратимо $M_0 \to (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l)^{m-1}$.

Очевидно, в предположении

$$\phi' \in M_0, \quad \operatorname{re} b\delta_j\phi' = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant m-1, \tag{22}$$

функция $u = \operatorname{re} b\phi$ будет однозначной в D. Класс таких функций, подчиненных дополнительному требованию $u(z_0) = 0$, обозначим U_0. В силу обратимости отображения (21) этот класс имеет размерность $l(m-1)$, причем в представлении $u = \operatorname{re} b\phi$ его элементов функция ϕ однозначна тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Класс V_0 той же размерности определим аналогичным образом по отношению к матрице c. Как и выше этот класс обладает тем свойством, что в представлении $v = \operatorname{re} c\phi$ его элементов функция ϕ однозначна тогда и только тогда, когда $v = 0$.

Убедимся, что так определенные классы U_0 и V_0 удовлетворяют условиям леммы. Пусть однозначная функция u является решением уравнения (1), так что согласно (10) можем записать $u = \operatorname{re} b\phi_1$ с некоторой многозначной функцией ϕ_1. Выберем функцию $\psi_0 \in M_0$ по условию $\delta_j\psi_0 = \delta_j\phi'_1$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, и пусть ϕ_0 — первообразная функции ψ_0. Тогда функции $u_0 = \operatorname{re} b\phi_0$ и $\phi = \phi_1 - \phi_0$ однозначны в области D. Поскольку первообразная ϕ_0 определена с точностью до постоянного слагаемого, ее можно подчинить требованию, чтобы функция u_0 обращалась в нуль в точке z_0. В результате приходим к справедливости утверждения 1 леммы. Утверждение 2 рассматривается аналогично. □

Обратимся к исходной постановке (3)–(5) задачи Неймана, краевое условие которой записано в эквивалентной форме (9). Эта постановка предполагает, что решение u разыскивается в класс $C^1(\overline{D})$. Возможна обобщенная постановка этой задачи, позволяющая расширить этот класс. Прежде всего отметим, что в силу формулы Грина, примененной к левой части (4), имеем необходимое условие разрешимости

$$\int\limits_{\Gamma} g(t)|dt| = 0. \tag{23}$$

Согласно лемме 2 общее решение системы (1) можем записать в форме (19), где $u_0 = \operatorname{re} b\phi_0 \in U_0$, а J-аналитическая функция ϕ однозначна в области D. В частности,

$$\int_{\Gamma_j} (\operatorname{re} c\phi)'_e |dt| = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

В силу (9) отсюда заключаем, что сопряженная к u_0 функция $v_0 = \operatorname{re} c\phi_0$ должна удовлетворять условиям

$$\int_{\Gamma_j} (v_0)'_e |dt| = \int_{\Gamma_j} g|dt|, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

которые в обозначениях (20) можем переписать в форме

$$\operatorname{re} c\delta_j \phi'_0 = \xi_j, \quad \xi_j = \int_{\Gamma_j} g|dt|.$$

Из определения (22) класса U_0 видно, что этими условиями функция u_0 определяется единственным образом, причем с учетом (23) аналогичное равенство имеем и по отношению к Γ_m. Следовательно, найдется такая функция $f \in C^1(\Gamma)$, что $f'_e = g'_e - (v_0)'_e$. В результате, обозначая u_1 снова u приходим к следующей эквивалентной формулировке задачи Неймана: найти решение u системы (3), (4), сопряженная функция v к которому однозначна и удовлетворяет краевому условию

$$v\big|_\Gamma + \xi = f, \tag{24}$$

где l-вектор-функция ξ постоянна на каждом контуре Γ_j и также подлежит определению.

В этой постановке задачу можно рассматривать в классе $u \in C^\mu(\overline{D})$, нужно только учесть, что тогда и сопряженная функция v принадлежит тому же классу. Этот факт, являющийся аналогом известной теоремы Привалова для гармонических функций, установлен в [2] с помощью теоремы 1. Отметим, что он может быть установлен и более прямым образом [12].

Можно также еще более расширить класс решений и рассматривать задачу в классе Харди $h^p(D)$, $1 < p < \infty$. Он определяется условием, чтобы в представлении (22) функция ϕ принадлежала классу Харди $H^p(D)$, введенному выше. Тогда сопряженная функция $v = \operatorname{re} c\phi$ допускает угловые предельные значения почти всюду на Γ и краевое условие (24) понимается в этом смысле.

Согласно лемме 2 задачу (24) можно переформулировать в форме задачи Римана—Гильберта

$$(\operatorname{re} c\phi)\big|_\Gamma + \xi = f$$

для J-аналитических функций и теорема 1 приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть контур $\Gamma = \partial D$ составлен из m связных компонент и принадлежит классу $C^{1,\mu+0}$ (т. е. $C^{1,\mu+\varepsilon}$ с малым $\varepsilon > 0$). Тогда фредгольмовость задачи Неймана* (1), (3), (24) *в каждом из классов $h^p(D)$, $C^\mu(\overline{D})$ и $C^{1,\mu}(\overline{D})$ равносильна обратимости матрицы $c = -(a_{21}b + a_{22}bJ)$, и ее индекс равен нулю.*

При этом любое решение $u \in h^p(D)$ задачи с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$ принадлежит $C^\mu(\overline{D})$. Аналогично $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ влечет $u \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Условимся говорить, что дивергентная форма (4) уравнения (1) регулярна, если матрица $c = -(a_{21}b + a_{22}bJ)$ обратима. Согласно лемме 1 это определение корректно, т. е. не зависит от выбора пары (b, J). В скалярном случае $l = 1$ можем положить $b = 1$, $J = \nu$ и, значит, $a_{21} + a_{22}\nu \neq 0$. В общем случае $l > 1$ свойство регулярности целиком зависит от выбора матрицы a_{21} в разбиении (3) среднего коэффициента a_2 эллиптической системы (1).

Лемма 3. *При $l \geqslant 2$ эллиптическая система* (1) *допускает как регулярные, так и нерегулярные дивергентные формы.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $a_{22} = 1$. Согласно лемме 1 ранг $2l \times l$—матрицы $\downarrow (b, bJ)$ равен l, так что найдутся ее l линейно независимых строк. Поэтому существуют такие диагональные матрицы d_1 и d_2 с элементами 0 и 1 вдоль диагонали, что $\det(d_1 b + d_2 bJ) \neq 0$. Но тогда и

$$\det[(d_1 + \varepsilon)b + (d_2 + \varepsilon)bJ) \neq 0$$

для малых $\varepsilon > 0$ и первое условие леммы выполнено по отношению к $a_{12} = (d_2 + \varepsilon)^{-1}(d_1 + \varepsilon)$.

Что касается второго утверждения леммы, то в случае $\det b = 0$ оно очевидно. Поэтому, не ограничивая общности, матрицу b можно считать обратимой. В этом случае согласно лемме 1 матрица $\tilde J = bJb^{-1}$ удовлетворяет условию $\det(\mathrm{im}\,\widetilde J) \neq 0$, так что дело сводится к равенству

$$\det[(a_2 + \mathrm{re}\,\tilde J)(\mathrm{im}\,\tilde J)^{-1} + i] = 0.$$

Его можно удовлетворить, полагая $a_{12} = -\mathrm{re}\,\tilde J + a\mathrm{im}\,\tilde J$, где матрица $a \in \mathbb{R}^{l\times l}$ выбрана по условию $\det(a + i) = 0$. Поскольку по предположению $l \geqslant 2$, такой выбор всегда возможен. □

Решение u эллиптической системы по своей сопряженной функции восстанавливается с точностью до так называемых вырожденных решений, сопряженная функция к которым постоянна. Таким образом, в соответствии с (7) вырожденные решения удовлетворяют переопределенной системе первого порядка

$$a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, для этих решений выполнено однородное краевое условие задачи Неймана.

Простейшим частным случаем вырожденных решений являются вектор-многочлены

$$u(z) = \xi_0 + x\xi_1 + y\xi_2, \tag{25}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^l$ удовлетворяют системе $a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 = 0$, $i = 1, 2$, многочлены этого типа называем тривиальными вырожденными решениями. Очевидно, они образуют пространство размерности $l+r$, где

$$r = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Ранг r назовем дефектом дивергентной формы (4). Очевидно, он не превосходит l и совпадает с размерностью каждого из пространств

$$\{\xi \in \mathbb{R}^l,\ \xi - a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}\xi = 0\}, \quad \{\xi \in \mathbb{R}^l,\ \xi - a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}\xi = 0\}. \tag{27}$$

Возникает вопрос, какие возможные значения принимает r в зависимости от выбора дивергентной формы (4), т. е. матрицы a_{21}. Не ограничивая общности можно считать $a_{22} = 1$, в этом случае согласно (3) можем написать $a_{11} = a_0$, $a_{21} = a_1 - a_{12}$, так что размерность r второго пространства в (27) совпадает с рангом матрицы $x^2 - xa_1 + a_0$ для произвольно заданной матрицы $x = a_{12}$.

Особенно простую ситуацию имеем при $r = 0$. В этом случае все вырожденные решения постоянны, а система (7) однозначно разрешима относительно частных производных функции u. Записывая результат обращения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(a_{21}^1\frac{\partial v}{\partial x} + a_{22}^1\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_{11}^1\frac{\partial v}{\partial x} + a_{12}^1\frac{\partial v}{\partial y},$$

приходим к системе

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}^1\frac{\partial v}{\partial x} + a_{12}^1\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}^1\frac{\partial v}{\partial x} + a_{22}^2\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

которой удовлетворяет функция v. Можно показать, что эта система также эллиптична.

Как установлено в [12], имеет место следующее предложение.

Лемма 4. *Если подпространства* (27) *не пересекаются, то каждое вырожденное решение является тривиальным. В противном случае класс вырожденных решений, рассматриваемых на всей плоскости, бесконечномерен.*

Если форма (4) уравнения (1) регулярна, то согласно теореме 2 ядро задачи Неймана конечномерно, поэтому в соответствии с леммой 4 каждое вырожденное решение является тривиальным. При дополнительном предположении, что матрица в (26) неотрицательно определена, каждое решение однородной задачи Неймана является вырожденным [12]. Поэтому в этом случае обратимость матрицы (25) равносильна тому, что подпространства (27) не пересекаются. Заметим, что $r > l/2$ пространства (27) всегда пересекаются, так что форма (4) нерегулярна.

Условия разрешимости задачи Неймана (3)–(5), рассматриваемой в классе $C^{1,\mu}(\overline{D})$, можно описать с помощью эллиптической системы

$$a_0^\top \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} + a_1^\top \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2} + a_2^\top \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2} = 0, \qquad (\widetilde{1})$$

формально сопряженной по Лагранжу. Соответственно дивергентная форма, сопряженная к (4), определяется коэффициентами

$$\widetilde{a}_{ij} = a_{ji}^\top, \qquad (\widetilde{3})$$

которые в свою очередь определяют постановку сопряженной задачи Неймана

$$\sum_{i=1,2} n_i \left(\widetilde{a}_{i1} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{a}_{i2} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y} \right) \bigg|_\Gamma = \widetilde{g}. \qquad (\widetilde{5})$$

Для решений $u, \tilde{u} \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ систем, соответственно, (1), (3) и $(\widetilde{1})$, (28) с помощью формулы Грина обычным образом выводим соотношение

$$\int_\Gamma \left[\left(\sum_{i,j=1,2} n_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \widetilde{u} - u \left(\sum_{i,j=1,2} n_i a_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_j} \right) \right] |dt| = 0.$$

Оно показывает, что выполнено условие ортогональности

$$\int_\Gamma g \widetilde{u} |dt| = 0 \qquad (28)$$

всем решениям однородной задачи $(\widetilde{5})$. Они, в частности, охватывают и условие (23), использованное ранее.

Лемма 5. *Если дивергентная форма* (4) *регулярна, то этим же свойством обладает и сопряженная к ней форма. При этом условия ортогональности* (28) *необходимы и достаточны для разрешимости задачи Неймана.*

Доказательство. Пусть матрица $\widetilde{b}$ приводит систему $(\widetilde{1})$ к характеристической матрице $\widetilde{J}$. Предположим противное, т.е. матрица $c = -(a_{12}b + a_{22}bJ)$ обратима, но аналогичная матрица $\widetilde{c} = -(\widetilde{a}_{12}\widetilde{b} + \widetilde{a}_{22}\widetilde{b}\widetilde{J})$ имеет нулевой определитель. Как показано в [5], первая часть теоремы 2 в обобщенной постановке распространяется и на задачу Неймана, рассматриваемой в верхней полуплоскости D_0. Поэтому эта задача также фредгольмова и для нее имеют место аналогичные (28) условия ортогональности. Поэтому придем к противоречию, если докажем, что однородная сопряженная задача Неймана в полуплоскости D_0 имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Опуская волну в обозначениях, дело сводится к доказательству следующего утверждения. Пусть матрица (23) вырождена. Тогда в верхней полуплоскости D_0 однородная задача Неймана имеет бесконечное число линейно независимых решений, принадлежащих классу $C^\infty(\overline{D}_0)$ и обращающихся в нуль на бесконечности вместе со всеми своими производными.

Для его доказательства рассмотрим все различные корни $\nu_1, \ldots, \nu_n$ характеристического уравнения $\det p(z) = 0$, $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$, лежащие в верхней полуплоскости. Поскольку $\operatorname{im} \nu_s > 0$, аффинные преобразования $x + iy \to x + \nu_s y$ переводят верхнюю полуплоскость D_0 на себя, оставляя неподвижными точки ее границы $\partial D_0 = \mathbb{R}$. Не ограничивая общности можно считать, что матрица J имеет блочно-диагональную структуру $\operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_n)$, где диагональный блок $J_s \in \mathbb{C}^{l_s \times l_s}$ имеет ν_s своим единственным собственным значением. В соответствии с этой блочной структурой l-вектор ϕ запишем в виде $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ с l_s-векторами ϕ_s. Пусть для краткости X означает класс всех функций $u \in C^\infty(\overline{D}_0)$, обращающихся в нуль на бесконечности вместе со всеми своими производными. Согласно [5], любая J-аналитическая функция $\phi \in X$ единственным образом представима в виде

$$\phi_s(x + iy) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{y^k}{k!} (J_s - \nu_s)^k \frac{\partial^k \tilde{\phi}_s}{\partial x^k} (x + \nu_s y), \quad s = 1, \ldots, n,$$

где l-вектор-функция $\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_n)$ аналитична в полуплоскости D_0. Очевидно, граничные значения этих функций совпадают. Поэтому достаточно убедиться, что в классе аналитических функций $\tilde{\phi} \in X$ однородная задача

$$\mathrm{re}\, c\tilde{\phi}^+ = 0 \tag{29}$$

имеет бесконечное число линейно независимых решений.

По условию существует такой ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{C}^l$, что $c\xi = 0$. Зафиксируем точку z_0 в нижней полуплоскости и рассмотрим в X последовательность вектор-функций

$$\tilde{\phi}_m(z) = (z - z_0)^{-m}\xi, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Остается заметить, что они линейно независимы и удовлетворяют (29).

Итак, первое утверждение леммы установлено. Из (28) следует, что размерность коядра задачи Неймана не меньше размерности ядра сопряженной задачи. Записывая аналогичное (29) условие ортогональности для сопряженной задачи, приходим к аналогичному неравенству для размерностей и в этом случае. Поскольку индексы обеих задач равны нулю, эти неравенства в действительности являются точными равенствами. В частности, условия (28) и достаточны для разрешимости задачи Неймана. □

К задаче Неймана можно подойти с другой стороны, рассматривая вместо (24) краевое условие Дирихле

$$v\big|_\Gamma = f \tag{30}$$

для функций v, являющихся сопряженными к некоторому (вообще многозначному) решению уравнения (1). Ее можно рассматривать в наиболее широком классе с Харди h^p для сопряженных функций, который вводится также, как и для решений системы (1) условием $\phi \in H^p$ в представлении (20). Для этой задачи имеет место следующий аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть контур $\Gamma = \partial D$ составлен из m связных компонент и принадлежит классу $C^{1,\mu+0}$ (т. е. $C^{1,\mu+\varepsilon}$ с малым $\varepsilon > 0$) и матрица $c = -(a_{21}b + a_{22}bJ)$ обратима. Тогда задача Дирихле (30) для сопряженных функций в каждом из классов $h^p(D)$, $C^\mu(\overline{D})$ и $C^{1,\mu}(\overline{D})$ фредгольмова и ее индекс ее индекс равен $-\varkappa_D r$, где r — дефект системы (1).*

При этом любое решение $v \in h^p(D)$ задачи с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$ принадлежит $C^\mu(\overline{D})$. Аналогично $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ влечет $v \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство. Оно основывается на применении теоремы 1 и леммы 2. По теореме 1 оператор $R\phi = \mathrm{re}\, c\phi\big|_\Gamma$ фредгольмов и его индекс равен $-ml$. С другой стороны, R можно представить в виде произведения DS оператора D задачи Дирихле для сопряженных функций и оператора $S\phi = \mathrm{re}\, c\phi$. Рассмотрим последний из них подробнее.

Обозначим через $\mathcal{P}$ класс J-аналитических многочленов первой степени $\phi(z) = \eta_0 + z_J\eta_1$, $\eta_k \in \mathbb{C}^l$, для которых $\mathrm{re}\, c\phi \equiv 0$. Очевидно, он определяется условиями $\mathrm{re}\, c\eta_0 = \mathrm{re}\, c\eta_1 = \mathrm{re}\, cJ\eta_1 = 0$. Этот класс имеет размерность $l + r$ и отображение $\phi \to \mathrm{re}\, b\phi$ осуществляет его изоморфизм на класс всех тривиальных вырожденных решений уравнения (1). В этом легко убедиться и непосредственно, если воспользоваться матричным равенством

$$\begin{pmatrix} c & \overline{c} \\ cJ & \overline{cJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{21} & -a_{22} \\ a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix},$$

которое вытекает непосредственно из (2), (26). В силу этого равенства размерность класса $\{\eta \in \mathbb{C}^l$, $\mathrm{re}\, c\eta = \mathrm{re}\, cJ\eta = 0\}$ в точности равна r.

Каждое вырожденное решение принадлежит ядру оператора R и, в частности, класс этих решений конечномерен. На основании леммы 4 отсюда заключаем, что каждое вырожденное решение является тривиальным. Таким образом, в этом случае $\mathrm{re}\, c\phi \equiv 0$ тогда и только тогда когда $\phi \in \mathcal{P}$. В частности, если в условиях леммы 2 в представлении (20) функция $v = 0$, то $\phi \in \mathcal{P}$, причем $\phi \in \mathbb{C}^l$ в случае $\varkappa_D = 0$ бесконечной области. Последнее вытекает из того, что функция ϕ должна быть ограниченной на бесконечности. Таким образом, оператор $S\phi = \mathrm{re}\, c\phi$, действующий из H^p в h^p, фредгольмов и его индекс равен $l + \varkappa_D r - (m-1)l = \varkappa_D r - ml$. Поэтому из общей теории фредгольмовых операторов оператор D фредгольмов и его индекс $\mathrm{ind}\, D = \mathrm{ind}\, R - \mathrm{ind}\, S = -\varkappa_D r$. Остальные утверждения теоремы являются очевидными следствиями соответствующих утверждений теоремы 1. □

Как и в случае теорем 1, 2 решение задачи (30) редуцируется к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений на контуре Γ. Существует однако более прямой путь, основанный на обобщенных потенциалах двойного слоя, который позволяет редуцировать эту задачу непосредственно к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В дальнейшем матрица c предполагается обратимой.

Рассмотрим на контуре Γ единичный касательный вектор $e(t)$, $t \in \Gamma$, направление которого согласовано с этой ориентацией. В частности, $n = -ie$ является вектором внешней (по отношению к D) нормали. Хорошо известно, что ядро

$$Q_0(t,\xi) = \frac{n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2}{|\xi|^2} \tag{31}$$

определяет классический потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа по формуле

$$(P_0\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} Q_0(t, t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D.$$

Поскольку

$$Q_0(t,\xi) = \mathrm{im}\,\frac{e_1(t) + ie_2(t)}{\xi_1 + i\xi_2},$$

функция $P_0\varphi$ совпадает с вещественной частью интеграла типа Коши и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Обобщенный потенциал двойного слоя для сопряженных функций к решениям эллиптической системы (1) построим по аналогичной схеме с помощью интеграла типа Коши для J-аналитических функций. С этой целью введем четную и однородную степени нуль матрицу-функцию

$$H(\xi) = \mathrm{im}\,[c(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}c^{-1}], \tag{32}$$

которая в силу леммы 1 не зависит от выбора пары (b, J).

Убедимся, что в обозначениях (31), (32)

$$\mathrm{im}\,[be_J(t)\xi_J^{-1}b^{-1}] = Q_0(t,\xi)H(\xi). \tag{33}$$

В самом деле, полагая $\mathcal{J} = bJb^{-1}$, равенство (33) можем переписать в форме

$$\mathrm{im}\,[e_{\mathcal{J}}(t)\xi_{\mathcal{J}}^{-1}] = Q_0(t,\xi)\mathrm{im}\,[(-\xi_2 + \xi_1\mathcal{J})(\xi_1 + \xi_2\mathcal{J})^{-1}]. \tag{34}$$

Зафиксируем ненулевой вектор $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}$ и рассмотрим ортогональный ему вектор $\eta = -\xi_2 + i\xi_1$. Тогда касательный вектор $e = e(t)$ к контуру Γ в фиксированной точке t можно представить в виде линейной комбинации $s_1\xi + s_2\eta$ с коэффициентами

$$s_1 = \frac{e_1\xi_1 + e_2\xi_2}{|\xi|^2}, \quad s_2 = \frac{-e_1\xi_2 + e_2\xi_1}{|\xi|^2}.$$

В частности, выражение для коэффициента s_2 в точности совпадает с (31). В этих обозначениях $e_{\mathcal{J}}\xi_{\mathcal{J}}^{-1} = (s_1\xi_{\mathcal{J}} + s_2\eta_{\mathcal{J}})\xi_{\mathcal{J}}^{-1} = s_1 + s_2\eta_{\mathcal{J}}\xi_{\mathcal{J}}^{-1}$ и, значит,

$$\mathrm{im}\,[e_{\mathcal{J}}\xi_{\mathcal{J}}^{-1}] = s_2\mathrm{im}\,[(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}],$$

что завершает доказательство (34) и, следовательно, (33).

Рассмотрим интеграл

$$(P\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} Q(t, t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{35}$$

с ядром $Q(t,\xi) = Q_0(t,\xi)H(\xi)$. В силу (33) он связан с обобщенным интегралом типа Коши $I_J\varphi$ соотношением

$$P\varphi = 2\mathrm{re}\,[c(I_Jc^{-1}\varphi)]. \tag{36}$$

В частности, интеграл (35) описывает сопряженные функции к решениям эллиптической системы (1) и его естественно назвать обобщенным потенциалом двойного слоя для этих функций.

Рассмотрим интегральный оператор K, который определяется аналогично (35) по отношению к точкам контура, точнее, равенством

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma Q(t, t-t_0)\varphi(t)|dt|, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{37}$$

Если контур Γ ляпуновский, то его ядро $Q(t_0, t-t_0)$ имеет слабую особенность при $t = t_0$. Более точно, в предположении $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ функция $k(t_0,t) = |t-t_0|Q(t_0, t-t_0)$ принадлежит классу $C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$ и обращается в нуль при $t = t_0$. Как показано в [7], в этом случае интегральный оператор K ограничен $C(\Gamma) \to C^\mu(\Gamma)$ и, в частности, компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$.

Согласно (36) граничные свойства функции $v = P\varphi$ изнутри области D полностью определяются аналогичными свойствами интеграла типа Коши. В частности, оператор P ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ и справедлива формула граничных значений

$$(P\varphi)^+ = \varphi + K\varphi. \tag{38}$$

Следующая основная теорема решает вопрос о представлении решений слабо связанной эллиптической системы обобщенными потенциалами двойного слоя. Удобно ввести следующее обозначение. Пусть область D' ограничена простым гладким контуром. Обозначим $s(D')$ размерность пространства сопряженных однородной задачи Дирихле в области D', причем в случае бесконечной области сопряженные функции подчиняются условию

$$\operatorname{grad} v(z) = \xi + O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \tag{39}$$

где компоненты вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ связаны соотношением $\xi_1 = J\xi_2$. Заметим, что это соотношение равносильно равенствами $\xi_1 = \operatorname{im} c\eta$, $\xi_2 = \operatorname{im} cJ\eta$, где вектор $\eta \in \mathbb{C}^l$ удовлетворяет условиям $\operatorname{re} c\eta = \operatorname{re} cJ\eta = 0$. Поэтому размерность пространства векторов ξ указанного вида равна r — дефекту системы (1).

Теорема 4. *Пусть контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu+0}$ и состоит из связных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Пусть области D'_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, с границей $\partial D'_j = \Gamma_j$ составляют дополнение $D' = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, причем в случае $\varkappa_D = 1$ конечной области компонента D'_m является бесконечной. Положим*

$$k = s(D'_1) + \ldots + s(D'_m) + (m - \varkappa_D)(l + r), \quad k' = k - \varkappa_D r, \tag{40}$$

где r есть дефект системы (1). *Тогда найдутся такие линейно независимые системы вещественных l-вектор-функций $g_1, \dots, g_k \in C^{1,\mu+0}(\Gamma)$ и $v_1, \dots, v_{k'} \in C^{1,\mu+0}(\overline{D})$, что любая сопряженная функция $v \in h^p(D)$ единственным образом представима в виде*

$$v = P\varphi + \sum\nolimits_1^{k'} \lambda_j v_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

с некоторой вещественной l-вектор-функцией $\varphi \in L^p(\Gamma)$, подчиненной условиям

$$\int_\Gamma \varphi(t) g_i(t)|dt| = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{42}$$

Если в этом представлении $v \in C^\mu(\overline{D})$, то и $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Аналогично $v \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ влечет $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Доказательство. Оно основывается на описании ядра $\ker P = \{\varphi \,|P\varphi = 0\}$ оператора P. Пусть $P\varphi = 0$, рассмотрим в области D интеграл типа Коши $\phi = I_J(c^{-1}\varphi)$ и аналогичный интеграл в ее дополнении D', который обозначим $\psi = I'_J(c^{-1}\varphi)$. Заметим, что контур Γ ориентирован отрицательно по отношению к открытому множеству D', поэтому граничное значение ψ обозначаем ψ^-. Для этих функций по формуле Сохоцкого—Племеля

$$\phi^+ - \psi^- = c^{-1}\varphi. \tag{43}$$

В силу (36) равенство $P\varphi = 0$ можем переписать в форме $\operatorname{re} c\phi = 0$. Как установлено при доказательстве теоремы 3, отсюда $\phi = p \in \mathcal{P}$. Следовательно, функция ψ в открытом множестве удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{im} c(\psi - p)^- = 0. \tag{44}$$

Поскольку $\operatorname{re} cp = 0$, в соответствии с (43) исходная плотность φ связана с решением этой задачи равенством $\varphi = -\operatorname{re} c\psi^-$.

Обратно, пусть некоторая J-аналитическая функция ψ_1 задана в D', исчезает на бесконечности в случае конечной области D и удовлетворяет краевому условию (44) с некоторым многочленом $p \in \mathcal{P}$. Утверждается, что тогда $P\varphi = 0$ для плотности φ, определяемой предыдущим равенством по отношению к ψ_1.

В самом деле, для пары $\phi_1 = p$ и ψ_1 имеем соотношение (43). С другой стороны, это же соотношение справедливо и для пары функций $\phi = I_J(c^{-1}\varphi)$ и $\psi = I'_J(c^{-1}\varphi)$. Следовательно, для разностей $\phi_0 = \phi - \phi_1$ и $\psi_0 = \psi - \psi_1$ справедливо равенство $\phi_0^+ = \psi_0^-$. В силу формулы Коши (13), примененной к областям D и D'_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, это равенство возможно только, когда ϕ_0 и ψ_0 равны нулю. Таким образом, $I_J(c^{-1}\varphi) = p$ и, следовательно, $P\varphi = 0$.

Если конечномерное пространство всех решений ψ задачи (44) обозначить X, то

$$\ker P = \{\operatorname{re} c\psi^-,\ \psi \in X\}. \tag{45}$$

Обозначим Y класс всех сопряженных функций в D', удовлетворяющих однородному условию Дирихле в каждой из компонент D'_j и допускающих поведение (39) в окрестности ∞ в случае конечной области D. Очевидно, его размерность

$$\dim Y = s(D'_1) + \ldots + s(D'_m). \tag{46}$$

Утверждается, что в обозначениях (40) размерность пространства (45) равна k. Доказательство этого факта для обоих значений сигнатуры $\varkappa_D$ проведем отдельно. Пусть область D бесконечна, так что все компоненты D'_j ее дополнения конечны. Очевидно, для $\psi \in X$ функция $v = \operatorname{im} c(\psi - p) \in Y$. Верно и обратное — каждую такую функцию $v \in Y$ можем записать в форме $v = \operatorname{im} c\psi$, где ψ удовлетворяет условию (44) с $p = 0$. Таким образом, отображение $\psi \to v = \operatorname{im} c(\psi - p)$ переводит X на все Y и, следовательно, размерность его ядра равна разности $\dim X - \dim Y$.

Опишем ядро этого линейного отображения. Если $\operatorname{im} c(\psi - p) = 0$, то тогда в области D'_j имеем равенство $\psi - p = ip_j$ с некоторым $p_j \in \mathcal{P}$. Поскольку пространство $i\mathcal{P} = \{ip,\ p \in \mathcal{P}\}$ не пересекается с $\mathcal{P}$, отсюда заключаем, что размерность ядра равна $(m+1)(l+r)$. Следовательно,

$$\dim X = \dim Y + (m+1)(l+r). \tag{47}$$

С другой стороны, согласно (45) отображение $\psi \to \operatorname{re} c\psi$ переводит X на все $\ker P$. Ядро этого отображения совпадает с $\mathcal{P}$. В самом деле, поскольку $\operatorname{re} c\psi = \operatorname{re} c(\psi - p)$, двойное равенство $\operatorname{im} c(\psi - p)^- = \operatorname{re} c\psi^- = 0$ влечет $(\psi - p)^- = 0$ и, значит, $\psi = p$. Таким образом, размерность пространства (45) равна $\dim X - (l+r)$, что с учетом (46), (47) и рассматриваемого случая $\varkappa_D = 0$ дает равенство $\dim(\ker P) = k$.

Обратимся к случаю конечной области, когда первые $m-1$ из компонент D'_j конечны, а последняя бесконечна. По условию функции $\psi \in X$ исчезают на бесконечности. В обозначениях (44) сопряженная функция $v = \operatorname{im} c(\psi - p)$ принадлежит Y и, в частности, удовлетворяет условию (39). Верно и обратное: если сопряженная функция v удовлетворяет условию (39), то найдется такой многочлен $p \in \mathcal{P}$, что разность $v - \operatorname{im} cp$ исчезает на бесконечности и удовлетворяет условию (6), поэтому в области D'_m существует такая функция ψ, исчезающая на бесконечности, что $\operatorname{im} c(\psi - p)$ совпадает с v. Ясно, что ее можно продолжить до элемента $\psi \in X$ со свойством (44). Таким образом, и в этом случае отображение $\psi \to v = \operatorname{im} c(\psi - p)$ переводит X на все Y.

Если $\operatorname{im} c(\psi - p) = 0$, то как и выше имеем равенство $\psi - p = ip_j$ с некоторым $p_j \in \mathcal{P}$. Но в области D'_m функция $\psi = p + ip_m$ исчезает на бесконечности, поэтому $p = p_m = 0$. Следовательно,

$$\dim X = \dim Y + (m-1)(l+r). \tag{48}$$

Рассмотрим далее отображение $\psi \to \operatorname{re} c\psi$, которое переводит X на все $\ker P$. Утверждается, что в рассматриваемом случае оно взаимно однозначно. В самом деле, как и выше убеждаемся, что $\operatorname{im} c(\psi - p)^- = \operatorname{re} c\psi^- = 0$ влечет $\psi = p \in \mathcal{P}$. Поскольку ψ исчезает на бесконечности, то $p = 0$. Таким образом, размерность пространства (45) равна размерности X, что с учетом (48) и рассматриваемого случая $\varkappa_D = 1$ опять совпадает с величиной k в (40).

Согласно (38) композиция DP оператора D задачи Дирихле с P дает фредгольмовый оператор $1 + K$, поэтому на основании теоремы 3 оператор $P : C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ фредгольмов и его индекс равен $\varkappa_D r$. Напомним, что под $C^\mu(\overline{D})$ понимается соответствующее пространство сопряженных функций. Таким образом, в обозначениях (40) существует система элементов $v_1, \dots, v_{k'} \in C^\mu(\overline{D})$, линейно независимых по модулю подпространства $\operatorname{im} P = P(C^\mu)$ — образа оператора P. В действительности эти функции можно выбрать в классе $C^{\mu+0}$. Для доказательства выберем $\nu > \mu$ так, чтобы контур Γ принадлежал классу $C^{1,\nu+0}$ и, соответственно, функция $k(t_0,t) = |t-t_0|Q(t_0,t-t_0)$, связанная с ядром оператора (37), принадлежала классу $C^{\nu+0}(\Gamma\times\Gamma)$. В этом случае оператор K ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C^\nu(\Gamma)$.

Заменяя в предыдущих рассуждениях μ на ν, выберем систему функций $\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_{k'} \in C^\mu(\overline{D})$, линейно независимых по модулю подпространства $P(C^\nu)$. Тогда эти функции будут линейно независимыми и по модулю $P(C^\mu)$. В самом деле, если это не так, то найдется линейная комбинация $\widetilde{v} = \sum \lambda_j \widetilde{v}_j$, совпадающая с $P\varphi$ для некоторой $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Следовательно, $\varphi + K\varphi = \widetilde{v}^+ \in C^\nu(\Gamma)$, так что и $\varphi = \widetilde{v}^+ - K\varphi \in C^\nu(\Gamma)$. Поэтому $\widetilde{v} = P\varphi \in P(C^\nu)$ и в силу выбора $\widetilde{v}_j$ все коэффициенты λ_j линейной комбинации равны нулю.

Таким образом, опуская волну в обозначениях, можно считать, что система функций $v_1, \dots, v_{k'} \in C^{\mu+0}(\overline{D})$ линейно независима по модулю подпространства $\operatorname{im} P = P(C^\mu)$. В частности, представление, осуществляемое первым равенством (41), всегда возможно. Однако функция φ в этом представления определена с точностью до слагаемого из $\ker P$. В качестве системы функций $g_1, \dots, g_k \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ выберем базис в $\ker P$. Тогда вторым условием (41) функция φ определится однозначно, что завершает доказательство теоремы. □

Как видно из доказательства, ядро $\ker P = \{g_1, \dots, g_k\}$ содержит функции g, постоянные на контурах Γ_j (и обращающихся в нуль на Γ_m в случае конечной области D). Особенно простую картину имеем при $m = 1$, когда область D ограничена простым контуром Γ. В этом случае величина k в (40) совпадает с размерностью $s(D')$ ядра задачи Дирихле в области D', если область D конечна, и $k = s(D') + l + r$ в противном случае. В последнем случае функции $\psi = ip$, $p \in \mathcal{P}$, служат решениями задачи (44), так что ядро $\ker P$ содержит подпространство $\{\operatorname{im} cp,\ p \in \mathcal{P}\}$, размерность которого в точности равна $r + l$.

Из теоремы 4 непосредственно следует, что задача Дирихле для сопряженных функций редуцируется к эквивалентной конечномерно возмущенной системе интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi + K\varphi + \sum\nolimits_1^{k'} \lambda_j v_j^+ = f, \qquad \int\limits_\Gamma \varphi(t) g_i(t)|dt| = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Связь между решениями задачи и этой системы осуществляется равенством (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
2. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1991. — *55*, № 5. — С. 1070–1100.
3. *Солдатов А. П.* О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости// Дифф. уравн. — 2003. — *39*, № 5. — С. 674–686.
4. *Солдатов А. П.* Гипераналитические функции и их приложения// Соврем. мат. и ее прилож. — 2004. — *15*. — С. 142–199.
5. *Солдатов А. П.* Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2006. — *70*, № 6. — С. 161–192.
6. *Солдатов А. П.* Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка// Докл. РАН. — 2007. — *416*, № 1. — С. 26–30.
7. *Солдатов А. П., Чернова О. В.* Задача Римана—Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера// Науч. ведомости БелГУ. — 2009. — *13(68)*, № 17/2. — С. 115–121.
8. *Товмасян Н. Е.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. — Дифф. уравн. — 1966. — *1-2*. — С. 3–23, 163–171.
9. *Douglis A. A.* A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables// Comm. Pure Appl. Math. — 1953. — *6*. — С. 259–289.
10. *Gilbert R. P., Wendland W. L.* Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1975. — *73A*. — С. 317–371.
11. *Hile, G. N.* Function theory for a class of elliptic systems in the plane// J. Differential Equations. — 1979. — *32*, № 3. — С. 369–387.

12. *Soldatov A. P.* On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane// More progresses in analysis, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, Catania, Italy, 25–30 July 2005. — Hackensack: World Scientific, 2009. — C. 1171–1184.

Александр Павлович Солдатов
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
кафедра математического анализа
E-mail: `soldatov@bsu.edu.ru`