ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2013, том 453, № 4, с. 368–372

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ВСЕЙ ОСИ

© 2013 г. Н. А. Жура, А. П. Солдатов

Представлено академиком Е.И. Моисеевым 29.04.2013 г.

Поступило 14.05.2013 г.

DOI: 10.7868/S0869565213340070

1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ФАДДЕЕВА–МАРЧЕНКО

Рассмотрим обратную задачу Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = k^2y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

на всей оси в классической подстановке, когда

$$q \in C(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}}(1+|x|)|q(x)|dx < \infty. \tag{2}$$

Начиная с середины прошлого столетия этой задаче посвящены многочисленные исследования (см. монографии [1–3], где приведена подробная библиография).

Как хорошо известно [2], при выполнении условия (2) исходная задача в классе функций, исчезающих на бесконечности, может иметь не более чем конечное число точек спектра, причем все они простые и лежат на отрицательной полуоси. Их учет не представляет трудностей ни в классическом методе решения обратной задачи, ни в рассматриваемом ниже подходе. Поэтому в дальнейшем предполагается, что коэффициент $q(x)$ в уравнении (1) таков, что задача не имеет дискретного спектра.

Опишем классический результат И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, Л.Д. Фаддеева и В.А. Марченко решения этой задачи. Рассмотрим функции Йоста $f_j(x, k)$, $j = 1, 2$, как решения уравнения Штурма–Лиувилля с заданными асимптотиками на бесконечности:

$$f_j(x, k) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad f'_j(x, k) = \pm ike^{\pm ikx} + o(1)$$

при $k \to \pm\infty$, где $\pm 1 = (-1)^{j-1}$. Они определяются однозначно, в частности $f_j(x, -k) = \overline{f_j(x, k)}$. При фиксированном вещественном $k \neq 0$ пары функций $\{f_j(x, k), \overline{f_j(x, k)}\}$ образуют две фундаментальные системы решений и, следовательно, связаны соотношением

$$f_1(x, k) = b(k)f_2(x, k) + a(k)\overline{f_2(x, k)} \tag{3}$$

с некоторыми коэффициентами $a(k)$, $b(k)$. Функции f_j представляются формулами [2]

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A_1(x, t)e^{ikt}dt,$$
$$f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A_2(x, t)e^{-ikt}dt \tag{4}$$

с определенными вещественными ядрами $A_j(x, t)$, причем интегралы сходятся абсолютно. Свойства коэффициентов a, b подробно изучены [2] и их можно объединить в следующем предложении.

Л е м м а 1. *Справедливы соотношения*

$$a(-k) = \overline{a(k)}, \quad b(-k) = \overline{b(k)},$$
$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2,$$
$$a(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad b(k) = O(k^{-1}) \ \text{при} \ k \to \infty,$$
$$\lim_{k\to\infty} k[a(k) + b(k)] = 0.$$

Кроме того, известно также [3] интегральное представление этих функций:

$$2ika(k) = 2ik - \int_{-\infty}^{\infty} q(t)dt + \int_0^{\infty} A(t)e^{ikt}dt,$$
$$2ikb(k) = \int_{-\infty}^{\infty} B(t)e^{ikt}dt \tag{5}$$

с некоторыми суммируемыми функциями $A(t)$ и $B(t)$, которые определенным образом выражаются через потенциал q и ядра $A_j(x, t)$.

Согласно (4) при каждом фиксированном x функции $f_j(x, k)$ допускают аналитическое продолжение по параметру k в верхнюю полуплос-

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской Академии наук, Москва
Белгородский государственный национальный исследовательский университет

кость $\zeta = k + il$, $l > 0$, для которых сохраняем прежние обозначения. В силу (3) функция a представляет собой вронскиан функций f_1, f_2 и следовательно также аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, причем произведение $\zeta a(\zeta)$ непрерывно в верхней полуплоскости. Этот факт можно усмотреть и из представления (5). Принятое предположение относительно отсутствия спектра уравнения Штурма–Лиувилля равносильно тому, что функция $a(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\zeta > 0$. С учетом леммы 1 отсюда непосредственно выводится следующее свойство этой функции.

Л е м м а 2. *В верхней полуплоскости функция* $a(\zeta)$ *представляется формулой*

$$a(\zeta) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\ln(1-|r(t)|^2)}{t-\zeta}dt\right\},$$

$$r(t) = \frac{b(t)}{a(t)},$$

причем произведение $\zeta a(\zeta)$ *непрерывно в замкнутой верхней полуплоскости.*

Ядра A_j в представлении (4) являются решениями интегральных уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко

$$\begin{gathered} A_1(x, y) + F_1(x+y) + \int_x^{\infty} A_1(x, t)F_1(t+y)dt = 0, \\ y \geq x, \\ A_2(x, y) + F_2(x+y) + \int_{-\infty}^{x} A_2(x, t)F_2(t+y)dt = 0, \\ x \geq y. \end{gathered} \qquad (6)$$

В принятом предположении о спектре функции F_j связаны с a, b соотношениями

$$F_j(x) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{b(\pm k)}{a(k)}e^{\mp ikx}dk, \quad \pm 1 = (-1)^j. \qquad (7)$$

Классический результат о решении рассматриваемой обратной задачи, развитый Л.Д. Фаддеевым, И.М. Гельфандом, Б.М. Левитаном и В.А. Марченко, состоит в следующем.

О с н о в н а я т е о р е м а. *Пусть заданы непрерывные при* $k \neq 0$ *функции* $a(k)$, $b(k)$, *которые удовлетворяют условиям лемм* 1 *и* 2. *Пусть функции* F_j *непрерывны, дифференцируемы и интегралы*

$$\int_x^{\infty}[|F_1(t)| + (1+|t|)|F_1'(t)|]dt,$$

$$\int_{-\infty}^{x}[|F_2(t)| + (1+|t|)|F_2'(t)|]dt$$

конечны для любого $x \in \mathbb{R}$.

Тогда интегральные уравнения (6) *однозначно разрешимы относительно* A_j, *а функции* $f_j(x, k)$, *определенные по* A_j, *удовлетворяют уравнению Штурма–Лиувилля с коэффициентом*

$$q(x) = -2[A_1(x, x)]' = 2[A_2(x, x)]'.$$

2. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ $r = \frac{b}{a}$

Б.М. Левитан заметил [4], что условия основной теоремы фактически можно переформулировать по отношению к функции $r(t)$, как это следует из леммы 2. При этом для определения функции q можно использовать функцию F_2, в выражении (7) которой участвует только $r(k)$. Согласно лемме 1 функция $r(k)$ по модулю строго меньше 1 при $k \neq 0$. Кроме того, первые два соотношения леммы распространяются и на $r(k)$. Таким образом, можем написать

$$r(-k) = \overline{r(k)}, \quad |r(k)| < 1, \quad k \neq 0. \qquad (8)$$

В частности, если предел $r(0) = \lim r(k)$ при $k \longrightarrow 0$ существует, то он вещественен.

Поведение $r(k)$ при $k \longrightarrow 0$ легко описать с помощью интегральных представлений функций a и b. Запишем их в форме $2ika(k) = 2ik + \tilde{a}(k)$, $2ikb(k) = \tilde{b}(k)$ с соответствующими непрерывными функциями $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Тогда согласно лемме 1 должно быть $\tilde{a}(0) + \tilde{b}(0) = 0$ и в этих обозначениях

$$r(k) = \frac{\tilde{b}(k)}{2ik + \tilde{a}(k)}.$$

Если $\tilde{b}(0) \neq 0$, то значение $\tilde{a}(0)$ также отлично от нуля и следовательно существует предел $r(0) = \lim r(k)$ при $k \longrightarrow 0$, равный

$$r(0) = \frac{\tilde{b}(0)}{\tilde{a}(0)} = -1.$$

Если $\tilde{b}(0) = 0$, то в силу тех же соображений и $\tilde{a}(0) = 0$, и поведение $r(k)$ при $k \longrightarrow 0$ может быть произвольным и его характер до конца не выяснен. По-видимому, именно с этим связано то, что в [2] на класс коэффициентов q наложено более жесткое требование

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)|q(x)|dx < \infty.$$

При его выполнении последнее условие леммы 1 заменяется на $a(k) + b(k) = O(1)$.

При естественных предположениях относительно $r(k)$ поведение функции $a(\zeta)$, определяемой в верхней полуплоскости $D_+ = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ леммой 2, описано Б.М. Левитаном в [4]. Его результат можно переформулировать следующим образом.

Теорема (Б.М. Левитан). *Пусть функция* $r(k) \in C(\mathbb{R})$ *со свойствами* (8) *удовлетворяет условию Гёльдера вне любой окрестности нуля и* $r(k) = O(k^{-1})$ *при* $k \longrightarrow \infty$. *Кроме того, пусть функция* $f_0(k) = \ln[1 - |r(k)|^2] - 2\sigma\ln|k|$, *где* $\sigma = 0$ *при* $|r(0)| < 1$ *и* $\sigma > 0$ *при* $|r(0)| = 1$, *удовлетворяет условию Гёльдера в некоторой окрестности нуля. Тогда функция*

$$h_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln[1-|r(t)|^2]dt}{t-\zeta} - \sigma\ln\zeta,$$
$$\operatorname{Im}\zeta > 0,$$

непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости и удовлетворяет условию Гёльдера в точке $\zeta = 0$.

Этот результат можно несколько усилить. Пусть $H(G)$ означает класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на ограниченном множестве $G \subseteq \mathbb{C}$. Если G неограничено, то обозначим $\hat{G} = \bar{G} \cup \{\infty\}$ замыкание G в метрике сферы Римана. В этом случае под $H(\hat{G})$ понимается класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера относительно этой метрики. Эквивалентное определение: $\varphi \in H(\hat{G})$, если функции $\varphi_1(z) = \varphi(z)$ и $\varphi_2(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ удовлетворяют условию Гёльдера на множествах $G_1 = G \cap \{|z| < 2\}$ и $G_2 = \left\{z \middle| \frac{1}{z} \in G\right\} \cap \{|z| < 2\}$ соответственно. При $\varphi(\infty) = 0$ соответствующий класс обозначаем $\mathring{H}(\hat{G})$.

Как известно [5], интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D_{\pm},$$

с плотностью $\varphi \in \mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$ определяет функцию $\phi \in \mathring{H}(\hat{D}_{\pm})$ и для ее граничных значений $\phi^{\pm}(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, справедливая формула Сохоцкого–Племеля

$$2\phi^{\pm}(t_0) = \pm\varphi(t_0) + (S\varphi)(t_0) \tag{9}$$

с сингулярным оператором Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

В частности, этот оператор инвариантен в классе $\mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$ и обладает свойством $S^2\varphi = \varphi$. Если дополнительно производная $\varphi' \in \mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$, то в силу формулы дифференцирования по частям

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)dt}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi'(t)dt}{t-z} \in \mathring{H}(\hat{D}_{\pm}).$$

Лемма 3. (а) *Пусть функция* $r(t)$ *дважды дифференцируема, ее произведение* $r^{(j)} \in \mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$, $j = 0, 1, 2$, *и* $|r(t)| < 1$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда интеграл типа Коши*

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln[1-|r(t)|^2]dt}{t-\zeta}$$

и его производные h', h'' *принадлежат классу* $\mathring{H}(\hat{D}_+)$.

(б) *Пусть* $r^{(j)} \in \mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$, $j = 0, 1, 2$, *и* $|r(t)| < 1$, $t \neq 0$, $|r(0)| = 1$, *причем для некоторого* $0 < \sigma \le 1$ *функция* $f_0(t) = \ln[1 - |r(t)|^2] - 2\sigma\ln|t|$ *в окрестности нуля вместе с производными* f_0', f_0'' *принадлежит классу* H. *Тогда функция*

$$h_0(\zeta) = h(\zeta) - \sigma\ln\frac{\zeta}{\zeta+i}, \quad \zeta \in D_+,$$

вместе со своими производными h_0', h_0'' *принадлежит классу* $\mathring{H}(\hat{D}_+)$.

Из этой леммы следует, что в условиях (а) функция $a(\zeta) = e^{-h(\zeta)}$ обратима в классе $H(\hat{D})$ вместе со своими производными a', a''. Аналогично в условиях (б) этим свойством обладает функция

$$a_0(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{\zeta+i}\right)^{\sigma} a(\zeta).$$

С помощью леммы 3 нетрудно выделить класс функций $r(k)$, для которых коэффициент a, определяемый по формуле леммы 2, и $b = ar$ удовлетворяют всем условиям основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $r(t) \in C^2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям* (8) *и* $(1 + |t|)r^{(j)}(t) \in \mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$, $j = 0, 1, 2$. *Пусть* $-1 \le r(0) < 1$, *причем при* $r(0) = -1$ *функция* $f_0(t) = \ln[1 - |r(t)|^2] - 2\ln|t|$ *вместе со своими производными до второго порядка включительно принадлежит классу* H *в окрестности нуля. Тогда коэффициенты* $a(t) = e^{-h(t)}$ *и* $b(t) = r(t)e^{-h(t)}$, *где*

$$h(t_0) = \frac{\ln[1-|r(t_0)|^2]}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln[1-|r(t)|^2]}{t-t_0}dt,$$

удовлетворяют всем условиям основной теоремы.

3. ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

При выполнении условий основной теоремы обратная задача Штурма–Лиувилля однозначно разрешима и ее решение может быть получено из интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–

Марченко. Однако хорошо известен и теоретико-функциональный подход к описанию этого решения, основанный на задаче Маркушевича для функций Йоста.

Пусть в соответствии с основной теоремой функция $r = \frac{b}{a}$ непрерывна, исчезает на бесконечности и определяемая ею аналитическая функция $a(\zeta)$ удовлетворяет лемме 2. Удобнее от функций Йоста $f_j(x, k)$ перейти к новой паре функций $\phi_j(x, k)$ по формулам

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= e^{ikx}[a(k)\phi_1(x, k) + 1], \\ f_2(x, k) &= e^{-ikx}[\phi_2(x, k) + 1]. \end{aligned} \tag{10}$$

В силу (4) их представление имеет вид

$$\phi_1(x, k) = a^{-1}(k)\int_x^{\infty} A_1(x, t)e^{ik(t-x)}dt,$$

$$\phi_2(x, k) = \int_{-\infty}^{x} A_2(x, t)e^{ik(x-t)}dt.$$

Очевидно, при каждом фиксированном x функции $\phi_j(x, k)$ допускают аналитическое продолжение по параметру k в верхнюю полуплоскость $\zeta = k + il$, $l > 0$, они непрерывны и ограничены в замкнутой верхней полуплоскости $l \geq 0$ и стремятся к нулю при $l \to \infty$ равномерно по k. Вводя для краткости обозначения

$$\begin{aligned} \rho(x, k) &= r(k)e^{-2ikx}, \\ h(x, k) &= [1 - a^{-1}(k)] + \rho(x, k), \end{aligned} \tag{11}$$

соотношение (3) между функциями (10) можем переписать в виде

$$\phi_1(x, k) = \rho(x, k)\phi_2(x, k) + \overline{\phi_2(x, k)} + h(x, k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Опуская в обозначениях ϕ_j зависимость от x и вводя кусочно-аналитическую функцию

$$\phi(\zeta) = \begin{cases} \phi_1(\zeta), & \zeta \in D_+, \\ \overline{\phi_2(\bar{\zeta})}, & \zeta \in D_-, \end{cases} \tag{12}$$

предыдущее соотношение можно рассматривать как краевое условие задачи Маркушевича [6]:

$$\phi^+ - \phi^- = \rho\overline{\phi^-} + h. \tag{13}$$

Полагая $\varphi = \phi^+ - \phi^-$, с учетом формул Сохоцкого–Племеля (9) эту задачу можем свести к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению

$$\varphi - T\varphi = h, \quad T\varphi = \frac{\rho\overline{(-\varphi + S\varphi)}}{2}. \tag{14}$$

Данное уравнение впервые было получено в известной работе [7], которое однако не было исследовано. В условиях теоремы 1 это уравнение естественно рассматривать в классе $\mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$. Легко убедиться, что умножение на осциллирующий коэффициент $t \to e^{ixt}$ не выводит из этого класса, так что в соответствии с (11) функции $\rho(t) = \rho(x, t)$ принадлежит $\mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$. Напомним, что функция $r(t)$ удовлетворяет условиям $-1 \leq r(0) < 1$, $|r(t)| < 1$, $t \neq 0$. Согласно (11) этим свойством обладает и функция $\rho(t) = \rho(x, t)$. Поэтому при $\rho(0) \neq -1$ выполнено условие $|\rho(t)| \leq \leq q < 1$ для всех t. В этом случае задача Маркушевича (13) относится к так называемому эллиптическому типу [6] и для данных коэффициентов однозначно разрешима [8]. Поэтому аналогичным свойством обладает и уравнение (14) в классе $\mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$. Что касается случая $\rho(0) = -1$, то его можно свести к предыдущему случаю.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция* $\rho(t) \in \mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности нуля и* $|\rho(t)| < 1$ *для* $t \neq 0$. *Пусть кроме того при* $|\rho(0)| = 1$ *выполнено условие*

$$(|\rho|)''(0) < 0. \tag{15}$$

Тогда сингулярное уравнение (14) *однозначно разрешимо в классе* $\mathring{H}(\hat{\mathbb{R}})$.

В условиях теоремы 2 вместе с $1 - T$ обратим и оператор $1 - T^2$. Как показывает следующая лемма, T^2 является интегральным оператором со слабой особенностью.

Л е м м а 4. *Для* $\rho \in H(\hat{\mathbb{R}})$ *оператор* T^2 *действует по формуле*

$$(T^2\varphi)(t_0) = \frac{\rho(t_0)}{4\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0}\varphi(t)dt, \tag{16}$$

где положено

$$\sigma(t_0) = \overline{\rho(t_0)} - \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{\rho(t)}dt}{t - t_0} \in \mathring{H}(\hat{\mathbb{R}}),$$

и для оператора $1 - T^2$ *справедливы альтернативы Фредгольма.*

Теорема 2 и лемма 4 приводят непосредственно к следующему представлению функций Йоста обратной задачи Штурма–Лиувилля.

Т е о р е м а 3. *Пусть функции* $r(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и*

$$\sigma(x, t_0) = e^{2ixt_0}\overline{r(t_0)} - \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ixt}\overline{r(t)}dt}{t - t_0},$$

$$g(x, t_0) = \frac{e^{-2ixt_0}r(t_0)a(t_0) - 2\overline{a(t_0)}}{2|a(t_0)|^2} +$$

$$+ \frac{2 + e^{-2ixt_0}r(t_0) - |r(t_0)|^2}{2} +$$

$$+ \frac{e^{-2ixt_0}r(t_0)}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{1 - e^{2ixt}\overline{r(t)a(t)}}{\overline{a(t)}}\frac{dt}{t - t_0}.$$

Тогда уравнение Фредгольма

$$\varphi(x, t_0) - \frac{e^{-2ixt_0}r(t_0)}{4\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sigma(x, t) - \sigma(x, t_0)}{t - t_0}\varphi(t)dt = g(x, t_0)$$

однозначно разрешимо в классе $\mathring{H}(\mathbb{R})$ *и функции Йоста задачи Штурма–Лиувилля определяются выражениями*

$$f_1(x, k) = e^{ixk}\left[1 + \frac{a(k)\varphi(x, k)}{2} + \frac{a(k)}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x, t)dt}{t - k}\right],$$

$$f_2(x, k) = e^{-ixk}\left[1 - \frac{\varphi(x, k)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x, t)dt}{t - k}\right].$$

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № 14.А18.21.0357).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
2. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
4. *Левитан Б.М.* // Мат. сб. 1979. Т. 108 (150). № 3. С. 350–357.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118–134.
8. *Боярский Б.В.* // Сообщ. АН ГрССР. 1960. Т. 25. № 4. С. 385–390.