ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2013, том 49, № 6, с. 734–745

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.2

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

© 2013 г. А. П. Солдатов

Посвящается Владимиру Александровичу Ильину
в связи с его 85-летием

Рассматриваются эллиптические системы второго порядка на плоскости с постоянными (и только старшими) матричными коэффициентами. Показано, что для этих систем понятие слабо связанности (по терминологии А.В. Бицадзе) равносильно выполнению известного условия дополнительности для задачи Дирихле. В рамках теоретико-функционального подхода введены аналоги потенциалов двойного слоя для решений слабо связанных систем. С помощью этих потенциалов получено полное описание решений слабо эллиптических систем как в классах Гёльдера, так и в классах Харди $h^p(D)$ и $C(\overline{D})$.

DOI: 10.1134/S0374064113060058

Рассмотрим однородную эллиптическую систему второго порядка

$$a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

с постоянными (и только старшими) коэффициентами $a_j\in\mathbf{R}^{l\times l}$. Его регулярным решением служит вещественная l-вектор-функция $u=(u_1,\dots,u_l)$ класса C^2. С этой системой связан матричный трехчлен $p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2$. Условие эллиптичности означает, что $\det a_2\neq 0$ и характеристическое уравнение $\det p(z)=0$ не имеет вещественных корней. Множество этих корней в верхней полуплоскости обозначим через σ, и пусть k_ν – кратность корня $\nu\in\sigma$.

Как установлено в работе [1], справедлива

Лемма 1. *Для любой эллиптической системы вида (1) найдутся такие матрицы $b,J\in\mathbb{C}^{l\times l}$, что спектр J совпадает с σ, выполнено матричное равенство*

$$a_0b+a_1bJ+a_2bJ^2=0 \tag{2}$$

и блочная матрица B с элементами $B_{11}=\overline{B_{12}}=b$, $B_{21}=\overline{B_{22}}=bJ$ обратима. При этом любая другая пара (b_1,J_1) с теми же свойствами связана с (b,J) соотношениями $b_1=bd$, $J_1=d^{-1}Jd$ с некоторой обратимой матрицей d.

Последнее утверждение леммы легко вытекает из соответствующих рассуждений, приведенных в [1]. Оно означает, что матрица J определена с точностью до подобия и ее естественно назвать характеристической матрицей системы (1). По отношению к равенству (2) будем говорить также, что матрица b приводит систему (1) к характеристической матрице J. Заметим, что в случае диагонализируемой системы, когда матрицы $a_2^{-1}a_0$ и $a_2^{-1}a_1$ диагональны, можно положить $b=1$ с характеристической диагональной матрицей J.

Очевидно, в общем случае матрицу J всегда можно выбрать в жордановой форме, т.е. в виде блочно-диагональной матрицы $J=\operatorname{diag}(J_1,\dots,J_n)$ с клетками Жордана

$$J_i=\begin{pmatrix}\nu_i & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \nu_i & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_i\end{pmatrix}=\nu_i+\Delta_i\in\mathbb{C}^{l_i\times l_i}.$$

В этом случае равенство (2) можно интерпретировать следующим образом. Если столбцы матрицы b с номерами, отвечающими номерам блока J_i, обозначить через $x_1,\ldots,x_{l_i}$ и рассматривать как элементы $\mathbb{C}^l$, то выполняются векторные равенства

$$p(\nu)x_1=0,\quad p(\nu)x_2+p'(\nu)x_1=0,$$

$$p(\nu)x_j+p'(\nu)x_{j-1}+\frac{1}{2}p''(\nu)x_{j-2}=0,\quad 2\le j\le l_i.$$

Согласно терминологии М.В. Келдыша [2, с. 309], набор этих векторов естественно назвать цепочкой собственных и присоединенных векторов квадратичного пучка $p(z)$, отвечающих собственному значению $\nu_i\in\sigma$. Эта цепочка образует матрицу $b_i\in\mathbb{C}^{l\times l_i}$, так что матрица b запишется в блочном виде $(b_1,\ldots,b_n)$. В этих обозначениях А.В. Бицадзе [3, с. 111–112] установлено, что любое решение u эллиптической системы (1) представляется в виде

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}b_i\sum_{k=0}^{l_i-1}\frac{y^k}{k!}\,\Delta_i^k\psi_i^{(k)}(x+\nu_i y) \tag{3}$$

с некоторыми аналитическими l_i-вектор-функциями $\psi_i(\zeta)$ переменной $\zeta=x+\nu_i y$.

Следуя А.В. Бицадзе [3, с. 113], систему (1) назовем слабо связанной, если матрица $b=(b_1,\ldots,b_n)$ обратима, и сильно связанной в противном случае. В силу леммы 1 это определение можно использовать по отношению к любой матрице b, приводящей систему (1) к характеристической матрице.

Как показано в [1], слабо связанные системы можно определять непосредственно по коэффициентам системы. Заметим, что в силу эллиптичности матрица-функция $p(t)$ обратима для $t\in\mathbb{R}$ и элементы обратной к ней матрицы $p^{-1}(t)$ имеют порядок -2 на бесконечности. Поэтому имеет смысл интеграл от этой матрицы-функции на прямой. В этих обозначениях система (1) слабо связана тогда и только тогда, когда

$$\det\int_{\mathbb{R}}p^{-1}(t)\,dt\ne 0. \tag{4}$$

Из этого критерия, в частности, следует, что переход от (1) к системе

$$a_0^{\mathrm{т}}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x^2}+a_1^{\mathrm{т}}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y^2}+a_2^{\mathrm{т}}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y^2}=0, \tag{$\widetilde{1}$}$$

формально сопряженной по Лагранжу, не изменяет ее типа.

Рассмотрим для системы (1) задачу Дирихле

$$u|_\Gamma=f \tag{5}$$

в области D, ограниченной гладким контуром Γ. С помощью параметрикса Н.Е. Товмасяну [4] удалось свести эту задачу, рассматриваемую в классе Гёльдера, к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на Γ, которая при выполнении условия (4) принадлежит к нормальному типу и имеет индекс нуль. Таким образом, условие (4), т.е. условие слабой связанности системы (1), необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи Дирихле.

Позднее в работах [5] и [6] был доказан аналогичный факт исходя из представления (3).

С другой стороны, с точки зрения современной общей эллиптической теории [7, с. 10] фредгольмовость задачи (1), (5) обеспечивается так называемым условием дополнительности, которое может быть сформулировано следующим образом.

Пусть $n=n_1+in_2$ – единичная внешняя нормаль в фиксированной точке контура Γ. С помощью этой нормали составим матричный трехчлен

$$p(n,z)=(n_2-n_1z)^2a_{11}+(n_2-n_1z)(n_1+n_2z)a_{12}+(n_1+n_2z)^2a_{22}, \tag{6}$$

который при $n = i$ переходит в $p(z)$. Нетрудно видеть, что его определитель $\chi(n,z)$ как многочлен степени $2l$ не имеет вещественных корней, так что в верхней полуплоскости расположено ровно l корней $z_1(n),\ldots,z_l(n)$, взятых с учетом кратностей. Пусть многочлен $\chi_+(n,z)$ составлен из множителей $z - z_j(n)$, $j = \overline{1,l}$, и аналогичный смысл имеет $\chi_-(n,z)$ по отношению к $z - \overline{z_j(n)}$. Введем еще матрицу p^*, присоединенную к транспонированной матрице $p^{\mathrm{т}}$, ее элемент $p^*_{ij}(n,z)$ представляет собой определитель матрицы, полученной из $p(n,z)$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. В частности,

$$p^*(n,z) = [\det p(n,z)](p^{\mathrm{т}})^{-1}(n,z). \tag{7}$$

В принятых обозначениях условие дополнительности в рассматриваемой граничной точке контура заключается в том, что если $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_l) \in \mathbb{C}^l$ и все компоненты l-вектора-многочлена $p^*(n,z)\xi$ кратны $\chi_+(n,z)$, то $\xi = 0$. Поскольку многочлен χ_- всюду отличен от нуля в верхней полуплоскости, с учетом (7) это условие можно переформулировать также следующим образом: если мероморфная вектор-функция $(p^{\mathrm{т}})^{-1}(n,z)\xi$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости, то $\xi = 0$.

Теорема 1. *Эллиптическая система слабо связана тогда и только тогда, когда выполнено условие дополнительности.*

Доказательство. Когда точка пробегает весь контур Γ, нормаль n принимает все возможные значения, так что условие дополнительности должно выполняться для каждого единичного вектора $n = n_1 + in_2$. В действительности это условие достаточно проверять для $n = i$, когда многочлен (6) совпадает с $p(z)$. В самом деле, с каждым многочленом $h(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k$ свяжем многочлен $\widehat{h}(z)$ той же степени по формуле

$$\widehat{h}(z) = (n_2 - n_1 z)^k c_0 + (n_2 - n_1 z)^{k-1}(n_1 + n_2 z)c_1 + \ldots + (n_1 + n_2 z)^k c_k$$

или, что равносильно,

$$\widehat{h}(z) = (n_2 - n_1 z)^k h\left(\frac{n_1 + n_2 z}{n_2 - n_1 z}\right). \tag{8}$$

Очевидно, полученное преобразование $h \to \widehat{h}$ обратимо и обратное к нему действует по аналогичной формуле

$$g(z) \to (n_2 + n_1 z)^k g\left(\frac{-n_1 + n_2 z}{n_2 + n_1 z}\right).$$

При $n = i$ оно переходит в тождественное преобразование. Из определения (8) также видно, что для любых двух многочленов справедливо соотношение

$$\widehat{h_1 h_2} = \widehat{h}_1 \widehat{h}_2.$$

В частности, если коэффициентами c_j являются числовые $l\times l$-матрицы, так что к этому типу принадлежат и значения $h = (h_{ij})_1^l$ многочлена h, то $\widehat{\det h}(z) = \det[\widehat{h}(z)]$.

Рассмотрим матричный многочлен $p(z)$ эллиптической системы (1) и его определитель $\chi = \det p$, который может быть записан в виде

$$\chi(z) = (\det a_{22})\chi_+(z)\chi_-(z), \tag{9}$$

где χ_+ и χ_- определяются соответственно сомножителями $(z-\nu)^{k_\nu}$ и $(z-\overline{\nu})^{k_\nu}$ по $\nu \in \sigma$. В принятых обозначениях многочлен (6) совпадает с $\widehat{p}(z)$ и соответственно его определитель

$$\chi(n,z) = \widehat{\chi}(z). \tag{10}$$

Поскольку дробно линейное преобразование, фигурирующее в правой части (8), переводит верхнюю полуплоскость на себя, имеем аналогичное (10) равенство $\chi_+(n,z) = \widehat{\chi}_+(z)$. Точно так же можно записать и равенство $p^*(n,z)=\widehat{p^*}(z)$, где $p^*(z)$ – матрица, присоединенная к транспонированной матрице $p^{\mathrm{т}}(z)$. Следовательно, если $\xi\in\mathbb{R}^l$ и выполнено равенство

$$p^*(n,z)\xi=\chi(n,z)(p^{\mathrm{т}})^{-1}(n,z)=\chi_+(n,z)h(z)$$

с некоторым вектором-многочленом h, то оно равносильно равенству

$$\chi(z)(p^{\mathrm{т}})^{-1}(z)=\chi_+(z)g(z),\quad \widehat{g}=h.$$

Итак, условие дополнительности для эллиптической системы (1) заключается в том, что если мероморфная вектор-функция $(p^{\mathrm{т}})^{-1}(z)\xi$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости, то $\xi=0$. Соответственно для системы, сопряженной к (1) по Лагранжу, это условие должно выполняться по отношению к $p^{-1}(z)\xi$.

Проверка справедливости этого условия для слабо связанной системы почти очевидна: если вектор-функция $p^{-1}(z)\xi$ аналитична в верхней полуплоскости, то в силу теоремы Коши

$$\int\limits_{\mathbb{R}} p^{-1}(t)\xi\,dt=\Bigl[\int\limits_{\mathbb{R}} p^{-1}(t)\,dt\Bigr]\xi=0.$$

Согласно критерию (4), матрица в квадратных скобках этого равенства обратима, так что $\xi=0$.

Предположим теперь, что система (1) сильно связана и матрица b приводит ее к характеристической матрице J. Тогда, согласно определению, $\det b=0$, так что $b\eta=0$ для некоторого ненулевого вектора $\eta\in\mathbb{C}^l$. Заметим, что в силу обратимости блочной матрицы B с элементами $B_{11}=\overline{B_{12}}=b$, $B_{21}=\overline{B_{22}}=bJ$ выполняется неравенство $bJ\eta\neq 0$. Рассмотрим на полуоси $t>0$ вектор-функцию $be^{iJt}\eta$. Поскольку спектр матрицы J совпадает с σ и, следовательно, лежит в верхней полуплоскости, элементы этой матрицы-функции убывают на бесконечности быстрее любой степени и, очевидно, при $t=0$ обращаются в нуль. Поэтому можем ввести аналитическую в верхней полуплоскости вектор-функцию

$$U(z)=\int\limits_0^\infty be^{i(z+J)t}\eta\,dt.$$

Интегрируя по частям, получаем равенство

$$zU(z)=\int\limits_0^\infty bJe^{i(z+J)t}\eta\,dt,$$

поскольку внеинтегральные члены равны нулю. Из тех же соображений имеем

$$z^2U(z)=\int\limits_0^\infty bJ(-i)(e^{izt})'e^{iJt}\eta\,dt=ibJ\eta+\int\limits_0^\infty bJ^2e^{i(z+J)t}\eta\,dt.$$

Таким образом,

$$p(z)U(z)=(a_{11}+a_{12}z+a_{22}z^2)U(z)=a_{22}bJ\eta+\int\limits_0^\infty(a_{11}b+a_{12}bJ+a_{22}bJ^2)e^{iJt}\eta\,dt.$$

С учетом (2) отсюда следует, что для $\xi=a_{22}bJ\eta$ функция $p^{-1}(z)\xi=U(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, а это противоречит условию дополнительности.

При исследовании краевых задач для эллиптической системы (1) удобнее использовать не аналитические функции в представлении А.В. Бицадзе (3), а решения $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_l)$ эллиптической системы специального вида

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0,$$

которая была введена в работе [8] для ганкелевых матриц J в теории гиперкомплексных чисел и обобщает классическую систему Коши–Римана. Ее решения называем J-аналитическими функциями, поскольку их можно описать как функции класса C^1, допускающие в каждой точке z обобщенную производную

$$\phi'(z) = \lim_{t\to z}(t-z)_J^{-1}[\phi(t) - \phi(z)],$$

которая совпадает с частной производной по x. Здесь и ниже с комплексным числом $z = x+iy$ связывается матрица $z_J = x + yJ$, где $x = x1$ означает скалярную матрицу. Аналогичный смысл имеет и матричный дифференциал $dz_J = dx + J\,dy$ в криволинейных интегралах.

В дальнейшем роль J играет жорданова матрица $J = (J_1, \ldots, J_n)$ с клетками Жордана J_i указанного выше вида. Существует обратимое преобразование $\phi = E\psi$, переводящее аналитические l-вектор-функции ψ в J-аналитические. Если матрица J имеет единственное собственное значение ν такое, что $J = \nu + \Delta$, то это преобразование описывается формулой

$$\phi(x+iy) = \sum_{k\geq 0}\frac{y^k}{k!}\Delta^k\psi^{(k)}(x+\nu y).$$

Обратное преобразование задается аналогичной формулой

$$\psi(x+\nu y) = \sum_{k\geq 0}\frac{y^k}{k!}(-\Delta)^k\phi^{(k)}(x+iy).$$

В общем случае в соответствии с блочно-диагональной структурой J эти равенства определяются поблочно.

Подстановка $\psi = E^{-1}\phi$ в формулу А.В. Бицадзе (3) приводит к следующему результату [9].

Теорема 2. *Пусть матрица b приводит эллиптическую систему (1) к характеристической матрице J. Тогда общее решение u этой системы в односвязной области представимо в виде $u = \operatorname{Re} b\phi$, где J-аналитическая функция ϕ определяется по u с точностью до постоянного слагаемого однозначно. Более точно, справедливо равенство*

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2\left(b^0\frac{\partial u}{\partial x} + b^1\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \begin{pmatrix} b^0 & b^1 \\ \overline{b}^0 & \overline{b}^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ}\end{pmatrix}^{-1}.$$

Аналогичный результат справедлив, конечно, и для формально сопряженной эллиптической системы $(\widetilde{1})$, которая слабо связана вместе с исходной системой (1).

Рассмотрим однородную задачу Дирихле

$$\widetilde{u}|_\Gamma = 0 \qquad (\widetilde{5})$$

для этой системы. Записывая выражение

$$u\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x} + a_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2^{\mathrm{T}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\right)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0\frac{\partial u}{\partial x} + a_1\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\widetilde{u}$$

в дивергентном виде и используя формулу Грина, легко убедиться в том, что условия ортогональности

$$\int_\Gamma f\left[\left(a_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x} + a_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\right)n_1 + \left(a_2^{\mathrm{T}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\right)n_2\right]|dt| = 0,$$

в которых $|dt|$ означает элемент дуги Γ, решениям $\widetilde{u}$ однородной задачи $(\widetilde{1})$, $(\widetilde{5})$ необходимы для разрешимости задачи (1), (5). Меняя местами системы (1) и $(\widetilde{1})$, отсюда нетрудно вывести, что указанные условия ортогональности и достаточны для разрешимости задачи (1), (5).

Существуют и другие теоретико-функциональные подходы (см., например, [10, 11]) к исследованию системы (1).

Для функций, аналитических по Дуглису, справедливы все основные результаты классической теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши [9]. В частности, в окрестности изолированной особой точки для J-аналитической функции имеем разложение в ряд Лорана $\phi(z) = \sum (z-z_0)_J^k c_k$, $c_k \in \mathbb{C}^l$, по целым степеням матрицы $(z-z_0)_J$. Если функция ϕ ограничена в окрестности этой точки, то она устранима и данное разложение переходит в ряд Тейлора
$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)_J^k \frac{\phi^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

Если функция ϕ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной гладким контуром Γ, то имеют место теорема и формула Коши
$$\int_\Gamma dt_J\, \phi^+(t) = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \phi^+(t) = \begin{cases} \phi(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь и ниже предполагается, что контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D. При этом область D может быть как конечной, так и бесконечной, в последнем случае предполагается, что в окрестности бесконечности функция ϕ ведет себя как $o(|z|^{-1})$ в теореме Коши и как $o(1)$ в формуле Коши.

Пусть область D ограничена гладким контуром Γ, ориентированным положительно по отношению к D. Тогда можем ввести обобщенный интеграл типа Коши
$$(I_J \varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1}\, dt_J\, \varphi(t),$$
определяющий J-аналитическую функцию $\phi = I_J\varphi$, и соответствующий сингулярный интеграл Коши
$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$
который понимается в смысле главного значения. Определяемый этим интегралом оператор I_J ограничен в пространствах Гёльдера $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$, причем справедлива формула Сохоцкого–Племеля $2\phi^+ = \varphi + S_J\varphi$ для граничных значений функции $\phi = I_J\varphi$. Если область D бесконечна, то в окрестности бесконечности функция ϕ имеет оценку $O(|z|^{-1})$ и разлагается в ряд по степеням z_J^{-k}, $k \geq 1$.

Произвольную J-аналитическую функцию $\phi \in C^\mu(\overline{D})$ можно представить интегралом типа Коши $I_J\varphi$ с вещественной плотностью φ и с помощью этого представления привести задачу Дирихле [12] к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений на контуре Γ. Если область D бесконечна, то решение u системы (1) в окрестности бесконечности подчиняется оценке
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| = O\biggl(\frac{1}{|z|^2}\biggr), \tag{12}$$
в частности, имеет предел $u(\infty) = \lim u(z)$ при $z \to \infty$. Отсюда получаем следующий результат [9, 12].

Теорема 3. *Пусть контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu+0}$ (т.е. $C^{1,\mu+\varepsilon}$ с малым $\varepsilon > 0$) и система (1) слабо связана. Тогда оператор задачи (5), действующий из класса $u \in C^\mu(\overline{D})$ решений этой системы (с указанным выше поведением на бесконечности в случае* *неограниченной области) в* $C^\mu(\Gamma)$, *фредгольмов и его индекс равен нулю. Если дополнительно* $\Gamma \in C^{1,\nu+0}$, $\mu < \nu < 1$, *то и любое решение* $u \in C^\mu(\overline{D})$ *задачи с правой частью* $f \in C^\nu(\Gamma)$ *принадлежит* $C^\nu(\overline{D})$.

Существует, однако, более простой подход, основанный на обобщенных потенциалах двойного слоя, который позволяет редуцировать задачу Дирихле непосредственно к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Рассмотрим на контуре Γ единичный касательный вектор $e(t)$, $t \in \Gamma$, направление которого согласовано с этой ориентацией. В частности, $n = -ie$ является вектором внешней (по отношению к D) нормали. Хорошо известно, что ядро

$$Q_0(t,\xi) = \frac{n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2}{|\xi|^2} \tag{13}$$

определяет классический потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа по формуле

$$(P_0\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma Q_0(t, t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D.$$

Поскольку

$$Q_0(t,\xi) = \operatorname{Im}\frac{e_1(t) + ie_2(t)}{\xi_1 + i\xi_2},$$

функция $P_0\varphi$ совпадает с вещественной частью интеграла типа Коши и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Обобщенный потенциал двойного слоя для слабо связанной эллиптической системы (1) построим по аналогичной схеме исходя из интеграла типа Коши для J-аналитических функций. Для этого, используя матрицу b, приводящую систему к характеристической форме J, введем четную и однородную степени нуль матрицу-функцию

$$H(\xi) = \operatorname{Im}[b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}b^{-1}], \tag{14}$$

которая в силу леммы 1 не зависит от выбора пары (b, J).

Лемма 2. *Пусть эллиптическая система (1) слабо связана и матрица* b *приводит ее к характеристической форме* J. *Тогда в обозначениях (13), (14) справедливо равенство*

$$\operatorname{Im}[be_J(t)\xi_J^{-1}b^{-1}] = Q_0(t,\xi)H(\xi). \tag{15}$$

Доказательство. Полагая $\mathcal{J} = bJb^{-1}$, равенство (15) можем записать в виде

$$\operatorname{Im}[e_{\mathcal{J}}(t)\xi_{\mathcal{J}}^{-1}] = Q_0(t,\xi)\operatorname{Im}[(-\xi_2 + \xi_1\mathcal{J})(\xi_1 + \xi_2\mathcal{J})^{-1}]. \tag{16}$$

Зафиксируем ненулевой вектор $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}$ и рассмотрим ортогональный ему вектор $\eta = -\xi_2 + i\xi_1$. Тогда касательный вектор $e = e(t)$ к контуру Γ в фиксированной точке t можно представить в виде линейной комбинации $s_1\xi + s_2\eta$ с коэффициентами

$$s_1 = \frac{e_1\xi_1 + e_2\xi_2}{|\xi|^2}, \quad s_2 = \frac{-e_1\xi_2 + e_2\xi_1}{|\xi|^2}.$$

В частности, выражение для коэффициента s_2 в точности совпадает с (13). В этих обозначениях $e_{\mathcal{J}}\xi_{\mathcal{J}}^{-1} = (s_1\xi_{\mathcal{J}} + s_2\eta_{\mathcal{J}})\xi_{\mathcal{J}}^{-1} = s_1 + s_2\eta_{\mathcal{J}}\xi_{\mathcal{J}}^{-1}$ и, значит,

$$\operatorname{Im}[e_{\mathcal{J}}\xi_{\mathcal{J}}^{-1}] = s_2\operatorname{Im}[(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}],$$

что завершает доказательство равенства (16) и леммы.

Если система (1) диагонализируема, то матрица $b=1$ приводит ее к диагональной характеристической матрице $J=\mathrm{diag}(\nu_1,\ldots,\nu_l)$, где в отличие от (3) корни ν_i записаны с учетом их кратности. В этом случае матрица H также диагональна и имеет вид

$$H=\mathrm{diag}(H_1,\ldots,H_l),\quad H_k(\xi)=\frac{|\xi|^2\,\mathrm{Im}\,\nu_k}{|\xi_1+\nu_k\xi_2|^2}.$$

В частности, для уравнения Лапласа можно положить $b=1$, $J=i$ и, следовательно, $H=1$.

Как и в случае этого уравнения, рассмотрим интеграл

$$(P\varphi)(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma Q(t,t-z)\varphi(t)|dt|,\quad z\in D, \tag{17}$$

с ядром $Q(t,\xi)=Q_0(t,\xi)H(\xi)$. В силу равенства (15) он связан с обобщенным интегралом типа Коши $I_J\varphi$ соотношением

$$P\varphi=2\,\mathrm{Re}[b(I_Jb^{-1}\varphi)]. \tag{18}$$

В частности, интеграл (17) описывает решения слабо связанной системы (1) и его естественно назвать обобщенным потенциалом двойного слоя этой системы.

Рассмотрим интегральный оператор K, который определяется аналогично (17) по отношению к точкам контура, точнее, равенством

$$(K\varphi)(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma Q(t,t-t_0)\varphi(t)|dt|,\quad t_0\in\Gamma. \tag{19}$$

Если контур Γ ляпуновский, то его ядро $Q(t_0,t-t_0)$ имеет слабую особенность при $t=t_0$. Более точно, в предположении $\Gamma\in C^{1,\mu+0}$ функция $k(t_0,t)=|t-t_0|Q(t_0,t-t_0)$ принадлежит классу $C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$ и обращается в нуль при $t=t_0$. Как показано в [13], в этом случае интегральный оператор K ограничен $C(\Gamma)\to C^\mu(\Gamma)$ и, в частности, компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$.

Согласно равенству (18), граничные свойства функции $u=P\varphi$ изнутри области D полностью определяются аналогичными свойствами интеграла типа Коши, а именно оператор P ограничен $C^\mu(\Gamma)\to C^\mu(\overline{D})$ и справедлива формула граничных значений

$$(P\varphi)^+=\varphi+K\varphi. \tag{20}$$

Представление решений слабо связанной эллиптической системы с обобщенными потенциалами двойного слоя определяет

Теорема 4. *Пусть контур $\Gamma=\partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu+0}$ и состоит из связных компонент $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$, кроме того, области D'_j, $1\le j\le m$, с границей $\partial D'_j=\Gamma_j$ составляют дополнение $D'=\mathbb{C}\setminus\overline{D}$, причем для определенности в случае конечной области D компонента D'_m является бесконечной. Пусть, наконец, s_j – размерность пространства решений слабо связанной системы (1) однородной задачи Дирихле в области D'_j и*

$$k=s+(m-\varkappa_D)l,\quad s=s_1+\ldots+s_m, \tag{21}$$

где $\varkappa_D=1$, если область D конечна, и $\varkappa_D=0$ в противном случае. Тогда найдутся такие линейно независимые системы вещественных l-вектор-функций $g_1,\ldots,g_k\in C^{\mu+0}(\Gamma)$ и решений $u_1,\ldots,u_k\in C^{\mu+0}(\overline{D})$ системы (1), что любое решение $u\in C^\mu(\overline{D})$ этой системы единственным образом представимо в виде

$$u=P\varphi+\sum_{j=1}^k(\varphi,g_j)u_j,\quad (\varphi,g)=\int\limits_\Gamma\varphi(t)g(t)\,|dt|, \tag{22}$$

с некоторой вещественной l-вектор-функцией $\varphi\in C^\mu(\Gamma)$, где $\varphi(t)g(t)$ – скалярное произведение l-векторов.

Доказательство основывается на описании ядра $\ker P = \{\varphi|\ P\varphi = 0\}$ оператора P. Пусть $P\varphi = 0$, рассмотрим в области D интеграл типа Коши $\phi = I_J(b^{-1}\varphi)$ и аналогичный интеграл в ее дополнении D', который обозначим через $\psi = I'_J(b^{-1}\varphi)$. Для этих функций формулы Сохоцкого–Племеля принимают вид

$$2\phi^+ = b^{-1}\varphi + S_J(b^{-1}\varphi), \quad 2\psi^- = -b^{-1}\varphi + S_J(b^{-1}\varphi), \tag{23}$$

где учтено, что контур Γ ориентирован отрицательно по отношению к D'. По условию с учетом соотношения (18) имеем равенство $\operatorname{Re} b\phi = 0$, так что функция ϕ постоянна в области D, более точно, $b\phi = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^l$. На основании формулы (23) и вещественности функции φ имеем

$$\operatorname{Im} b\psi^- = \xi, \quad \varphi = -\operatorname{Re} b\psi^-. \tag{24}$$

Обратно, пусть некоторая J-аналитическая функция ψ_1 задана в D', принадлежит $C^\mu(\overline{D'_j})$ в каждой области D'_j и исчезает на бесконечности (в случае $j = m$, когда область D конечна). Утверждается, что тогда $P\varphi = 0$ для плотности φ, определяемой вторым равенством в (24) по отношению к ψ_1.

В самом деле, для пары $\phi_1 = ib^{-1}\xi$ и ψ_1 имеем соотношение $\phi_1^+ - \psi_1^- = b^{-1}\varphi$. С другой стороны, это же соотношение справедливо и для пары функций $\phi = I_J(b^{-1}\varphi)$ и $\psi = I'_J(b^{-1}\varphi)$. Следовательно, для разностей $\phi_0 = \phi - \phi_1$ и $\psi_0 = \psi - \psi_1$ справедливо равенство $\phi_0^+ = \psi_0^-$. В силу формулы Коши (11), примененной к областям D и D'_j, $1 \le j \le m$, это равенство возможно только тогда, когда ϕ_0 и ψ_0 равны нулю. Таким образом, $I_J(b^{-1}\varphi) = ib^{-1}\xi$ и, следовательно, $P\varphi = 0$.

В силу теоремы 3 функция ψ в (24) принадлежит классу $C^{\mu+0}(\overline{D'_j})$ в связных компонентах D'. Конечномерный класс таких функций обозначим через X. Напомним, что в его определение включается требование $\psi(\infty) = 0$ в случае, когда область D конечна. С каждой функцией $\psi \in X$ свяжем решение

$$v(z) = [\operatorname{Im} b\psi(z)] - \xi = -\operatorname{Re} b[i\psi(z) + b^{-1}\xi], \quad z \in D', \tag{25}$$

однородной задачи Дирихле для системы (1). Любое решение v этой однородной задачи представимо в указанном виде. В самом деле, если область D'_j конечна, то она односвязна и возможность подобного представления обеспечивается теоремой 2. То, что функция ψ в этом представлении вместе с v принадлежит классу $C^{\mu+0}(\overline{D'_j})$, составляет аналог теоремы Привалова для J-аналитических функций, установленный в [14]. Если область D конечна, то в силу оценки (12) для v в бесконечной области D'_m и теоремы 2 аналогичная оценка справедлива и для $\psi'(z) = \partial\psi/\partial x$. Следовательно, функция

$$\psi(z) = \int_\infty^z dt_J\, \psi'(t)$$

однозначна в области D'_m.

Таким образом, отображение $\psi \to v$ по формуле (25) переводит X на все пространство решений однородной задачи Дирихле в D', размерность которого равна s. Ядро этого отображения состоит из функций ψ, принимающих в D'_j постоянное значение $\eta_j \in \mathbb{C}^l$, $\operatorname{Im} b\eta_j = \xi \in \mathbb{R}^l$. Кроме того, если область D конечна и, например, D'_m бесконечна, то $\xi = \eta_m = 0$. Таким образом,

$$\dim X = \begin{cases} s + (m-1)l, & \varkappa_D = 1, \\ s + (m+1)l, & \varkappa_D = 0. \end{cases} \tag{26}$$

С другой стороны, из тех же соображений оператор $\psi \to -\operatorname{Re} b\psi^-$, действующий из X в $C^{\mu+0}(\Gamma)$, взаимно однозначен, если область D конечна, и имеет своим ядром пространство функций ψ, принимающих в D' постоянное значение $\eta = ib^{-1}\xi$. Поэтому образ Y этого оператора имеет размерность

$$\dim Y = \begin{cases} 0, & \varkappa_D = 1, \\ l, & \varkappa_D = 0. \end{cases}$$

Вместе с соотношениями (21), (26) отсюда следует, что размерность ядра $\ker P$ равна k, и пусть $g_1, \ldots, g_k$ составляют базис этого пространства.

Из равенства (20) вытекает, что композиция RP оператора R задачи Дирихле (1), (5) с P дает фредгольмовый оператор $1+K$, поэтому с учетом теоремы 3 оператор $P: C^\mu(\Gamma) \to \to C^\mu(\overline{D})$ фредгольмов и его индекс равен нулю. Напомним, что под $C^\mu(\overline{D})$ понимается соответствующее пространство решений уравнения (1). Таким образом, существует система элементов $u_1, \ldots, u_k \in C^\mu(\overline{D})$, линейно независимых по модулю подпространства $\operatorname{Im} P = = P(C^\mu)$ – образа оператора P. В действительности эти функции можно выбрать в классе $C^{\mu+0}$. Для доказательства выберем $\nu > \mu$ так, чтобы контур Γ принадлежал классу $C^{1,\nu+0}$ и соответственно функция $k(t_0,t) = |t-t_0| Q(t_0, t-t_0)$, связанная с ядром оператора (19), принадлежала классу $C^{\nu+0}(\Gamma\times\Gamma)$. В этом случае оператор K ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C^\nu(\Gamma)$.

Заменяя в предыдущих рассуждениях μ на ν, выберем систему функций $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_k \in \in C^\mu(\overline{D})$, линейно независимых по модулю подпространства $P(C^\nu)$. Тогда эти функции будут линейно независимыми и по модулю $P(C^\mu)$. В самом деле, если это не так, то найдется линейная комбинация $\widetilde{u} = \sum \lambda_j \widetilde{u}_j$, совпадающая с $P\varphi$ для некоторой $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Следовательно, $\varphi + K\varphi = \widetilde{u}^+ \in C^\nu(\Gamma)$, так что и $\varphi = \widetilde{u}^+ - K\varphi \in C^\nu(\Gamma)$. Поэтому $\widetilde{u} = P\varphi \in P(C^\nu)$ и в силу выбора $\widetilde{u}_j$ все коэффициенты λ_j линейной комбинации равны нулю.

Таким образом, опуская волну в обозначениях, можно считать, что система функций $u_1, \ldots, u_k \in C^{\mu+0}(\overline{D})$ линейно независима по модулю подпространства $\operatorname{Im} P = P(C^\mu)$. Пусть оператор P_1 определяется правой частью равенства (22), очевидно, он также фредгольмов индекса нуль. Если $P_1\varphi = 0$, то линейная комбинация $\sum(\varphi, g_j)u_j$ принадлежит $\operatorname{Im} P = P(C^\mu)$ и, следовательно, ее коэффициенты удовлетворяют равенствам

$$(\varphi, g_j) = 0, \quad 1 \le j \le k. \tag{27}$$

Но тогда и $P\varphi = 0$, так что φ есть линейная комбинация функций g_j. С учетом равенств (27) отсюда следует, что $\varphi = 0$. Поэтому оператор P_1 обратим $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$, что завершает доказательство теоремы.

Как видно из доказательства, ядро $\ker P = \{g_1, \ldots, g_k\}$ содержит функции g, постоянные на контурах Γ_j (и обращающиеся в нуль на Γ_m в случае конечной области D). Особенно простой случай имеем при $m = 1$, когда область D ограничена простым контуром Γ. В этом случае величина k в (21) совпадает с размерностью s ядра задачи Дирихле в области D', если область D конечна, и $k = s + l$ в противном случае. В последнем случае ядро $\ker P$ содержит пространство $\mathbb{R}^l$ постоянных на Γ функций, что соответствует второму слагаемому в равенстве $k = s + l$.

Из теоремы 4 непосредственно следует, что задача Дирихле (1), (5) редуцируется к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi + K\varphi + \sum_{j=1}^{k} (\varphi, g_j) u_j^+ = f.$$

Связь между решениями задачи и этого уравнения осуществляется равенством (22).

До сих пор все рассмотрения проводились в рамках пространств Гёльдера. Предыдущие результаты сохраняют свою силу и по отношению к более широким пространствам Харди [15, 16]. Для J-аналитических функций, заданных в области D с ляпуновской границей $\Gamma = \partial D$, пространство $H^p(D)$, $1 < p < \infty$, проще всего ввести как замыкание класса непрерывных в $\overline{D}$

функций по норме $|\phi| = |\phi^+|_{L^p(\Gamma)}$. Аналогично вводим и пространство $h^p(D)$ для решений слабо связанной эллиптической системы (1) по отношению к норме

$$|u| = |u^+|_{L^p(\Gamma)} + |u|_{C(\overline{D_0})},$$

где ограниченная область D_0 содержится в D вместе со своим замыканием. Наличие второго слагаемого в этом определении объясняется тем, что однородная задача Дирихле может допускать ненулевые решения.

Для элементов так определенных пространств существуют угловые предельные значения, принадлежащие $L^p(\Gamma)$. Интеграл типа Коши I_J ограничен $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$ с сохранением формулы Сохоцкого–Племеля для граничных значений. Точно так же оператор P ограничен $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$, а интегральный оператор K компактен в пространстве $L^p(\Gamma)$. Кроме того, имеет место аналог Рисса: если $u \in h^p(D)$, то в представлении теоремы 2 функция ϕ принадлежит $H^p(D)$ (при дополнительном предположении ее однозначности). Можно показать также, что оператор P ограничен $C(\Gamma) \to C(\overline{D})$, а интегральный оператор K компактен в пространстве $C(\Gamma)$.

Первое утверждение теоремы 3 сохраняет свою силу и по отношению к $h^p(D)$, при этом любое решение $h^p(D)$ задачи Дирихле с правой частью $f \in C^{+0}(\Gamma)$ (т.е. удовлетворяющей условию Гёльдера на Γ) обладает аналогичным свойством в замкнутой области $\overline{D}$. В соответствии с этим схема доказательства теоремы 4 может быть использована как по отношению к классу Харди, так и к классу $C(\overline{D})$.

Теорема 5. *Пусть ляпуновский контур* $\Gamma = \partial D$ *состоит из связных компонент* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. *Тогда в обозначениях теоремы 4 такие линейно независимые системы вещественных* l *-вектор-функций* $g_1, \ldots, g_k \in C^{+0}(\Gamma)$ *и решений* $u_1, \ldots, u_k \in C^{+0}(\overline{D})$ *системы (1), что любое решение* $u \in h^p(D)$ *этой системы единственным образом представимо в виде (22) с некоторой вещественной* l *-вектор-функцией* $\varphi \in L^p(\Gamma)$. *Если* $u \in C(\overline{D})$, *то и плотность* φ *в этом представлении принадлежит* $C(\Gamma)$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.А18.21.0357).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солдатов А.П.* О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 674–686.
2. *Келдыш М.В.* Математика // Избр. труды. М., 1985.
3. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., 1966.
4. *Товмасян Н.Е.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. С. 995–997.
5. *Товмасян Н.Е.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. I, II // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 1. С. 3–23; № 2. С. 163–171.
6. *Золотарева Е.В.* О задаче Дирихле для некоторого класса эллиптических систем // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. С. 983–985.
7. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М., 1991.
8. *Douglis A.A.* A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. 1953. V. 6. P. 259–289.
9. *Солдатов А.П.* Гипераналитические функции и их приложения // Совр. математика и ее приложения. 2004. Т. 15. С. 142–199.
10. *Gilbert R.P., Wendland W.L.* Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1975. V. 73A. P. 317–371.
11. *Hile G.N.* Function theory for a class of elliptic systems in the plane // J. Differ. Equat. 1979. V. 32. № 3. P. 369–387.

12. *Солдатов А.П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55. № 5. С. 1070–1100.
13. *Солдатов А.П., Чернова О.В.* Задача Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гёльдера // Научные ведомости БелГУ. 2009. № 13 (68). Вып. 17/2. С. 115–121.
14. *Soldatov A.P.* On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane. More progresses in analysis // Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, Catania, Italy, 25–30 July 2005 / Editors Begehr H. and oth. Singapore, 2009. V. 2. P. 1171–1184.
15. *Солдатов А.П.* Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 1. С. 26–30.
16. *Солдатов А.П.* Пространство Харди решений эллиптических систем второго порядка // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 2. С. 162–167.

Белгородский государственный
национальный исследовательский
университет

Поступила в редакцию
27.12.2012 г.